# Εισαγωγή στην Φασματική Θεωρία Αλγεβρών Banach

Α. Κατάβολος

Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Αθηνών

Αθήνα, 1999
*Αναθεώρηση, 2019*

# Περιεχόμενα

# 1 Πρώτοι ορισμοί

Για λόγους που θα γίνουν σύντομα σαφείς, όλοι οι γραμμικοί χώροι θα είναι **μιγαδικοί**, εκτός αν ρητά αναφέρεται κάτι διαφορετικό.

**Ορισμός 1.1** *Μία* **(προσεταιριστική) άλγεβρα** $\mathcal{A}$ *είναι ένας (μιγαδικός) γραμμικός χώρος που είναι συγχρόνως δακτύλιος και ισχύει* $(\lambda x)y = \lambda(xy) = x(\lambda y)$ *για κάθε* $x, y \in \mathcal{A}$ *και* $\lambda \in \mathbb{C}$. *Μία άλγεβρα λέγεται* **μεταθετική** *αν* $xy = yx$ *για κάθε* $x, y \in \mathcal{A}$.

*Ένας υπόχωρος* $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{A}$ *λέγεται* **(γνήσιο) αριστερό (αντίστοιχα δεξιό) ιδεώδες** *της* $\mathcal{A}$ *αν* $x \in \mathcal{A}$, $y \in \mathcal{J} \Rightarrow xy \in \mathcal{J}$ *(αντίστοιχα* $yx \in \mathcal{J}$*). Αν ένα ιδεώδες είναι δεξιό και αριστερό τότε λέγεται* **αμφίπλευρο ιδεώδες** *ή απλά* **ιδεώδες**.

**Παράδειγμα 1.1** **(α)** *Αν* $X$ *είναι γραμμικός χώρος και* $\Omega$ *είναι μη κενό σύνολο, το σύνολο* $\mathcal{F}(\Omega, X)$ *όλων των συναρτήσεων* $f : \Omega \longrightarrow X$ *γίνεται γραμμικός χώρος αν εφοδιασθεί με τις πράξεις κατά σημείο,*

$$(f + \lambda g)(t) = f(t) + \lambda g(t)$$

$(f, g \in \mathcal{F}(\Omega, X),\ \ \lambda \in \mathbb{C},\ \ t \in \Omega)$. *Αν* $X = \mathbb{C}$, *επειδή το* $\mathbb{C}$ *είναι άλγεβρα, ο χώρος* $\mathcal{F}(\Omega, \mathbb{C})$ *είναι άλγεβρα με πολλαπλασιασμό*

$$(f.g)(t) = f(t).g(t)$$

*Γενικότερα, αν* $X = \mathcal{A}$ *είναι άλγεβρα, τότε ο χώρος* $\mathcal{F}(\Omega, \mathcal{A})$ *είναι άλγεβρα ως προς το κατά σημείο γινόμενο.*

*Τέτοιες άλγεβρες λέγονται* **άλγεβρες συναρτήσεων**.

**(β)** *Έστω* $X$ *γραμμικός χώρος, και* $\mathcal{L}(X)$ *το σύνολο των γραμμικών απεικονίσεων* $T : X \longrightarrow X$. *Με τις κατά σημείο γραμμικές πράξεις, το* $\mathcal{L}(X)$ *γίνεται γραμμικός χώρος. Αν επί πλέον εφοδιασθεί με την σύνθεση τελεστών*

$$(T \cdot S)(x) = T(S(x)) \quad T, S \in \mathcal{L}(X),\ \ x \in X$$

*τότε ο* $\mathcal{L}(X)$ *γίνεται (εν γένει μη μεταθετική) άλγεβρα.*

*Τέτοιες άλγεβρες λέγονται* **άλγεβρες τελεστών**.

**Ορισμός 1.2** *Αν* $\mathcal{A}$ *είναι μία άλγεβρα και* $\|\cdot\|$ *είναι μία νόρμα στην* $\mathcal{A}$ *με την επιπλέον ιδιότητα*

$$\|x.y\| \leq \|x\|.\|y\| \tag{1}$$

*για κάθε* $x, y \in \mathcal{A}$, *τότε η* $\mathcal{A}$ *λέγεται* **νορμαρισμένη άλγεβρα**. *Αν επιπλέον η* $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$ *είναι πλήρης, τότε η* $\mathcal{A}$ *λέγεται* **άλγεβρα Banach**.

**Παρατηρήσεις.** **(i)** Η συνθήκη (1) εξασφαλίζει την συνέχεια του πολλαπλασιασμού

$$m : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A} : (x, y) \longrightarrow x.y$$

Πράγματι, έχουμε

$$\|xy - zw\| \leq \|xy - xw\| + \|xw - zw\| \leq \|x\|\|y - w\| + \|x - z\|\|w\|.$$

Αν ο πολλαπλασιασμός είναι *χωριστά συνεχής*, δηλαδή αν για κάθε $x \in \mathcal{A}$ οι απεικονίσεις

$$\lambda_x : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A} : y \longrightarrow xy \quad \text{και} \quad \rho_x : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A} : y \longrightarrow yx$$

είναι συνεχείς, δεν έπεται εν γένει ότι ο $m$ είναι συνεχής. Αν όμως επί πλέον η $(\mathcal{A}, \|.\|)$ είναι πλήρης, τότε ο πολλπλασιασμός είναι υποχρεωτικά συνεχής, και μάλιστα:

*υπάρχει ισοδύναμη νόρμα $\|.\|_1$ τέτοια ώστε η $(\mathcal{A}, \|.\|_1)$ να είναι άλγεβρα Banach.*

Η απόδειξη αφήνεται ως άσκηση.

**(ii)** Κάθε νορμαρισμένη άλγεβρα εμφυτεύεται ισομετρικά και ισομορφικά (δηλ. η εμφύτευση είναι μορφισμός αλγεβρών) ως πυκνή υπάλγεβρα μιάς άλγεβρας Banach. Αυτό αποδεικνύεται ακριβώς όπως το αντίστοιχο αποτέλεσμα γιά χώρους με νόρμα, χρησιμοποιώντας και την συνέχεια του πολλαπλασιασμού. Θα κατασκευάσουμε μία 'συγκεκριμένη' εμφύτευση παρακάτω (βλ. Παράγραφο 3.1).

# 2 Παραδείγματα

## 2.1

Το σώμα των μιγαδικών αριθμών $(\mathbb{C}, |.|)$ είναι άλγεβρα Banach. Θα δείξουμε αργότερα (Θεώρημα Gelfand-Mazur) ότι είναι 'η μόνη' διαιρετική άλγεβρα Banach.

## 2.2

**1.** Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ το σύνολο $(\mathbb{C}^n, \|.\|_\infty)$ είναι άλγεβρα Banach ως προς τις πράξεις κατά συντεταγμένη και την νόρμα $\|(x_n)\|_\infty = \max\{|x_i| : i = 1, \dots, n\}$. Είναι μεταθετική άλγεβρα με μονάδα $(1, 1, \dots 1)$.

**2.** Έστω $\Gamma \neq \emptyset$ σύνολο. Το σύνολο $(\ell^\infty(\Gamma), \|.\|_\infty)$ είναι άλγεβρα Banach ως προς τις πράξεις κατά σημείο και την νόρμα $\|f\|_\infty = \sup\{|f(\gamma)| : \gamma \in \Gamma\}$. Είναι μεταθετική άλγεβρα με μονάδα $1$, όπου $1(\gamma) = 1$ για κάθε $\gamma \in \Gamma$ .

## 2.3 Άλγεβρες συνεχών συναρτήσεων

**1.** Έστω K συμπαγής Hausdorff τοπολογικός χώρος (π.χ. $K = [0,1]$). Είναι γνωστό ότι ο χώρος $(C(K), \|.\|_\infty)$ των συνεχών συναρτήσεων $f : K \longrightarrow \mathbb{C}$ είναι (κλειστός υπόχωρος του $(\ell^\infty(K), \|.\|_\infty)$, άρα) χώρος Banach. Επειδή το (κατά σημείο) γινόμενο συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχής συνάρτηση, ο $C(K)$ είναι (υπάλγεβρα του $\ell^\infty(K)$, άρα) άλγεβρα Banach, μεταθετική και με μονάδα (την σταθερή συνάρτηση 1).

**2.** Έστω $X$ τοπικά συμπαγής Hausdorff τοπολογικός χώρος (π.χ. $X = \mathbb{R}$). Ονομάζουμε $C_o(\mathrm{X})$ το σύνολο των συνεχών συναρτήσεων $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ που 'μηδενίζονται στο άπειρο'. Δηλαδή μία συνεχής συνάρτηση $f$ ανήκει στον $C_o(\mathrm{X})$ εξ ορισμού όταν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $K_\epsilon \subseteq X$ συμπαγές ώστε $t \notin K_\epsilon \Rightarrow |f(t)| < \epsilon$. Τέτοιες συναρτήσεις είναι φραγμένες, δηλαδή $C_o(\mathrm{X}) \subseteq \ell^\infty(X)$. Μάλιστα είναι φανερό ότι ο $C_o(\mathrm{X})$ είναι υπάλγεβρα του $\ell^\infty(X)$. Επειδή ο $C_o(\mathrm{X})$ είναι και $\|.\|_\infty$-κλειστός (άσκηση), είναι (μεταθετική) άλγεβρα Banach. Παρατηρούμε όμως ότι δεν έχει μονάδα, εκτός αν ο $X$ είναι συμπαγής (άσκηση).

**Άσκηση.** Αποδείξτε ότι ο χώρος $C_{oo}(\mathrm{X})$ των συνεχών συναρτήσεων $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ που μηδενίζονται έξω από κάποιο συμπαγές $K_f \subseteq X$ αποτελεί υποσύνολο, μάλιστα ιδεώδες, του $C_o(\mathrm{X})$ που είναι $\|.\|_\infty$-πυκνό[1] στον $C_o(\mathrm{X})$.

**3.** Κάθε μη κενό σύνολο Γ γίνεται τοπικά συμπαγής χώρος όταν εφοδιασθεί με την διακριτή τοπολογία, και τότε τα συμπαγή υποσύνολά του είναι τα πεπερασμένα. Επομένως ο χώρος

$$c_o(\Gamma) \equiv \{f : \Gamma \longrightarrow \mathbb{C} : \forall \epsilon > 0\ \exists \Gamma_\epsilon \subseteq \Gamma,\ |\Gamma_\epsilon| < \infty,\ \ |f(\gamma)| < \epsilon\ \forall \gamma \notin \Gamma\}$$

είναι, από το (2), μεταθετική άλγεβρα Banach και έχει μονάδα αν και μόνον αν το Γ είναι πεπερασμένο. Μάλιστα, είναι κλειστό ιδεώδες της $(\ell^\infty(\Gamma), \|.\|_\infty)$.

## 2.4 Άλγεβρες μετρήσιμων συναρτήσεων

Έστω $(X, \mathcal{S}, \mu)$ χώρος μέτρου. Θέτουμε

$$\mathcal{L}^\infty(X) = \{f \in \ell^\infty(X),\ f \text{ μετρήσιμη}\}.$$

Επειδή το άθροισμα και το γινόμενο μετρησίμων συναρτήσεων είναι μετρήσιμη συνάρτηση, η $\mathcal{L}^\infty(X)$ είναι υπάλγεβρα της $\ell^\infty(X)$, και επειδή το ομοιόμορφο

[1] Όταν ο X είναι μετρικός χώρος, τοπικά συμπαγής και μη συμπαγής, το $C_{oo}(\mathrm{X})$ είναι γνήσιο ιδεώδες του $C_o(\mathrm{X})$. Υπάρχουν όμως τοπικά συμπαγείς μη συμπαγείς χώροι X στους οποίους ισχύει $C_{oo}(\mathrm{X}) = C_o(\mathrm{X})$.

όριο μετρησίμων συναρτήσεων είναι μετρήσιμη συνάρτηση, η $\mathcal{L}^\infty(X)$ είναι άλγεβρα Banach, προφανώς μεταθετική και με μονάδα. (Σημείωσε ότι μέχρι τώρα η ύπαρξη του μέτρου $\mu$ δεν έπαιξε κανένα ρόλο).

Θέτουμε

$$\mathcal{N}(X,\mu) = \{f \in \mathcal{L}^\infty(X) : f = 0 \ \mu\text{-σχεδόν παντού}\}$$

και παρατηρούμε ότι το $\mathcal{N}(X,\mu)$ είναι ιδεώδες της $\mathcal{L}^\infty(X)$, δηλαδή αν $f \in \mathcal{N}(X,\mu)$ και $g \in \mathcal{L}^\infty(X)$ τότε $fg \in \mathcal{N}(X,\mu)$. Έπεται εύκολα ότι ο χώρος πηλίκο

$$L^\infty(X,\mu) = \mathcal{L}^\infty(X)/\mathcal{N}(X,\mu)$$

είναι άλγεβρα. Επίσης το ομοιόμορφο όριο μ-μηδενικών συναρτήσεων είναι μ-μηδενική, άρα το $\mathcal{N}(X,\mu)$ είναι $\|.\|_\infty$-κλειστό ιδεώδες της $\mathcal{L}^\infty(X)$. Επομένως η νόρμα πηλίκο είναι πλήρης νόρμα στον χώρο πηλίκο. Θυμίζω ότι η νόρμα πηλίκο $\|.\|_q$ ορίζεται από τον τύπο

$$\|f + \mathcal{N}\|_q \equiv d(f,\mathcal{N}) = \inf\{\|f-g\|_\infty : g \in \mathcal{N}\}.$$

Αποδεικνύεται (άσκηση!) ότι, αν θέσουμε

$$\|f\|_{ess} \equiv \inf\{\lambda > 0 : \mu(\{t \in X : |f(t)| > \lambda\}) = 0\}$$

για $f \in \mathcal{L}^\infty(X)$ (το 'ουσιώδες φράγμα' της $f$) τότε $\|f\|_{ess} = \|f+\mathcal{N}\|_q$. Ταυτίζουμε συνήθως μία $f \in \mathcal{L}^\infty(X)$ με την κλάση της $f + \mathcal{N}$, και αναφερόμαστε στην άλγεβρα Banach $(L^\infty(X,\mu), \|.\|_{ess})$ των ουσιωδώς φραγμένων μετρήσιμων συναρτήσεων[2]. Μάλιστα η νόρμα της $L^\infty(X,\mu)$ συμβολίζεται συνήθως $\|.\|_\infty$ αντί για $\|.\|_{ess}$.

## 2.5 Η άλγεβρα του δίσκου

Έστω $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ , $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, και $(C(\mathbb{T}), \|.\|_\mathbb{T})$ η άλγεβρα Banach των συνεχών συναρτήσεων $f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{C}$. Λέμε ότι μία συνάρτηση $f \in C(\mathbb{T})$ ανήκει στην **άλγεβρα του δίσκου** $A(\mathbb{D})$ αν η $f$ επεκτείνεται σε μία συνεχή συνάρτηση $\tilde{f} : \overline{\mathbb{D}} \longrightarrow \mathbb{C}$, που είναι ολόμορφη στον ανοικτό δίσκο $\mathbb{D}$. Παραδείγματος χάριν, κάθε συνάρτηση $p$ της μορφής

$$p(e^{i\theta}) = \sum_{k=0}^{n} a_k e^{ik\theta}$$

[2] Μία μετρήσιμη συνάρτηση $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ λέγεται ουσιωδώς φραγμένη αν $\|f\|_{ess} < \infty$. Κάθε ουσιωδώς μετρήσιμη συνάρτηση είναι σχεδόν παντού ίση με μία φραγμένη μετρήσιμη συνάρτηση.

όπου $a_k \in \mathbb{C}$, ανήκει στην $A(\mathbb{D})$. Τέτοιες συναρτήσεις λέγονται *αναλυτικά τριγωνομετρικά πολυώνυμα*.

Παρατηρούμε ότι, αν $f \in A(\mathbb{D})$,

$$\|f\|_{\mathbb{T}} := \sup\{|f(z)| : z \in \mathbb{T}\} = \sup\{|\tilde{f}(z)| : z \in \overline{\mathbb{D}}\} \equiv \|\tilde{f}\|_{\overline{\mathbb{D}}}$$

από την αρχή του μεγίστου ( [8], 6.49). Έπεται ειδικότερα ότι η επέκταση $\tilde{f}$ είναι μοναδική (αν υπάρχει).

Είναι φανερό ότι η $A(\mathbb{D})$ είναι υπάλγεβρα της $C(\mathbb{T})$. Ισχυρίζομαι ότι είναι κλειστή υπάλγεβρα. Πράγματι, έστω $\{f_n\}$ μία βασική ακολουθία στην $A(\mathbb{D})$. Από την αρχή του μεγίστου έπεται ότι

$$\|\tilde{f}_n - \tilde{f}_m\|_{\overline{\mathbb{D}}} = \|f_n - f_m\|_{\mathbb{T}}$$

επομένως η ακολουθία $\{\tilde{f}_n\}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\overline{\mathbb{D}}$ σε μία συνεχή συνάρτηση $g$. Από το Θεώρημα σύγκλισης του Weierstrass ( [8], 6.4) έπεται ότι η $g$ είναι ολόμορφη στον ανοικτό δίσκο $\mathbb{D}$. Άρα αν $f = g|\mathbb{T}$, τότε $f \in A(\mathbb{D})$ και βέβαια $\|f_n - f\|_{\mathbb{T}} \longrightarrow 0$.

Έπεται ότι η $A(\mathbb{D})$ είναι άλγεβρα Banach, και βεβαίως είναι μεταθετική και έχει μονάδα. Παρατήρησε ότι το συνολο $\mathcal{P}_+$ των αναλυτικών τριγωνομετρικών πολυωνύμων αποτελεί υπάλγεβρα της $A(\mathbb{D})$. Ισχυρίζομαι ότι είναι πυκνή υπάλγεβρα, δηλαδή ότι κάθε $f \in A(\mathbb{D})$ προσεγγίζεται απο αναλυτικά τριγωνομετρικά πολυώνυμα, ομοιόμορφα στο $\mathbb{T}$.

**Απόδειξη.**

*Παρατήρηση 1.* Έστω $f : \overline{\mathbb{D}} \longrightarrow \mathbb{C}$ συνεχής, $0 < \rho < 1$. Θέτω $f_\rho(z) = f(\rho z)$. Τότε $\lim_{\rho \nearrow 1}\|f_\rho - f\|_{\overline{\mathbb{D}}} = 0$. Πράγματι η $f$ είναι ομοιόμορφα συνεχής, άρα για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

$$z, w \in \overline{\mathbb{D}},\ |z - w| < \delta \Longrightarrow |f(z) - f(w)| < \varepsilon.$$

Επομένως, αν $1 - \rho < \delta$, τότε για κάθε $z \in \overline{\mathbb{D}}$ ισχύει $|z - \rho z| < \delta$ άρα
$|f_\rho(z) - f(z)| = |f(\rho z) - f(z)| < \varepsilon$.

*Παρατήρηση 2.* Έστω $f \in A(\mathbb{D})$. Τότε για κάθε $\rho \in (0, 1)$ η συνάρτηση $f_\rho$ είναι ολόμορφη στον δίσκο $\mathbb{D}_\rho = \{z \in \mathbb{C} : |z| < \frac{1}{\rho}\}$. Επομένως έχει δυναμοσειρά η οποία συγκλίνει ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσυνολα του $\mathbb{D}_\rho$, άρα και στο $\mathbb{T}$.

Αν λοιπόν $f \in A(\mathbb{D})$ και $\varepsilon > 0$, επιλέγουμε, από την Παρατήρηση 1, $\rho \in (0, 1)$ ώστε $\|f_\rho - f\|_{\mathbb{T}} < \varepsilon/2$. Από την Παρατήρηση 2, υπάρχει αναλυτικό τριγωνομετρικό πολυώνυμο $p$ ώστε $\|f_\rho - p\|_{\mathbb{T}} < \varepsilon/2$. Επομένως $\|f - p\|_{\mathbb{T}} < \varepsilon$ και η απόδειξη είναι πλήρης. $\square$

## 2.6 Η άλγεβρα Banach $(\ell^1(\mathbb{Z}), ||\cdot||_1, *)$

Είναι γνωστό ότι ο χώρος

$$\ell^1(\mathbb{Z}) = \{a = (a_n)_{n\in\mathbb{Z}} : \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} |a_k| < \infty\}$$

είναι χώρος Banach ως προς την νόρμα $\|.\|_1$ όπου

$$\|\alpha\|_1 = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} |a_k|.$$

Αν $e_n \in \ell^1(\mathbb{Z})$ είναι η ακολουθία που έχει μονάδα στην θέση $n$ και μηδέν στις υπόλοιπες, ο $\ell^1(\mathbb{Z})$ είναι η κλειστή γραμμική θήκη του συνόλου Ε $\equiv \{e_n : n \in \mathbb{Z}\}$ (μάλιστα το Ε είναι βάση Schauder του $\ell^1(\mathbb{Z})$). Το Ε γίνεται (αβελιανή) ομάδα (ισόμορφη με την $\mathbb{Z}$) αν εφοδιασθεί με την πράξη $*$ όπου $e_n * e_m \equiv e_{n+m}$. Η πράξη αυτή επεκτείνεται γραμμικά στην γραμμική θήκη $c_{oo}(\mathbb{Z})$ του $E$:

Αν τα $a = \sum a_k e_k$ και $b = \sum b_k e_k$ είναι πεπερασμένα αθροίσματα, θέτουμε

$$a * b = \sum_k \sum_m a_k b_m e_k * e_m$$

και παρατηρούμε ότι $a * b = \sum_n c_n e_n$ όπου $c_n = \sum_k a_k b_{n-k}$.

Μπορούμε να επεκτείνουμε την πράξη $*$ της **συνέλιξης (convolution)** στον χώρο $\ell^1(\mathbb{Z})$, είτε παρατηρώντας ότι είναι συνεχής ως προς την νόρμα $\|.\|_1$, είτε απευθείας ως εξής: αν $a, b \in \ell^1(\mathbb{Z})$ ορίζουμε την ακολουθία $c = (c_n) = a * b$ από την σχέση

$$c_n = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} a_k b_{n-k} \quad n \in \mathbb{Z}$$

(η σειρά συγκλίνει απόλυτα γιατί η $(a_k)$ είναι απόλυτα αθροίσιμη και για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ η $(b_{n-k})$ είναι φραγμένη). Πρέπει να δειχθεί ότι η $(c_n)$ ανήκει στον $\ell^1(\mathbb{Z})$. Πράγματι,

$$\begin{aligned}
\sum_n |c_n| &= \sum_n |\sum_k a_k b_{n-k}| \\
&\leq \sum_n \sum_k |a_k|.|b_{n-k}| = \sum_k |a_k| \sum_n |b_{n-k}| \\
&= \|a\|_1.\|b\|_1
\end{aligned}$$

όπου η εναλλαγή των δύο αθροίσεων είναι επιτρεπτή, αφού πρόκειται για σειρές θετικών όρων, και η τελευταία ισότητα ισχύει γιατι $\sum_n |b_{n-k}| = \sum_n |b_n|$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$. Έτσι αποδείχθηκε συγχρόνως ότι $c = a * b \in \ell^1(\mathbb{Z})$ και ότι $\|a * b\|_1 \leq \|a\|_1 \|b\|_1$.

Η προσεταιριστική ιδιότητα της συνέλιξης αποδεικνύεται ως εξής

$$\begin{aligned}
(a*(b*c))_n &= \sum_k a_k (b*c)_{n-k} \\
&= \sum_k a_k (\sum_m b_{n-k-m} c_m) = \sum_m (\sum_k a_k b_{(n-m)-k}) c_m \\
&= \sum_m (a*b)_{n-m} c_m = ((a*b)*c)_n.
\end{aligned}$$

Η επιμεριστική ιδιότητα της συνέλιξης ως προς την πρόσθεση ισχύει τετριμμένα, επομένως αποδείχθηκε ότι η $(\ell^1(\mathbb{Z}), \|.\|_1, *)$ είναι άλγεβρα Banach.

Η σχέση

$$(a*b)_n = \sum_k a_k b_{n-k} = \sum_j a_{n-j} b_j = (b*a)_n$$

δείχνει ότι η άλγεβρα είναι μεταθετική. Τέλος, ελέγχεται άμεσα ότι το στοιχείο $e_0$ όπου $(e_0)_n = \delta_{n,0}$ είναι μονάδα της άλγεβρας.

**Παρατήρηση.** Η άλγεβρα $(\ell^1(\mathbb{Z}), *)$ *δεν* είναι άλγεβρα συναρτήσεων, γιατί ο πολλαπλασιασμός δεν είναι το κατά σημείο γινόμενο. Οπως παρατηρήσαμε, ο πολλαπλασιασμός $*$ ορίσθηκε μέσω της αλγεβρικής δομής του 'συνόλου δεικτών' $\mathbb{Z}$. Στο Παράδειγμα 2.8 θα 'αναπαραστήσουμε' την $(\ell^1(\mathbb{Z}), \|.\|_1, *)$ ως άλγεβρα συναρτήσεων.

Μπορεί να ελέγξει κανείς εύκολα (άσκηση) ότι ο χώρος $(\ell^1(\mathbb{Z}), \|.\|_1)$ (και γενικότερα, ο $\ell^1(\Gamma)$) γίνεται μεταθετική άλγεβρα Banach με το κατά σημείο γινόμενο, η οποία όμως δεν έχει μονάδα. Η άλγεβρα αυτή δεν είναι ισόμορφη, *ως άλγεβρα,* με την $(\ell^1(\mathbb{Z}), *)$ (ενώ οι υποκείμενοι χώροι Banach ταυτίζονται).

## 2.7 Η άλγεβρα Banach $(L^1(\mathbb{T}), ||\cdot||_1, *)$

Ο χώρος Banach $(L^1(\mathbb{T}), \|.\|_1)$ των Lebesgue ολοκληρώσιμων συναρτήσεων $f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{C}$ με νόρμα

$$\|f\|_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{it})| dt$$

γίνεται μεταθετική άλγεβρα Banach χωρίς μονάδα αν εφοδιασθεί με την συνέλιξη
$$(f*g)(e^{it})=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(e^{is})g(e^{i(t-s)})ds.$$
Η απόδειξη αφήνεται ως άσκηση.

**Παρατήρηση** Γενικότερα αποδεικνύεται ότι, αν $G$ είναι τοπικά συμπαγής ομάδα, ορίζεται η άλγεβρα Banach $L^1(G)$, οπου η ολοκλήρωση γίνεται ως προς το λεγόμενο μέτρο Haar. Η άλγεβρα αυτή είναι μεταθετική αν και μόνον αν η $G$ είναι αβελιανή, και έχει μονάδα αν και μόνον αν η τοπολογία της $G$ είναι η διακριτή. Η μελέτη της άλγεβρας αυτής αποτελεί αντικείμενο της λεγόμενης 'αφηρημένης αρμονικής ανάλυσης'.

## 2.8 Η άλγεβρα του Wiener $\mathcal{W}$ ή $A(\mathbb{T})$

Πρόκειται για το σύνολο $\mathcal{W}$ των συναρτήσεων $f$ της μορφής
$$f(t)=\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty}a_k e^{ikt}\quad t\in[0,2\pi]$$
όπου $\sum_k|a_k|<\infty$. Επειδή $|e^{ikt}|=1$ για κάθε $t\in[0,2\pi]$, η σειρά $\sum_k a_k e^{ikt}$ συγκλίνει απόλυτα και ομοιόμορφα ως προς $t$, άρα ορίζει συνεχή συνάρτηση, δηλαδή ο χώρος $\mathcal{W}$ είναι υπόχωρος του χώρου Banach $C([0,2\pi])$. Δεν είναι όμως κλειστός ως προς την νόρμα $\|.\|_\infty$ (άσκηση).

Δεν είναι αμέσως φανερό ότι ο $\mathcal{W}$ είναι κλειστός ως προς το κατά σημείο γινόμενο, ότι είναι δηλαδή υπάλγεβρα της $C([0,2\pi])$. Αυτό αποδεικνύεται ως εξής: Αν $f(t)=\sum_k a_k e^{ikt}$ και $g(t)=\sum_k b_k e^{ikt}$ είναι δύο στοιχεία του $\mathcal{W}$, τότε
$$\begin{aligned}f(t)g(t)&=\left(\sum_k a_k e^{ikt}\right)\left(\sum_n b_n e^{int}\right)=\sum_k\sum_n a_k b_n e^{i(k+n)t}\\&=\sum_k\sum_m a_k b_{m-k}e^{imt}=\sum_m(\sum_k a_k b_{m-k})e^{imt}=\sum_m(a*b)_m e^{imt}\end{aligned}$$
(η εναλλαγή των αθροίσεων είναι επιτρεπτή λόγω απόλυτης αθροισιμότητας).

Επειδή, όπως δείξαμε στο Παράδειγμα 2.6, η ακολουθία $((a*b)_m)$ είναι απόλυτα αθροίσιμη, έπεται ότι το (κατά σημείο) γινόμενο $fg$ ανήκει στο $\mathcal{W}$.

**Σημείωση.** Το γεγονός ότι και το *πηλίκο* $f/g$, όταν ορίζεται, ανήκει στην $\mathcal{W}$, αποδείχθηκε πρώτα από τον N. Wiener. Μία πολύ πιο άμεση απόδειξη, που δόθηκε από τον I. Gelfand, αποτέλεσε μία από τις πρώτες επιτυχίες της (νέας τότε) θεωρίας των αλγεβρών Banach.

Οι συντελεστές $a_k$ της σειράς καθορίζονται μοναδικά από την $f$, γιατί

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt = \sum_k a_k \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-i(n-k)t}dt = a_n$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ (χρησιμοποίησα την ομοιόμορφη σύγκλιση της σειράς). Οι συντελεστές αυτοί λέγονται **συντελεστές Fourier** της $f$ και συμβολίζονται $\widehat{f}(n)$.

Επομένως η απεικόνιση

$$\mathcal{W} \longrightarrow \ell^1(\mathbb{Z}) : f \longrightarrow \widehat{f} \equiv (\widehat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}}$$

(ο ‘μετασχηματισμός Fourier’) είναι 1-1 και επί. Είναι προφανώς γραμμική, και δείξαμε προηγουμένως ότι είναι μορφισμός, δηλαδή ότι $\widehat{f.g} = \widehat{f} * \widehat{g}$.

Αν λοιπόν εφοδιάσουμε την $\mathcal{W}$ με την νόρμα $\|.\|_w$ όπου

$$\|f\|_w = \sum_k |\widehat{f}(k)|,$$

τότε η $(\mathcal{W}, \|.\|_w, \cdot)$ γίνεται ισομετρικά ισόμορφη με την $(\ell^1(\mathbb{Z}), \|.\|_1, *)$, και επομένως γίνεται άλγεβρα Banach.

## 2.9 Η άλγεβρα $\mathcal{B}(X)$ των τελεστών σ’ ένα χώρο Banach $X$.

Είναι γνωστό ότι το σύνολο

$$\mathcal{B}(X) = \{T \in \mathcal{L}(X) : T \text{ συνεχής}\}$$

των γραμμικών και φραγμένων απεικονίσεων $T : X \longrightarrow X$ αποτελεί χώρο Banach αν εφοδιασθεί με την νόρμα

$$\|T\| = \sup\{\|T\xi\| : \xi \in X, \|\xi\| \leq 1\}.$$

Επίσης είναι υπάλγεβρα της άλγεβρας $\mathcal{L}(X)$ όλων των γραμμικών απεικονίσεων του $X$ στον εαυτό του, και ικανοποιεί την ανισότητα (1). Πράγματι, αν $T, S \in \mathcal{B}(X)$ τότε για κάθε $\xi \in X$ έχουμε

$$\|(T \circ S)(\xi)\| = \|T(S(\xi))\| \leq \|T\|.\|S(\xi)\| \leq \|T\|.\|S\|.\|\xi\|$$

επομένως η γραμμική απεικόνιση $T \circ S$ είναι φραγμένη και μάλιστα, παίρνοντας supremum ως προς $\xi$ στην μοναδιαία σφαίρα του $X$ στην προηγούμενη ανισότητα προκύπτει ότι

$$\|T \circ S\| \leq \|T\|\|S\|$$

πράγμα που δείχνει ότι η άλγεβρα $(\mathcal{B}(X), \|.\|, \circ)$ είναι άλγεβρα Banach.

Η άλγεβρα αυτή έχει μονάδα, τον ταυτοτικό τελεστή $I$, αλλά δεν είναι ποτέ μεταθετική, εκτός αν $\dim X = 1$. Πράγματι, αν ο $X$ είναι μονοδιάστατος, τότε κάθε γραμμική απεικόνιση στον $X$ αντιστοιχεί σε έναν μιγαδικό αριθμό, επομένως η $\mathcal{B}(X)$ είναι ισόμορφη με το $\mathbb{C}$, άρα μεταθετική. Για το αντίστροφο, υποθέτουμε ότι η διάσταση του $X$ είναι τουλάχιστον 2, και επιλέγουμε δύο γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα $\xi, \eta$ στον $X$. Από το Θεώρημα Hahn-Banach υπάρχουν $\xi^*, \eta^* \in X^*$ με $\xi^*(\xi) = 1,\ \xi^*(\zeta) = 0$ για κάθε $\zeta \notin [\xi]$ και $\eta^*(\eta) = 1,\ \eta^*(\zeta) = 0$ για κάθε $\zeta \notin [\eta]$. Αν ορίσω $T(\zeta) = \xi^*(\zeta)\eta$ και $S(\zeta) = \eta^*(\zeta)\xi$, οι τελεστές $T, S$ είναι φραγμένοι και $T(S(\eta)) = \eta$ ενώ $S(T(\eta)) = 0$.

**Παρατήρηση.** Μέσω των τελεστών $T, S, TS$ και $ST$ μπορεί κανείς να δει ότι ορίζεται μια αλγεβρική εμφύτευση της άλγεβρας $M_2(\mathbb{C})$ των $2 \times 2$ μιγαδικών πινάκων στην $\mathcal{B}(X)$. Με την ίδια μέθοδο μπορεί κανείς να δείξει ότι, αν $\dim(X) \geq n$, τότε η άλγεβρα $M_n(\mathbb{C})$ εμφυτεύεται ισομορφικά στην $\mathcal{B}(X)$.

# 3

## 3.1 Κάθε άλγεβρα Banach δρα σε χώρο Banach

Κάθε κλειστή υπάλγεβρα της άλγεβρας Banach $\mathcal{B}(X)$ των φραγμένων τελεστών σ'έναν χώρο Banach $X$ είναι άλγεβρα Banach. Θα δείξουμε ότι, αντίστροφα, κάθε άλγεβρα Banach μπορεί να "αναπαρασταθεί" σ'αυτήν την μορφή.

**Ορισμός 3.1** *Έστω $\mathcal{A}$ άλγεβρα Banach. Μία* **αναπαράσταση** *ή* **παράσταση** $\pi$ *της $\mathcal{A}$ σ'έναν χώρο Banach $X$ είναι ένας μορφισμός $\pi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}(X)$ (δηλαδή μία απεικόνιση που διατηρεί αθροίσματα και γινόμενα). Αν η $\mathcal{A}$ έχει μονάδα, συνήθως απαιτούμε $\pi(1) = I$. Μία αναπαράσταση ονομάζεται* **πιστή** *αν είναι 1-1.*

**Θεώρημα 3.1** *Κάθε άλγεβρα Banach δέχεται μία ισομετρική (άρα πιστή) αναπαράσταση σε κάποιον χώρο Banach.*

**Απόδειξη** Θέτω $X = \mathcal{A} \oplus \mathbb{C}$ και $\|(x, \lambda)\| = \|x\| + |\lambda|$. Είναι εύκολο να δείξει κανείς ότι ο $(X, \|.\|)$ είναι χώρος Banach. Αν $x \in \mathcal{A}$ ορίζω τον τελεστή $\pi(x)$ :

$X \longrightarrow X$ από την σχέση

$$\pi(x)(y,\lambda) = (xy + x\lambda, 0).$$

Είναι φανερό ότι η απεικόνιση $\pi(x)$ είναι γραμμική, και είναι φραγμένη γιατί

$$\begin{aligned}\|\pi(x)(y,\lambda)\| &= \|(xy + x\lambda, 0)\| = \|xy + x\lambda\| \leq \|xy\| + \|x\lambda\| \\ &\leq \|x\|(\|y\| + |\lambda|) = \|x\|\|(y,\lambda)\|.\end{aligned}$$

Επομένως έχουμε ορίσει μία απεικόνιση

$$\pi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}(X) : x \longrightarrow \pi(x).$$

Η επιμεριστική ιδιότητα δείχνει ότι $\pi(x+y) = \pi(x) + \pi(y)$ και η προσεταιριστική δείχνει ότι $\pi(xy) = \pi(x) \circ \pi(y)$ για κάθε $x, y \in \mathcal{A}$. Η $\pi$ είναι δηλαδή μορφισμός, και η προηγούμενη ανισότητα δείχνει ότι $\|\pi(x)\| \leq \|x\|$. Επιπλέον όμως έχουμε $\|\pi(x)(0,1)\| = \|(x,0)\| = \|x\|$, άρα τελικά

$$\|\pi(x)\| = \|x\|.$$

Επομένως η $\pi$ είναι πράγματι μία ισομετρική παράσταση της $\mathcal{A}$ στον X. $\square$

**Παρατήρηση 1** Ο κλειστός υπόχωρος $X_1 = \{(x,0) : x \in \mathcal{A}\}$ του X είναι $\pi$-αναλλοίωτος, δηλαδή $\pi(x)(X_1) \subseteq X_1$ για κάθε $x \in \mathcal{A}$. Επομένως αν θέσουμε $\pi_1(x) = \pi(x)|X_1$, τότε $\pi_1(x) \in \mathcal{B}(X_1)$ και η απεικόνιση $\pi_1$ είναι μία παράσταση της $\mathcal{A}$ στον 'μικρότερο' χώρο Banach $X_1$. Αν η $\mathcal{A}$ έχει μονάδα, τότε και η $\pi_1$ είναι ισομετρική (άρα πιστή). Αν όμως η $\mathcal{A}$ δεν έχει μονάδα, είναι δυνατόν η $\pi_1$ να μην είναι πιστή (π.χ. όταν $xy = 0$ για κάθε $y \in \mathcal{A}$, τότε $\pi_1(x) = 0$).

**Παρατήρηση 2** Η παράσταση που κατασκευάσθηκε στην απόδειξη του Θεωρήματος δεν είναι ποτέ επί της $\mathcal{B}(X)$ (εκτός από την τετριμμένη περίπτωση $\mathcal{A} = \mathbb{C}$). Στην περίπτωση $X = \mathcal{A} \oplus \mathbb{C}$, αυτό φαίνεται αμέσως από το γεγονός ότι $\pi(x)(X) \subseteq X_1$ για κάθε $x \in \mathcal{A}$. Αλλά και στην περίπτωση της $\pi_1$, μπορεί κανείς πάντα να βρεί κατάλληλα $x \in \mathcal{A}, y^* \in \mathcal{A}^*$ ώστε ο τελεστής $T \in \mathcal{B}(X_1)$ όπου $T(z) = y^*(z)x \ (z \in \mathcal{A})$ να μην είναι της μορφής $T(z) = \pi_1(w)z$ για κάποιο $w \in \mathcal{A}$ (άσκηση).

Ειδικότερα αν $\mathcal{A} = M_n(\mathbb{C}) = \mathcal{B}(\mathbb{C}^n)$, ο χώρος $\mathcal{B}(\mathrm{X}_1)$ έχει διάσταση $n^4$, ενώ η $\mathcal{A}$ έχει διάσταση $n^2$.

Οι παρατηρήσεις αυτές δείχνουν ότι ο χώρος $X$ που επιλέξαμε είναι εν γένει πολύ "μεγάλος". Ετσι το Θεώρημα έχει περισσότερο θεωρητική αξία παρά πρακτική χρησιμότητα. Αν δοθεί μία συγκεκριμένη άλγεβρα, ενδιαφέρεται κανείς πολλές φορές να βρεί τον "μικρότερο" χώρο όπου μπορεί αυτή να δράσει (στο τελευταίο παράδειγμα ο χώρος αυτός είναι προφανώς ο $\mathbb{C}^n$ και όχι ο $\mathcal{B}(\mathbb{C}^n)$).

## 3.2 Η μοναδοποίηση

Όπως θα δούμε στη συνέχεια, η μονάδα σε μία άλγεβρα Banach παίζει πολύ σημαντικό ρόλο. Υπάρχουν όμως πολύ ενδιαφέρουσες άλγεβρες που δεν έχουν μονάδα. Μία απλή κατασκευή επιτρέπει πάντα να 'επισυνάπτουμε' μονάδα σε μία άλγεβρα. Η διαδικασία αυτή επιτρέπει πολλές φορές (αλλά όχι πάντα) την αναγωγή των προβλημάτων που αφορούν άλγεβρες χωρίς μονάδα σε προβλήματα αλγεβρών με μονάδα.

Αν $\mathcal{A}$ είναι μία άλγεβρα, ορίζουμε $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A} \oplus \mathbb{C}$. Ο χώρος $\mathcal{A}_1$ γίνεται άλγεβρα αν ορίσουμε

$$(x,\lambda)(y,\mu) = (xy + \lambda y + \mu x, \lambda\mu) \quad x, y \in \mathcal{A},\ \lambda, \mu \in \mathbb{C}.$$

Η $\mathcal{A}_1$ έχει μονάδα το στοιχείο $(0,1)$. Ελέγχεται άμεσα ότι το σύνολο $\{(x,0) : x \in \mathcal{A}\}$ είναι γνήσιο ιδεώδες της $\mathcal{A}_1$, και μάλιστα μεγιστικό (δηλ. δεν υπάρχει άλλο γνήσιο ιδεώδες της $\mathcal{A}_1$ που να το περιέχει), αφού έχει συνδιάσταση 1. Το ιδεώδες αυτό είναι ισόμορφο, ως άλγεβρα, με την $\mathcal{A}$. (Σημείωσε ότι, ακόμα και αν η $\mathcal{A}$ έχει ήδη μονάδα $\mathbf{1}$, η $\mathcal{A}$ είναι γνήσιο υποσύνολο της $\mathcal{A}_1$, και το στοιχείο $(1,0)$ *δεν είναι μονάδα της* $\mathcal{A}_1$).

Ορίζουμε μία νόρμα $\|\cdot\|_1$ στην $\mathcal{A}_1$ από τον τύπο

$$\|(x,\lambda)\|_1 = \|x\| + |\lambda|.$$

Όπως είδαμε και στην παράγραφο 3.1, η $\|\cdot\|_1$ είναι πλήρης νόρμα στην $\mathcal{A}_1$. Εξάλλου έχουμε

$$\begin{aligned}
\|(x,\lambda).(y,\mu)\|_1 &= \|(xy + \lambda y + \mu x, \lambda\mu)\|_1 = \|xy + \lambda y + \mu x\| + |\lambda\mu| \\
&\leq \|x\|\|y\| + |\lambda|\|y\| + |\mu|\|x\| + |\lambda||\mu| \\
&= (\|x\| + |\lambda|)(\|y\| + |\mu|) = \|(x,\lambda)\|_1 \|(y,\mu)\|_1,
\end{aligned}$$

επομένως η $(\mathcal{A}_1, \|\cdot\|_1)$ είναι άλγεβρα Banach. Τέλος, επειδή $\|(x,0)\| = \|x\|$ όταν $x \in \mathcal{A}$, η εμφύτευση της $\mathcal{A}$ στην $\mathcal{A}_1$ είναι ισομετρική.

Δείξαμε λοιπόν ότι

**Πρόταση 3.2** *Κάθε άλγεβρα Banach $\mathcal{A}$ εμφυτεύεται ισομορφικά και ισομετρικά ως μεγιστικό ιδεώδες σε μία άλγεβρα Banach $\mathcal{A}_1$ με μονάδα. Η $\mathcal{A}_1$ λέγεται η* μοναδοποίηση *της $\mathcal{A}$.*

**Παρατήρηση** Η επιλογή της νόρμας στην $\mathcal{A}_1$ δεν είναι μοναδική. Παραδείγματος χάριν:

**Πρόταση 3.3** *Αν η $\mathcal{A}$ δεν έχει μονάδα και $\pi$ είναι μία ισομετρική παράσταση της $\mathcal{A}$ σε κάποιον χώρο Banach X, τότε η $\mathcal{A}_1$ είναι ισόμορφη, ως άλγεβρα, με την υπάλγεβρα $\mathcal{B} := \pi(\mathcal{A}) + \mathbb{C}I$ της $\mathcal{B}(X)$, μέσω της απεικόνισης*

$$(x, \lambda) \longrightarrow \pi(x) + \lambda I.$$

*Αν λοιπόν "μεταφέρουμε" την νόρμα της $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}(X)$ στην $\mathcal{A}_1$, θέτοντας*

$$\|(x, \lambda)\|_\pi := \|\pi(x) + \lambda I\|$$

*τότε η $\|\cdot\|_\pi$ είναι μία νέα νόρμα στην $\mathcal{A}_1$ η οποία είναι ισοδύναμη με την $\|\cdot\|_1$.*

**Απόδειξη** Ο $\pi(\mathcal{A})$ είναι πλήρης, άρα κλειστός υπόχωρος του $\mathcal{B}(X)$ και $I \notin \pi(\mathcal{A})$. Αν ονομάσουμε $\delta$ την (θετική) απόσταση του I από τον $\pi(\mathcal{A})$, παρατηρούμε ότι

$$\|\pi(x) + \lambda I\| \geq |\lambda|\delta \quad \text{για κάθε } (x, \lambda). \tag{*}$$

Επομένως αν $\pi(x) + \lambda I = 0$ τότε $\lambda = 0$ και συνεπώς $\pi(x) = 0$ άρα $x = 0$. Αυτό δείχνει ότι η $\|\cdot\|_\pi$ είναι πράγματι νόρμα στην $\mathcal{A}_1$.

Επίσης, αν μια ακολουθία $(y_n)$ (όπου $y_n = (x_n, \lambda_n)$) συγκλίνει ως προς την $\|\cdot\|_\pi$, τότε από την ανισότητα (*) προκύπτει ότι η $(\lambda_n)$ είναι βασική (στο $\mathbb{C}$), άρα και η $(\pi(x_n)) = (\pi(y_n) - \lambda_n I)$ είναι βασική στην $\mathcal{B}(X)$, και συνεπώς η $(x_n)$ (είναι βασική, άρα) συγκλίνει στην $\mathcal{A}$ (αφού η $\pi$ είναι ισομετρία), άρα τελικά η $(y_n)$ συγκλίνει ως προς την $\|\cdot\|_1$.

Αντίστροφα, αν μια ακολουθία $(y_n)$ συγκλίνει ως προς την $\|\cdot\|_1$, τότε συγκλίνει και ως προς την $\|\cdot\|_\pi$, όπως προκύπτει από την ανισότητα

$$\|\pi(x) + \lambda I\| \leq \|\pi(x)\| + |\lambda| = \|x\| + |\lambda| = \|(x, \lambda)\|_1 .$$

Συνεπώς οι δύο νόρμες $\|\cdot\|_\pi$ και $\|\cdot\|_1$ στην $\mathcal{A}_1$ είναι ισοδύναμες. □

Στην περίπτωση που η $\pi$ είναι η παράσταση που κατασκευάσθηκε στην παράγραφο 3.1, η νόρμα $\|\cdot\|_\pi$ είναι στην πραγματικότητα ίση με την $\|\cdot\|_1$. Υπάρχουν όμως περιπτώσεις, όπως θα δούμε αργότερα, όπου άλλες επιλογές της $\|\cdot\|_\pi$ είναι πιό χρήσιμες. Παραδείγματος χάριν, αν η $\mathcal{A}$ είναι άλγεβρα τελεστών, τότε η φυσιολογική επιλογή νόρμας στην μοναδοποίηση είναι η $\|\cdot\|_\pi$ όπου $\pi$ η ταυτοτική παράσταση της $\mathcal{A}$.

# 4 Η ομάδα των αντιστρεψίμων στοιχείων

Έστω $\mathcal{A}$ άλγεβρα με μονάδα $\mathbf{1}$. Ένα στοιχείο $x \in \mathcal{A}$ λέγεται **αντιστρέψιμο** αν υπάρχει $y \in \mathcal{A}$ ώστε $xy = 1 = yx$ (και οι δύο ισότητες είναι αναγκαίες). Το $y$, αν υπάρχει, είναι μοναδικό και συμβολίζεται $x^{-1}$. Το σύνολο των αντιστρεψίμων στοιχείων της $\mathcal{A}$ είναι (εν γένει μη αβελιανή) ομάδα (ως προς το γινόμενο) και συμβολίζεται $\mathrm{Inv}(\mathcal{A})$.

Στόχος αυτής της παραγράφου είναι να αποδείξουμε ότι το σύνολο των αντιστρεψίμων στοιχείων μίας άλγεβρας Banach $\mathcal{A}$ με μονάδα είναι *ανοικτό* υποσύνολο της $\mathcal{A}$ και ότι αποτελεί τοπολογική ομάδα (στην τοπολογία της νόρμας).

Το απλό αλλά θεμελιώδες Λήμμα 4.1 που ακολουθεί δείχνει ότι, σε μία άλγεβρα Banach, κάθε γεωμετρική σειρά, με 'λόγο' μικρότερο από ένα, συγκλίνει. Η απόδειξη χρησιμοποιεί την έννοια της απόλυτης σύγκλισης. Θυμίζω ότι μία σειρά $\sum x_n$ σ'έναν χώρο Banach συγκλίνει απόλυτα εξ ορισμού όταν η σειρά μη αρνητικών αριθμών $\sum \|x_n\|$ συγκλίνει. Μιά απλή εφαρμογή της πληρότητας δείχνει ότι, αν μία σειρά συγκλίνει απόλυτα, τότε συγκλίνει.

**Λήμμα 4.1** *Αν $x \in \mathcal{A}$ και $\|x\| < 1$ τότε το $(1-x)^{-1}$ υπάρχει.*

**Απόδειξη** Εφ'όσον $\|x^n\| \leq \|x\|^n$ και $\|x\| < 1$, είναι σαφές ότι η σειρά $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ συγκλίνει απόλυτα. Έστω $y$ το άθροισμά της. Παρατηρούμε ότι

$$\mathbf{1}-x^{n+1} = (\mathbf{1}-x)(\mathbf{1}+x+x^2+x^3+...+x^n) = (\mathbf{1}+x+x^2+x^3+...+x^n)(\mathbf{1}-x)\,.$$

Καθώς $n \to \infty$, έχουμε $x^{n+1} \to 0$ επομένως

$$1 = (1-x)y = y(1-x)$$

πράγμα που δείχνει ότι το $y$ είναι το αντίστροφο του $1-x$. $\square$

Το Λήμμα πολλές φορές διατυπώνεται ισοδύναμα ως εξής:

"Αν $\|1-a\| < 1$ τότε το $a^{-1}$ υπάρχει."

**Θεώρημα 4.2** *Εστω $\mathrm{Inv}(\mathcal{A})$ το σύνολο των αντιστρέψιμων στοιχείων μιάς άλγεβρας Banach $\mathcal{A}$. Τότε*

*(i) το σύνολο $\mathrm{Inv}(\mathcal{A})$ είναι ανοικτό,*

*(ii) η απεικόνιση $b \mapsto b^{-1} : \mathrm{Inv}(\mathcal{A}) \to \mathrm{Inv}(\mathcal{A})$ είναι συνεχής (άρα ομοιομορφισμός).*

**Απόδειξη** (i) Πρέπει να δείξουμε ότι αν $a \in \text{Inv}(\mathcal{A})$ τότε, για κάθε $x$ με αρκετά μικρή νόρμα, ισχύει $a + x \in \text{Inv}(\mathcal{A})$. Γράφουμε $a + x = a(1 + a^{-1}x)$. Από το Λήμμα 4.1, αν $\|a^{-1}x\| < 1$ τότε το $(1 + a^{-1}x)$ είναι αντιστρέψιμο, άρα και το $a + x$ είναι αντιστρέψιμο. Επομένως αν $\|x\| < 1/\|a^{-1}\|$ τότε $a + x \in \text{Inv}(\mathcal{A})$ και συνεπώς η ανοικτή μπάλα με κέντρο $a$ και ακτίνα $\|a^{-1}\|^{-1}$ περιέχεται στο $\text{Inv}(\mathcal{A})$.

(ii) Αυτό είναι άμεσο από το επόμενο Λήμμα

**Λήμμα 4.3** *Αν $b \in \text{Inv}(\mathcal{A})$, $y \in \mathcal{A}$ και $\|y\| < (2\|b^{-1}\|)^{-1}$, τότε $b - y \in \text{Inv}(\mathcal{A})$ και*

$$\|(b - y)^{-1} - b^{-1}\| < 2\|b^{-1}\|^2.\|y\|$$

**Απόδειξη** Επειδή $\|yb^{-1}\| \leq \|y\|\|b^{-1}\| < 1$ το $1 - yb^{-1}$ είναι αντιστρέψιμο, άρα και το $b - y = (1 - yb^{-1})b$ είναι αντιστρέψιμο. Έχουμε

$$(b - y)^{-1} - b^{-1} = b^{-1}((1 - yb^{-1})^{-1} - 1)$$

Αλλά

$$(1 - yb^{-1})^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(yb^{-1})^n$$

άρα

$$(b - y)^{-1} - b^{-1} = b^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}(yb^{-1})^n$$

επομένως

$$\|(b - y)^{-1} - b^{-1}\| \leq \|b^{-1}\|\sum_{n=1}^{\infty}\|yb^{-1}\|^n = \|b^{-1}\|\frac{\|yb^{-1}\|}{1 - \|yb^{-1}\|} < 2\|b^{-1}\|\|yb^{-1}\|$$

γιατί $1 - \|yb^{-1}\| > \frac{1}{2}$. □

# 5 Το φάσμα

## 5.1 Ορισμοί και βασικές ιδιότητες

Αν $T$ είναι γραμμικός τελεστής σ'έναν γραμμικό χώρο $X$ πεπερασμένης διάστασης, τότε το σύνολο $\sigma(T) \equiv \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \notin \text{Inv}(\mathcal{B}(X))\}$ είναι το σύνολο των ιδιοτιμών του $T$, δηλαδή το σύνολο των ριζών του *χαρακτηριστικού πολυωνύμου* $\det(\lambda I - T)$ του $T$. Επειδή ο χώρος $X$ είναι, όπως έχουμε εξ αρχής υποθέσει, *μιγαδικός*, έπεται από το *θεμελιώδες θεώρημα της άλγεβρας* ότι το $\sigma(T)$ δεν είναι κενό.

Οι συλλογισμοί αυτοί δεν γενικεύονται άμεσα σε απειροδιάστατους χώρους. Πρώτα-πρώτα, η "ορίζουσα" ενός τελεστή δεν έχει έννοια εν γένει. Επίσης όμως, το σύνολο των ιδιοτιμών ενός τελεστή μπορεί να είναι κενό:

**Παράδειγμα** Αν $X$ είναι ο χώρος Banach $C([0,1])$ και $M$ είναι ο τελεστής που ορίζεται από την σχέση $(Mf)(t) = tf(t), \ f \in X$, τότε ο $M$ είναι φραγμένος τελεστής και δεν έχει ιδιοτιμές. Αν όμως ορίσουμε

$$\sigma(M) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - M \notin \text{Inv}(\mathcal{B}(X))\}$$

τότε το $\sigma(M)$ δεν είναι κενό (μάλιστα ισούται με το συμπαγές $[0,1]$).

(Οι αποδείξεις των ισχυρισμών αυτών αφήνονται στον αναγνώστη.)

Θα δείξουμε ότι το φάσμα $\sigma(T)$ κάθε φραγμένου τελεστή $T$ σ'έναν χώρο Banach είναι πάντα μη κενό συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{C}$.

**Ορισμός 5.1** *Έστω $\mathcal{A}$ άλγεβρα Banach με μονάδα και $x \in \mathcal{A}$. Το* **φάσμα** $\sigma(x)$ *του $x$ είναι το σύνολο*

$$\sigma(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda 1 - x \notin \text{Inv}(\mathcal{A})\}.$$

*Αν η $\mathcal{A}$ δεν έχει μονάδα, τότε το $\sigma(x)$ ορίζεται στην μοναδοποίηση*

$$\sigma(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda 1 - x \notin \text{Inv}(\mathcal{A}^+)\}.$$

**Παρατήρηση** Αν $\mathcal{A}$ είναι άλγεβρα Banach χωρίς μονάδα και $x \in \mathcal{A}$, τότε $0 \in \sigma(x)$ (γιατί;).

**Θεώρημα 5.1** *Το φάσμα κάθε στοιχείου $a$ της $\mathcal{A}$ είναι μη κενό συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{C}$.*

**Απόδειξη** Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι η $\mathcal{A}$ έχει μονάδα.

Δείχνουμε πρώτα ότι το $\sigma(a)$ είναι φραγμένο. Πράγματι, αν $|\lambda| > \|a\|$ τότε $\|\lambda^{-1}a\| < 1$ άρα από το Λήμμα 4.1 το $\lambda 1 - a = \lambda(1 - \lambda^{-1}a)$ έχει αντίστροφο. Επομένως το $\sigma(a)$ περιέχεται στην κλειστή μπάλα με κέντρο 0 και ακτίνα $\|a\|$.

Δείχνουμε τώρα ότι το συμπλήρωμά του $\sigma(a)$ είναι ανοικτό. Αν $\lambda \notin \sigma(a)$ τότε $\lambda 1 - a \in \text{Inv}(\mathcal{A})$. Αλλά το $\text{Inv}(\mathcal{A})$ είναι ανοικτό (4.2), επομένως υπάρχει $\epsilon > 0$

ώστε κάθε $b \in \mathcal{A}$ με $\|b-(\lambda 1-a)\| < \epsilon$ να ανήκει στο Inv$(\mathcal{A})$. Άρα αν $|\mu-\lambda| < \epsilon$ τότε $\mu 1 - a \in \text{Inv}(\mathcal{A})$ οπότε $\mu \notin \sigma(a)$. (Άλλη απόδειξη: το $\mathbb{C}\backslash\sigma(a)$ είναι ανοικτό γιατί είναι η αντίστροφη εικόνα του ανοικτού συνόλου Inv$(\mathcal{A})$ μέσω της συνεχούς συνάρτησης $\lambda \mapsto \lambda 1 - a$.)

Για να δείξουμε ότι $\sigma(a) \neq \emptyset$ παρατηρούμε πρώτα ότι αν $\lambda, \mu \notin \sigma(a)$ τότε

$$(\lambda 1 - a)^{-1} - (\mu 1 - a)^{-1} = (\mu - \lambda)(\lambda 1 - a)^{-1}(\mu 1 - a)^{-1}$$

(πολλαπλασίασε και τα δύο μέλη της ισότητας με $(\lambda 1 - a)(\mu 1 - a)$, παρατηρώντας ότι όλοι οι όροι μετατίθενται).[3]

Έστω τώρα $\phi \in \mathcal{A}^*$ (ο δυικός του χώρου Banach $\mathcal{A}$).
Θέτουμε $f(\lambda) = \phi[(\lambda 1 - a)^{-1}]$.
Η $f$ ορίζεται και είναι ολόμορφη στο ανοικτό σύνολο $\mathbb{C}\backslash\sigma(a)$ γιατί το όριο

$$\begin{aligned} f'(\lambda) &= \lim_{\mu\to\lambda} \frac{f(\mu)-f(\lambda)}{\mu-\lambda} \\ &= \lim_{\mu\to\lambda} \phi\left(\frac{(\mu 1 - a)^{-1} - (\lambda 1 - a)^{-1}}{\mu-\lambda}\right) \\ &= \lim_{\mu\to\lambda} \phi\left(-(\lambda 1 - a)^{-1}(\mu 1 - a)^{-1}\right) \\ &= -\phi(\lambda 1 - a)^{-2}) \end{aligned}$$

υπάρχει. Παρατήρησε ότι εδώ (και παρακάτω) χρησιμοποιούμε την συνέχεια της αντιστροφής (Λήμμα 4.2 (ii)) καθώς και την συνέχεια της $\phi$ .

Αν το $\sigma(a)$ ήταν κενό, η $f$ θα ήταν ακέραια. Εξάλλου

$$\lim_{|\lambda|\to\infty} |f(\lambda)| = \lim_{|\lambda|\to\infty} \frac{1}{|\lambda|}\phi\left[\left(1-\frac{a}{\lambda}\right)^{-1}\right] = 0\,.$$

Επομένως η $f$ θα ήταν ακέραια και φραγμένη, άρα σταθερή από το θεώρημα του Liouville ([8], 5.13). Εφόσον μάλιστα έχει όριο 0 καθώς $|\lambda| \to \infty$ θα έπρεπε να μηδενίζεται παντού. Από το Θεώρημα Hahn-Banach όμως υπάρχει $\phi$ ώστε $\phi(-a^{-1}) \neq 0$, δηλαδή $f(0) \neq 0$, άτοπο. □

Σημείωσε ότι στην απόδειξη χρησιμοποιήθηκε κατά ουσιώδη τρόπο η υπόθεση ότι η $\mathcal{A}$ είναι *μιγαδική* άλγεβρα.

**Θεώρημα 5.2 (Gelfand-Mazur)** *Κάθε μιγαδική διαιρετική άλγεβρα Banach είναι ισομετρικά ισόμορφη με το* $\mathbb{C}$.

[3] η σχέση αυτή ονομάζεται **ταυτότητα του επιλύοντα (resolvent identity)**.

**Απόδειξη** Αν $a \in \mathcal{A}$, υπάρχει ένα $\lambda$ στο $\sigma(a)$. Αλλά σε μία διαιρετική άλγεβρα $\mathcal{A}$, κάθε μη μηδενικό στοιχείο είναι αντιστρέψιμο. Αφού το $\lambda 1 - a$ δεν είναι αντιστρέψιμο, θα ισούται με 0, δηλαδή $a = \lambda 1$. Επομένως η $\mathcal{A}$ αποτελείται από πολλαπλάσια της μονάδας. Είναι σαφές ότι

$$\|a\| = \|\lambda 1\| = |\lambda|$$

και η απεικόνιση $a \mapsto \lambda$ όπου $a = \lambda 1$ είναι ισομετρικός ισομορφισμός. $\square$

**Παρατήρηση** Η μεταθετικότητα της άλγεβρας δεν προϋποτίθεται, αλλά είναι ένα από τα συμπεράσματα του Θεωρήματος.

Η **φασματική ακτίνα** $\rho(a)$ ενός στοιχείου $a \in \mathcal{A}$ ορίζεται από τη σχέση

$$\rho(a) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(a)\}\,.$$

Επεται από την απόδειξη του Θεωρήματος 5.1 ότι

$$\rho(a) \leq \|a\|, \tag{2}$$

και η ανισότητα μπορεί να είναι γνήσια (π.χ. όταν $a^2 = 0$ τότε $\sigma(a) = \{0\}$, άρα $\rho(a) = 0$).

Το φάσμα, και επομένως η φασματική ακτίνα, ενός στοιχείου ορίζονται καθαρά αλγεβρικά. Το επόμενο θεώρημα εκφράζει την φασματική ακτίνα συναρτήσει της νόρμας, συνδέει δηλαδή μία καθαρά αλγεβρική ποσότητα με μία τοπολογική. Η έκφραση αυτή θυμίζει τον τύπο

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}} |a_n|^{\frac{1}{n}}$$

για την ακτίνα σύγκλισης $R$ της (αριθμητικής) δυναμοσειράς $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

**Θεώρημα 5.3** *Αν $\mathcal{A}$ είναι άλγεβρα Banach και $a \in \mathcal{A}$,*

$$\rho(a) = \lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} = \inf_n \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$$

**Απόδειξη** Επειδή πάντα ισχύει $\inf \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \underline{\lim} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \overline{\lim} \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$, αρκεί να δείξουμε ότι

$$(i)\ \ \rho(a) \leq \inf \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \quad \text{και ότι} \quad (ii)\ \ \overline{\lim} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \rho(a).$$

**(i)** Αν $\lambda \in \sigma(a)$ τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $\lambda^n \in \sigma(a^n)$ (δες το Λήμμα 5.4 που ακολουθεί) άρα $|\lambda|^n \leq \|a^n\|$ (Θεώρημα 5.1). Επομένως $|\lambda| \leq \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$. Παίρνοντας maximum ως προς $\lambda \in \sigma(a)$, έχουμε $\rho(a) \leq \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

**(ii)** Εστω $\phi \in \mathcal{A}^*$. Όπως στην απόδειξη του θεωρήματος 5.1, η συνάρτηση $h(\lambda) = \lambda\phi[(\lambda 1 - a)^{-1}]$ ορίζεται και είναι ολόμορφη στο $\mathbb{C} \backslash \sigma(a)$, άρα και στο $\{\lambda : |\lambda| > \rho(a)\}$. Επομένως η συνάρτηση

$$g(z) = h\left(\frac{1}{z}\right) = \phi((1 - za)^{-1})$$

ορίζεται και είναι ολόμορφη στο $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < \frac{1}{\rho(a)}\}$. [4] Επειδή το όριο $\lim\limits_{z\to 0} g(z) = g(0) \in \mathbb{C}$, (το 0 είναι επουσιώδης ανωμαλία για την $g$, άρα) η $g$ ορίζεται και είναι ολόμορφη στον δίσκο $\{z \in \mathbb{C} : |z| < \frac{1}{\rho(a)}\}$, επομένως αναπτύσσεται σε δυναμοσειρά

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \quad |z| < \frac{1}{\rho(a)}.$$

*Ισχυρίζομαι* ότι $c_n = \varphi(a^n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Πράγματι, για $|z| < \frac{1}{\|a\|}$ $(\leq \frac{1}{\rho(a)})$ ξέρουμε από το Λήμμα 4.1 ότι

$$(1 - za)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n a^n .$$

άρα, αφού η $\phi$ είναι γραμμική και συνεχής,

$$g(z) = \phi\left((1 - za)^{-1}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \phi(a^n), \quad |z| < \frac{1}{\|a\|}.$$

Ο Ισχυρισμός έπεται τώρα από την μοναδικότητα της δυναμοσειράς για την $g$.

Επομένως η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} z^n\phi(a^n)$ συγκλίνει (όχι μόνον όταν $|z| < \frac{1}{\|a\|}$ αλλά και) όταν $|z| < \frac{1}{\rho(a)}$. Κατά συνέπεια, για $|z| < \frac{1}{\rho(a)}$ έχουμε $\lim_{n\to\infty} z^n\phi(a^n) = 0$. Επομένως η ακολουθία αυτή είναι φραγμένη, δηλαδή για κάθε $\varphi \in \mathcal{A}^*$ υπάρχει $K_\phi(z) < +\infty$ ώστε

$$|\phi(z^n a^n)| < K_\phi(z) \qquad \text{για κάθε } n .$$

[4] Εδώ θέτουμε $\frac{1}{\rho(a)} = +\infty$ όταν $\rho(a) = 0$.

Από το Θεώρημα Ομοιομόρφου Φράγματος ([9], 3.42) συμπεραίνουμε ότι υπάρχει μια σταθερά $K(z)$ (ανεξάρτητη της $\phi$) τέτοια ώστε για κάθε $n$ να ισχύει $\|z^n a^n\| < K(z)$, δηλαδή

$$\|a^n\|^{\frac{1}{n}} < \frac{K(z)^{\frac{1}{n}}}{|z|} \quad \text{για κάθε } n, \text{ όταν } \ |z| < \frac{1}{\rho(a)}\,.$$

Επομένως $\overline{\lim}\|a^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{|z|}$ για κάθε $|z| < \frac{1}{\rho(a)}$, οπότε

$$\overline{\lim}\|a^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \rho(a)$$

και η απόδειξη είναι πλήρης. $\square$

**Παρατηρήσεις (i)** Η ύπαρξη του ορίου $\lim \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$ μπορεί να αποδειχθεί απευθείας από την ανισότητα $\|xy\| \leq \|x\|.\|y\|$ (άσκηση).

**(ii)** Το θεώρημα που αποδείξαμε ονομάζεται συχνά Θεώρημα Gelfand - Beurling. Ο A. Beurling φέρεται ότι ανακάλυψε πρώτος τον τύπο της φασματικής ακτίνας στην Αρμονική Ανάλυση, ενώ ο I. Gelfand είναι αυτός που έδωσε την απόδειξη στην γενική περίπτωση.

Για την περίπτωση της άλγεβρας Banach $L^1(\mathbb{T})$ ο τύπος της φασματικής ακτίνας ισοδυναμεί (όπως θα δούμε αργότερα) με την ισότητα

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f^{(*n)}(e^{it})|dt = \sup_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(k)|$$

όπου $f^{(*n)} = f * f * ... * f$ και

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{it})e^{-ikt}dt\,.$$

Στην απόδειξη του Θεωρήματος 5.3 χρησιμοποιήσαμε το

**Λήμμα 5.4** $\lambda \in \sigma(x) \Longrightarrow \lambda^n \in \sigma(x^n)$.

**Απόδειξη** Εστω ότι $\lambda^n \notin \sigma(x^n)$. Εχουμε τότε

$$(x^n - \lambda^n 1)^{-1}(x - \lambda 1)(x^{n-1} + x^{n-2}\lambda + ... + \lambda^{n-1}1) = 1$$

άρα, επειδή όλοι οι όροι μετατίθενται,

$$\begin{aligned} 1 &= [(x^n - \lambda^n 1)^{-1}(x^{n-1} + x^{n-2}\lambda + ... + \lambda^{n-1}1)](x - \lambda 1) \\ &= (x - \lambda 1)[(x^n - \lambda^n 1)^{-1}(x^{n-1} + x^{n-2}\lambda + ... + \lambda^{n-1}1)]. \end{aligned}$$

Η πρώτη ισότητα δείχνει ότι το $x - \lambda 1$ έχει αριστερά αντίστροφο και η δεύτερη ότι έχει δεξιά αντίστροφο. Συνεπώς $(x - \lambda 1) \in \text{Inv}(\mathcal{A})$ δηλαδή $\lambda \notin \sigma(x)$. $\square$

## 5.2 Εξάρτηση του φάσματος από την άλγεβρα

Έστω $\mathcal{A}$ άλγεβρα Banach με μονάδα και $\mathcal{B}$ κλειστή υπάλγεβρα της $\mathcal{A}$ με $1 \in \mathcal{B}$. Έστω $x \in \mathcal{B}$. Αν $x \in \text{Inv}(\mathcal{B})$, τότε βέβαια $x \in \text{Inv}(\mathcal{A})$. Το αντίστροφο όμως δεν ισχύει κατ'ανάγκην:

**Παράδειγμα** Έστω $\mathcal{A} = C(\mathbb{T}),\ \mathcal{B} = A(\mathbb{D})$ (Παράγραφος 2.5). Αν $x \in \mathcal{B}$ είναι η συνάρτηση $x(z) = z$ $(z \in \mathbb{T})$, τότε $x^{-1} \in \mathcal{A}$ αλλά $x^{-1} \notin \mathcal{B}$, γιατί η (συνεχής) συνάρτηση $z \longrightarrow z^{-1}$ $(z \in \mathbb{T})$ δεν δέχεται ολόμορφη επέκταση στον δίσκο.

Επομένως αν θέσουμε

$$\begin{aligned}\sigma_A(x) &= \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda 1 - x \notin \text{Inv}(\mathcal{A})\} \\ \sigma_B(x) &= \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda 1 - x \notin \text{Inv}(\mathcal{B})\}\end{aligned}$$

τότε από τα προηγούμενα είναι σαφές ότι, αν $x \in \mathcal{B}$,

$$\sigma_A(x) \subseteq \sigma_B(x)$$

και ότι εν γένει δεν ισχύει ισότητα. Δηλαδή καθώς η $\mathcal{B}$ "μικραίνει", το $\sigma_B(x)$ "μεγαλώνει". Ομως το $\sup\{|\lambda| : \lambda 1 - x \notin \text{Inv}(\mathcal{B})\}$ δεν μεταβάλλεται, γιατί (όπως φαίνεται από τον τύπο της φασματικής ακτίνας (5.3)) εξαρτάται μόνον από την $\|x\|$, και όχι από την $\mathcal{B}$. Θα δείξουμε μάλιστα ότι το $\sigma_B(x)$ προκύπτει από το $\sigma_A(x)$ "γεμίζοντας" κάποιες από τις "τρύπες" του $\sigma_A(x)$.

Θα χρειασθεί ένα τοπολογικό λήμμα. Θυμίζω ότι *(συνεκτική) συνιστώσα* σ' έναν τοπολογικό χώρο λέγεται ένα μεγιστικό συνεκτικό υποσύνολο του χώρου. Το σύνορο ενός υποσυνόλου $V$ συμβολίζεται $\partial V$.

**Λήμμα 5.5** *Έστω $X$ τοπολογικός χώρος, $V \subseteq W \subseteq X$ ανοικτά σύνολα ώστε $\partial V \cap W = \emptyset$. Τότε το $V$ είναι ένωση συνεκτικών συνιστωσών του $W$.*

**Απόδειξη** Θα δείξω ότι κάθε συνιστώσα $\Omega$ του $W$ που τέμνει το $V$ περιέχεται σ'αυτό. Πράγματι, αν $U = X \backslash \overline{V}$, τα $U, V$ είναι ξένα ανοικτά σύνολα και το $\Omega$ περιέχεται στην ένωσή τους, γιατί

$$\Omega \subseteq V \cup (X \backslash V) = V \cup (X \backslash \overline{V}) \cup \partial V = V \cup U \cup \partial V$$

αλλά $\Omega \subseteq W$, άρα $\Omega \cap \partial V = \emptyset$.

Αφού το $\Omega$ είναι συνεκτικό και $\Omega \cap V \neq \emptyset$, θα ισχύει ότι $\Omega \cap U = \emptyset$, άρα $\Omega \subseteq V$.

Επεται ότι

$$V = \bigcup \{\Omega \subseteq W \ \text{ συνεκτική συνιστώσα} : V \cap \Omega \neq \emptyset\}$$

γιατί κάθε $x \in V \subseteq W$ περέχεται σε μία συνιστώσα του $W$. $\square$

**Θεώρημα 5.6** *Έστω $\mathcal{A}$ άλγεβρα Banach με μονάδα και $\mathcal{B}$ κλειστή υπάλγεβρα της $\mathcal{A}$ με $1 \in \mathcal{B}$. Τότε*

*(i)* $\mathrm{Inv}(\mathcal{B}) = \bigcup\{U \subseteq (\mathcal{B} \cap \mathrm{Inv}(\mathcal{A}))$ *συνεκτική συνιστώσα* $: U \cap \mathrm{Inv}(\mathcal{B}) \neq \emptyset\}$.

*(ii) Αν $x \in \mathcal{B}$, τότε το $\sigma_B(x)$ είναι ένωση του $\sigma_A(x)$ και κάποιων από τις φραγμένες συνεκτικές συνιστώσες του $\mathbb{C}\backslash\sigma_A(x)$. Συγκεκριμένα, αν $\mathcal{C}$ είναι το σύνολο των συνεκτικών συνιστωσών του $\mathbb{C}\backslash\sigma_A(x)$, τότε*

$$\sigma_B(x) = \sigma_A(x) \cup \bigcup\{V \in \mathcal{C} : V \subseteq \sigma_B(x)\}.$$

**Απόδειξη (i)** Εφαρμόζουμε το Λήμμα στον τοπολογικό χώρο $X = \mathcal{B}$ για τα ανοικτά σύνολα $V = \mathrm{Inv}(\mathcal{B})$ και $W = \mathcal{B} \cap \mathrm{Inv}(\mathcal{A})$. Αρκεί να δείξουμε ότι $\partial V \cap W = \emptyset$.

Αν $y \in \partial V \cap W$, υπάρχουν $x_n \in V$ ώστε $\|x_n - y\| \to 0$. Επειδή $x_n \in \mathrm{Inv}(\mathcal{B}) \subseteq \mathrm{Inv}(\mathcal{A})$ και $y \in \mathrm{Inv}(\mathcal{A})$, έπεται από την συνέχεια της $a \to a^{-1}$ στο $\mathrm{Inv}(\mathcal{A})$ ότι $\|x_n^{-1} - y^{-1}\| \to 0$. Αυτό όμως αντιφάσκει με τον επόμενο ισχυρισμό:

*Ισχυρισμός* $\|x_n^{-1}\| \to \infty$.

*Απόδειξη* Αν όχι, η $(x_n^{-1})$ θα είχε μία φραγμένη υπακολουθία, έστω $(y_n^{-1})$. Υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $\|y_n - y\| < \frac{1}{M}$, όπου $\mathrm{M} = \sup \|y_n^{-1}\|$. Τότε όμως
$\|1 - y_n^{-1}y\| \leq \|y_n^{-1}\|.\|y_n - y\| < 1$, οπότε $y_n^{-1}y \in \mathrm{Inv}(\mathcal{B})$ (Λήμμα 4.1) άρα και $y \in \mathrm{Inv}(\mathcal{B}) = V$. Αυτό όμως αποκλείεται, γιατί $y \in \partial V$ ενώ το $V$ είναι ανοικτό. Ο Ισχυρισμός αποδείχθηκε.

**(ii)** Θέτουμε $\Omega_\mathrm{A} = \mathbb{C}\backslash\sigma_A(x)$, $\Omega_B = \mathbb{C}\backslash\sigma_B(x)$. Τα $\Omega_A, \Omega_\mathrm{B}$ είναι ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{C}$ και $\Omega_B \subseteq \Omega_A$. Επίσης $\partial\Omega_B \cap \Omega_A = \emptyset$ γιατί αν $\lambda \in \partial\Omega_B$ τότε $\lambda 1 - x \in \partial\mathrm{Inv}(\mathcal{B})$ οπότε, από την απόδειξη του (i), $\lambda 1 - x \notin \mathrm{Inv}(\mathcal{A})$ δηλαδή $\lambda \notin \Omega_A$.

Από το Λήμμα, το $\Omega_B$ θα είναι ένωση κάποιων από τις συνεκτικές συνιστώσες του $\Omega_A$:

$$\begin{aligned}\Omega_B &= \bigcup\{V \subseteq \Omega_A \text{ συνεκτική συνιστώσα} : V \cap \Omega_B \neq \emptyset\} \\ &= \bigcup\{V \in \mathcal{C} : V \cap \Omega_\mathrm{B} \neq \emptyset\}\end{aligned}$$

Συνεπώς το $\sigma_B(x)$ θα αποτελείται από το $\sigma_A(x)$ και τις υπόλοιπες συνεκτικές συνιστώσες του $\Omega_A$, εκείνες που δεν τέμνουν το $\Omega_\mathrm{B}$, δηλ. που περιέχονται στο $\sigma_B(x)$:

$$\begin{aligned}\sigma_B(x) &= \sigma_A(x) \cup (\sigma_B(x) \cap \Omega_A) \\ &= \sigma_A(x) \cup \bigcup\{V \in \mathcal{C} : V \subseteq \sigma_B(x)\}\end{aligned}$$

Παρατήρησε τέλος ότι στο $\sigma_B(x)$ περιέχονται μόνον φραγμένες συνιστώσες του $\Omega_{\mathrm{A}}$, γιατί, αφού το $\sigma_B(x)$ είναι φραγμένο, η (μοναδική) μη φραγμένη συνιστώσα του $\Omega_{\mathrm{A}}$ δεν μπορεί να περιέχεται στο $\sigma_B(x)$, συνεπώς περιέχεται στο $\Omega_{\mathrm{B}}$. $\square$

**Πόρισμα 5.7** *Αν $x \in \mathcal{B}$ και το $\sigma_A(x)$ δεν χωρίζει το επίπεδο (δηλαδή αν το $\mathbb{C}\backslash\sigma_A(x)$ είναι συνεκτικό), τότε $\sigma_B(x) = \sigma_A(x)$.*

**Απόδειξη** Στην περίπτωση αυτή το $\mathbb{C}\backslash\sigma_A(x)$ δεν έχει φραγμένες συνιστώσες, άρα δεν τέμνει το $\sigma_B(x)$. $\square$

**Πόρισμα 5.8** *Με τις υποθέσεις του θεωρήματος,*

$$\partial\sigma_B(x) \subseteq \sigma_A(x) \subseteq \sigma_B(x)\,.$$

**Απόδειξη** Οι συνιστώσες του ανοικτού συνόλου $\Omega_{\mathrm{A}} = \mathbb{C}\backslash\sigma_A(x)$ είναι ανοικτά σύνολα (γιατί αν $V \subseteq \Omega_A$ είναι συνιστώσα και $\lambda \in V$, διαλέγοντας $\varepsilon > 0$ ώστε $B(\lambda,\varepsilon) \subseteq \Omega_{\mathrm{A}}$ παρατηρούμε ότι το $V \cup B(\lambda,\varepsilon)$ είναι συνεκτικό και συνεπώς περιέχεται στο $V$). Επομένως η ένωση

$$\bigcup\{V \in \mathcal{C} :\ V \subseteq \sigma_B(x)\}$$

είναι ανοικτό υποσύνολο του $\sigma_B(x)$, άρα δεν τέμνει το σύνορο του. Αλλά

$$\bigcup\{V \in \mathcal{C} : V \subseteq \sigma_B(x)\} \cup \sigma_A(x) = \sigma_B(x)$$

από το Θεώρημα. Συνεπώς $\partial\sigma_B(x) \subseteq \sigma_A(x)$.

Ας δώσουμε και μία απευθείας απόδειξη του Πορίσματος:

Έστω $\lambda \in \partial\sigma_B(x)$. Τότε υπάρχει ακολουθία $(\lambda_n)$ στο $\mathbb{C}\backslash\sigma_B(x)$ ώστε $\lambda_n \to \lambda$. Αν $\lambda \notin \sigma_{\mathcal{A}}(x)$ τότε το $(\lambda 1 - x)^{-1}$ υπάρχει στην $\mathcal{A}$ οπότε, από τη συνέχεια της αντιστροφής (4.2(ii)), η ακολουθία $((\lambda_n 1 - x)^{-1})$ συγκλίνει στο $(\lambda 1 - x)^{-1}$ στην $\mathcal{A}$. Αυτό σημαίνει ότι η $((\lambda_n 1 - x)^{-1})$ είναι βασική ακολουθία στοιχείων της $\mathcal{B}$, άρα συγκλίνει στην $\mathcal{B}$ στο ίδιο όριο $(\lambda 1 - x)^{-1}$, πράγμα που αντιβαίνει στο γεγονός ότι $\lambda \in \sigma_B(x)$. $\square$

**Πόρισμα 5.9** *Αν $x \in \mathcal{B}$ και το $\sigma_B(x)$ έχει κενό εσωτερικό, τότε $\sigma_B(x) = \sigma_A(x)$.*

**Απόδειξη** Αν το $\sigma_B(b)$ έχει κενό εσωτερικό, τότε $\partial\sigma_B(b) = \sigma_B(b)$. $\square$

**Παρατήρηση** Έστω $\mathcal{B}$ άλγεβρα Banach με μονάδα και $x \in \mathcal{B}$. Αν το $\sigma_{\mathrm{B}}(x)$ δεν χωρίζει το επίπεδο, τότε το φάσμα του $x$ δεν "μεγαλώνει" καθώς "μικραίνει" η άλγεβρα ως προς την οποία υπολογίζεται ( 5.7). Αυτό συμβαίνει π.χ. όταν $\sigma_{\mathrm{B}}(x) \subseteq \mathbb{R}$ ή όταν $\sigma_{\mathrm{B}}(x) = \overline{B(0,1)} \cup \overline{B(3,1)}$.

Αν πάλι το $\sigma_{\mathrm{B}}(x)$ έχει κενό εσωτερικό, τότε το φάσμα του $x$ δεν "μικραίνει" καθώς "μεγαλώνει" η άλγεβρα ως προς την οποία υπολογίζεται ( 5.9). Αυτό συμβαίνει π.χ. όταν $\sigma_{\mathrm{B}}(x) \subseteq \mathbb{R}$ ή όταν $\sigma_{\mathrm{B}}(x) = \mathbb{T}$.

# 6 Παράρτημα: Συναρτήσεις με τιμές σε χώρους Banach

## 6.1 Ολοκλήρωμα συνεχούς συνάρτησης

Εστω $X$ χώρος Banach, $f : [a, b] \to X$ συνεχής συνάρτηση. Το ολοκλήρωμα

$$\int_a^b f(t)dt \in X$$

ορίζεται ως το $\|\cdot\|_X$-όριο των μερικών αθροισμάτων:
Αν $P = \{a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b\}$ είναι διαμέριση του $[a, b]$, ορίζουμε

$$S(f, P) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)(t_k - t_{k-1}).$$

Η ομοιόμορφη συνέχεια της $f$ στο $[a, b]$ δείχνει ότι το δίκτυο $\{S(f, P)\}_P$ συγκλίνει[5] και το ολοκλήρωμα $\int_a^b f(t)dt$ είναι εξ ορισμού το όριό του.
Για κάθε $x^* \in X^*$ έχουμε

$$\begin{aligned} x^*\left(\int_a^b f(t)dt\right) &= x^*(\lim_P S(f, P)) = \lim_P \sum_{k=1}^{n} x^*(f(t_k))(t_k - t_{k-1}) \\ &= \int_a^b x^*(f(t))dt. \end{aligned} \tag{3}$$

Επίσης, επειδή

$$\|S(f, P)\| \leq \sum_{k=1}^{n} \|f(t_k)\|(t_k - t_{k-1}) \,,$$

δεν είναι δύσκολο να δείξεις ότι

$$\left\|\int_a^b f(t)dt\right\| \leq \int_a^b \|f(t)\|dt \leq (b - a)\|f\|_\infty$$

[5]Πράγματι, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $\|f(t) - f(s)\| < \varepsilon$ όταν $t, s \in [a, b]$ και $|t - s| < \delta$. Αν $\mathcal{P}_o$ είναι μία διαμέριση του $[a, b]$ με $|t_k - t_{k-1}| < \delta$ για κάθε $k$, ελέγχεται εύκολα ότι κάθε εκλέπτυνσή της $\mathcal{P}$ ικανοποιεί $\|S(f, P) - S(f, \mathcal{P}_o)\| < \varepsilon(b - a)\,\|f\|_\infty$ (όπου $\|f\|_\infty = \sup\{\|f(t)\| : t \in [a, b]\}$. Συνεπώς αν $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ είναι εκλεπτύνσεις της $\mathcal{P}_o$, τότε $\|S(f, \mathcal{P}_1) - S(f, \mathcal{P}_2)\| < 2\varepsilon(b-a)\,\|f\|_\infty$, πράγμα που δείχνει ότι το δίκτυο $\{S(f, P)\}_P$ είναι δίκτυο Cauchy, άρα, εφόσον ο X είναι χώρος Banach, συγκλίνει.

όπου $\|f\|_\infty = \sup\{\|f(t)\| : t \in [a,b]\}$. Αν λοιπόν $C([a,b],X)$ είναι ο χώρος όλων των συνεχών συναρτήσεων $f : [a,b] \longrightarrow X$, η απεικόνιση

$$(C([a,b],X), \|\cdot\|_\infty) \to (X, \|\cdot\|) : f \to \int_a^b f(t)dt$$

που είναι προφανώς γραμμική, είναι συνεχής.

Αν $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ είναι μία κατά τμήματα λεία καμπύλη και $f : \gamma^* \to X$ είναι συνεχής συνάρτηση (όπου $\gamma^* = \gamma([0,1]) \subseteq \mathbb{C}$), ορίζουμε

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_0^1 f(\gamma(t))\gamma'(t)dt.$$

## 6.2 Ολόμορφες συναρτήσεις

Εστω $U \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό σύνολο και $f : U \to X$. Η $f$ λέγεται **ολόμορφη** αν για κάθε $z \in U$ υπάρχει $f'(z) \in X$ ώστε

$$\lim_{w\to z} \left\| \frac{f(w)-f(z)}{w-z} - f'(z) \right\| = 0.$$

**Παράδειγμα 6.1** *Στην απόδειξη του Θεωρήματος 5.1 δείξαμε ότι, αν $a$ είναι ένα στοιχείο μιάς άλγεβρας Banach $\mathcal{A}$ με μονάδα, η* επιλύουσα συνάρτηση *$r(\lambda) = (\lambda 1 - a)^{-1}$ ορίζεται και είναι ολόμορφη στο ανοικτό σύνολο $\mathbb{C}\backslash\sigma(a)$, γιατί*

$$\begin{aligned} &\lim_{\mu\to\lambda} \left\| \frac{r(\mu)-r(\lambda)}{\mu-\lambda} + (\lambda 1 - a)^{-2} \right\| = \\ &\lim_{\mu\to\lambda} \left\| -(\lambda 1 - a)^{-1}(\mu 1 - a)^{-1} + (\lambda 1 - a)^{-2} \right\| = 0\,. \end{aligned}$$

Η $f$ λέγεται **ασθενώς ολόμορφη** αν για κάθε $x^* \in X^*$ η συνάρτηση $x^* \circ f : U \to \mathbb{C}$ είναι ολόμορφη.

Μία ολόμορφη συνάρτηση είναι ασθενώς ολόμορφη. Πράγματι, για κάθε $x^* \in X^*$ έχουμε

$$\begin{aligned} &\left| \frac{x^*(f(w)) - x^*(f(z))}{w-z} - x^*(f'(z)) \right| = \\ = \quad &\left| x^* \left( \frac{f(w)-f(z)}{w-z} - f'(z) \right) \right| \le \|x^*\| \left\| \frac{f(w)-f(z)}{w-z} - f'(z) \right\|, \end{aligned}$$

πράγμα που δείχνει ότι η παράγωγος $(x^*\circ f)'$ υπάρχει και μάλιστα $(x^*\circ f)'(z) = x^*(f'(z))$.

Παραδείγματος χάριν, οι δυναμοσειρές με συντελεστές στο $X$ ορίζουν ολόμορφες συναρτήσεις:

**Πρόταση 6.2** *Εστω $a_k \in X$ $(k = 0, 1, ...)$ και*

$$R = \frac{1}{\overline{\lim}_n \|a_k\|^{1/k}}.$$

*Για κάθε $z_o \in \mathbb{C}$ η δυναμοσειρά*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_o)^k \tag{4}$$

*συγκλίνει απόλυτα (δηλ. $\sum_k \|a_k\|.|z - z_o|^k < \infty$) όταν $|z - z_o| < R$ και η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του ανοικτού δίσκου $D(z_o, R) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$. Η $f$ είναι ολόμορφη συνάρτηση ορισμένη στον δίσκο $D(z_o, R)$ με τιμές στον $X$.*

*Επιπλέον η $f$ είναι απεριόριστα παραγωγίσιμη στον $D(z_o, R)$ και οι συντελεστές της δυναμοσειράς ορίζονται μοναδικά από την σχέση*

$$a_k = \frac{f^{(k)}(z_o)}{k!}\,.$$

**Απόδειξη.** Είναι ακριβώς η ίδια με την περίπτωση $a_k \in \mathbb{C}$. Συνοπτικά, για κάθε $\rho < R$, η δυναμοσειρά (4) συγκλίνει απόλυτα όταν $|z - z_o| < \rho$ από το κριτήριο ρίζας, και η *πληρότητα* του $X$ εξασφαλίζει ότι μία σειρά που συγκλίνει απόλυτα, συγκλίνει ως προς την νόρμα του $X$. Το κριτήριο ρίζας δείχνει επίσης ότι η δυναμοσειρά

$$g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (z - z_o)^{k-1}$$

έχει την ίδια ακτίνα σύγκλισης με την (4), επομένως ορίζει ένα στοιχείο $g(z) \in X$ για κάθε $z \in D(z_o, R)$.

Θα δείξουμε ότι η $f$ είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο την $g$. Υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $z_o = 0$. Για $z, w \in D(0, \rho)$ με $z \neq w$, έχουμε

$$\frac{f(z) - f(w)}{z - w} - g(w) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \left( \frac{z^k - w^k}{z - w} - k w^{k-1} \right)\,.$$

Ένας υπολογισμός δείχνει ότι ο *αριθμός* $\left(\dfrac{z^k - w^k}{z - w} - kw^{k-1}\right)$ στην παραπάνω παρένθεση μηδενίζεται για $k = 1$ και φράσσεται από $|z - w|\dfrac{k(k-1)}{2}\rho^{k-2}$ για $k \geq 2$. Συνεπώς

$$\left\|\frac{f(z) - f(w)}{z - w} - g(w)\right\| \leq |z - w| \sum_{k=2}^{\infty} \|a_k\| k^2 \rho^{k-2}.$$

Αλλά, εφόσον $\rho < R$, το κριτήριο ρίζας δείχνει ότι η σειρά *θετικών όρων* $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \|a_k\| k^2 \rho^{k-2}$ συγκλίνει. Επομένως από την τελευταία ανισότητα έχουμε ότι

$$\lim_{z \to w} \left\|\frac{f(z) - f(w)}{z - w} - g(w)\right\| = 0\,. \qquad \square$$

**Παρατήρηση.** Αν η $f : U \to X$ είναι ασθενώς συνεχής, δηλ. αν για κάθε $x^* \in X^*$ η συνάρτηση $x^* \circ f : U \to \mathbb{C}$ είναι συνεχής, δεν έπεται ότι η ίδια η $f$ είναι (norm-) συνεχής (παράδειγμα;). Αν όμως η $f$ είναι ασθενώς ολόμορφη, τότε

**Λήμμα 6.3** *Κάθε ασθενώς ολόμορφη συνάρτηση είναι* $\|\cdot\|$*-συνεχής.*

**Απόδειξη**[6] Έστω $f : U \to X$ ασθενώς ολόμορφη και $z_o \in U$. Αν η $f$ δεν είναι συνεχής στο $z_o$, υπάρχει $\varepsilon > 0$ και ακολουθία $(z_n)$ στο $U$ ώστε $|z_n - z_o| < 1/n$ και $\|f(z_n) - f(z_o)\| \geq \varepsilon$, οπότε

$$\left\|\frac{f(z_n) - f(z_o)}{z_n - z_o}\right\| \geq n\varepsilon\,. \tag{5}$$

Θέτω

$$x_n = \frac{f(z_n) - f(z_o)}{z_n - z_o} \in X$$

και παρατηρώ ότι η ακολουθία $(x_n)$ είναι ασθενώς φραγμένη. Πράγματι, για κάθε $x^* \in X^*$ η παράγωγος $(x^* \circ f)'(z_o)$ υπάρχει, επομένως $\lim_n x^*(x_n) = (x^* \circ f)'(z_o)$ και άρα η ακολουθία $(x^*(x_n))$ είναι φραγμένη.

Από την αρχή ομοιομόρφου φράγματος, η $(x_n)$ είναι φραγμένη στον $X$, πράγμα που αντιφάσκει με την (5). $\square$

[6]Ευχαριστώ τον Π. Καλαμπόκα για την απόδειξη αυτή.

**Θεώρημα 6.4** *Κάθε ασθενώς ολόμορφη συνάρτηση είναι τοπικά παραστάσιμη ως (norm-συγκλίνουσα) δυναμοσειρά, και συνεπώς είναι ολόμορφη.*

**Απόδειξη.** Έστω $z_o \in U$. Επιλέγω $\rho > 0$ ώστε ο κλειστός δίσκος $\overline{D}(z_0, \rho) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq \rho\}$ να περιέχεται στο $U$. Θέτω $\gamma(t) = z_o + \rho e^{it}$ ($t \in [0, 2\pi]$). Για κάθε $x^* \in X^*$, επειδή η $x^* \circ f$ είναι ολόμορφη στο $U$, είναι παραστάσιμη με δυναμοσειρά σε μια περιοχή του $\overline{D}(z_0, \rho)$, οπότε υπάρχουν $c_k(x^*) \in \mathbb{C}$ ώστε για κάθε $z \in D(z_0, \rho)$

$$x^*(f(z)) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x^*)(z - z_o)^k .$$

Μάλιστα, είναι γνωστό ότι οι συντελεστές $c_k(x^*)$ δίνονται από τους τύπους

$$c_k(x^*) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{x^*(f(w))}{(w - z_o)^{k+1}} dw.$$

Όμως, αφού η $f$ είναι (norm-) συνεχής, τα ολοκληρώματα

$$x_k = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{(w - z_o)^{k+1}} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(\rho e^{it})}{(\rho e^{it} - z_o)^{k+1}} i\rho e^{it} dt$$

υπάρχουν στον X, και από την (3) έχουμε $c_k(x^*) = x^*(x_k)$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Αρκεί λοιπόν να δείξω ότι η δυναμοσειρά $g(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} x_k(z - z_o)^k$ συγκλίνει ως προς την νόρμα του X όταν $|z - z_o| < \rho$, γιατί τότε θα έχουμε $x^*(f(z)) = x^*(g(z))$ για κάθε $x^* \in X^*$ από την (3), οπότε $f(z) = g(z)$ από το θεώρημα Hahn - Banach.

Επειδή η $f$ είναι συνεχής στο συμπαγές σύνολο $\gamma^*$, υπάρχει M ώστε $\|f(w)\| \leq M$ για κάθε $w \in \gamma^*$, οπότε

$$\frac{\|f(w)\|}{|w - z_o|^{k+1}} \leq \frac{M}{\rho^{k+1}} \qquad \text{για κάθε } w \in \gamma^*, \text{ άρα } \quad \|x_k\| \leq \frac{M}{\rho^k} ,$$

και επομένως $\overline{\lim}\|x_k\|^{1/k} \leq 1/\rho$, πράγμα που δείχνει ότι η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x_k(z - z_o)^k$ είναι τουλάχιστον $\rho$. $\square$

**Πόρισμα 6.5** *Έστω $U \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό σύνολο και $f : U \to X$ ολόμορφη συνάρτηση. Για κάθε $z_o \in U$ υπάρχει δίσκος $D(z_o, R_o) \subseteq U$ (όπου $R_o = d(z_o, \partial U)$) και $x_n \in X$ ώστε*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k(z - z_o)^k$$

*για $z \in D(z_o, R_o)$. Μάλιστα οι συντελεστές $x_n$ δίδονται από την σχέση*

$$x_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{(w - z_o)^{n+1}} dw$$

*όπου $\gamma$ είναι κύκλος κέντρου $z_o$ και ακτίνας $\rho < R_o$.*

## 6.3 Θεωρήματα Cauchy

Στην παράγραφο αυτή θα υπενθυμίσω, χωρίς αποδείξεις, τις έννοιες και αποτελέσματα από την Μιγαδική Ανάλυση στην μορφή που θα χρησιμοποιηθούν στη συνέχεια. Αναφέρω επίσης την επέκταση των αποτελεσμάτων αυτών για συναρτήσεις με τιμές σε χώρους Banach.

Όλες οι καμπύλες θα υποτίθενται κατά τμήματα λείες (δηλαδή συνεχείς συναρτήσεις $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ ώστε η $\gamma'$ να υπάρχει και να είναι φραγμένη παντού εκτός από πεπερασμένο πλήθος σημείων). Αν $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ είναι μία καμπύλη, γράφουμε $\gamma^* = \gamma([0,1])$. Αν $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n$ είναι κλειστές καμπύλες, θέτουμε $\Gamma^* = \gamma_1^* \cup \gamma_2^* \cup ... \cup \gamma_n^*$. **Σύστημα καμπύλων** $\Gamma$ ονομάζουμε την γραμμική απεικόνιση που ορίζεται στο σύνολο των ολοκληρώσιμων συναρτήσεων $\phi : \Gamma^* \longrightarrow \mathbb{C}$ από την σχέση

$$\int_\Gamma \phi = \sum_{k=1}^n \int_{\gamma_k} \phi.$$

Ειδικότερα, για $z \notin \Gamma^*$ θέτουμε

$$\text{Ind}_\Gamma(z) = \sum_{k=1}^n \text{Ind}_{\gamma_k}(z) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} \frac{1}{w - z} dw\,.$$

Ενα σύστημα καμπύλων $\Gamma$ λέγεται **θετικά προσανατολισμένο** αν (i) $\gamma_i^* \cap \gamma_j^* = \emptyset$ για $i \neq j$ και (ii) το $\text{Ind}_\Gamma(z)$ είναι $0$ ή $1$ για κάθε $z \notin \Gamma^*$. Επομένως το συμπλήρωμα του $\Gamma^*$ αποτελείται από δύο ανοικτά σύνολα, το **'εντός'** ins$(\Gamma)$ και το **'εκτός'** out$(\Gamma)$ του $\Gamma^*$, που ορίζονται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} \text{ins}(\Gamma) &= \{z \notin \Gamma^* : \text{Ind}_\Gamma(z) = 1\} \\ \text{out}(\Gamma) &= \{z \notin \Gamma^* : \text{Ind}_\Gamma(z) = 0\}. \end{aligned}$$

Υπενθυμίζουμε το

**Θεώρημα 6.6 Σφαιρικό Θεώρημα Cauchy ([8], 5.19).** *Έστω $U \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό και $f : U \to \mathbb{C}$ ολόμορφη. Αν $\Gamma$ είναι ένα σύστημα καμπύλων στο $U$, ώστε $\mathrm{Ind}_\Gamma(z) = 0$ για κάθε $z \notin U$, τότε*

$$\int_\Gamma f(w)dw = 0$$

*και για κάθε $z \in U \backslash \Gamma^*$,*

$$\mathrm{Ind}_\Gamma(z).f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}dw.$$

Το Θεώρημα γενικεύεται άμεσα για ολόμορφες συναρτήσεις με τιμές σε χώρους Banach:

**Πρόταση 6.7** *Έστω $X$ χώρος Banach, $U \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό σύνολο και $f : U \to X$ ολόμορφη συνάρτηση. Αν $\Gamma$ είναι ένα σύστημα καμπύλων στο $U$ με $\mathrm{Ind}_\Gamma(z) = 0$ για κάθε $z \notin U$, τότε*

$$\int_\Gamma f(w)dw = 0$$

*και για κάθε $z \in U \backslash \Gamma^*$,*

$$\mathrm{Ind}_\Gamma(z).f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}dw.$$

*Επομένως, αν $\Gamma_1$, $\Gamma_2$ είναι δύο συστήματα καμπύλων στο $U$, ώστε $\mathrm{Ind}_{\Gamma_1}(z) = \mathrm{Ind}_{\Gamma_2}(z)$ για κάθε $z \notin U$, τότε*

$$\int_{\Gamma_1} f(w)dw = \int_{\Gamma_2} f(w)dw.$$

**Απόδειξη** Εφόσον η $f$ είναι συνεχής, το ολοκλήρωμα $\int_\Gamma f(w)dw$ υπάρχει και ορίζει στοιχείο του X.
Για κάθε $x^* \in X^*$, έχουμε $x^*(\int_\Gamma f(w)dw) = \int_\Gamma x^*(f(w))dw = 0$ γιατί η συνάρτηση $x^* \circ f : U \to \mathbb{C}$ είναι ολόμορφη. Από το Θεώρημα Hahn-Banach έπεται λοιπόν ότι $\int_\Gamma f(w)dw = 0$. Οι υπόλοιποι ισχυρισμοί αποδεικνύονται όμοια. □

**Πόρισμα 6.8 (Θεώρημα Liouville)** *Αν $f : \mathbb{C} \to X$ είναι ολόμορφη και φραγμένη τότε είναι σταθερή.*

**Απόδειξη** Για κάθε $x^* \in X^*$, η συνάρτηση $x^* \circ f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ είναι ολόμορφη και φραγμένη, άρα, από το Θεώρημα Liouville, είναι σταθερή: $x^*(f(z)) = x^*(f(0))$

για κάθε $z \in \mathbb{C}$. Αφού η ισότητα αυτή ισχύει για κάθε $x^* \in X^*$, από το Θεώρημα Hahn-Banach έπεται ότι $f(z) = f(0)$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$. $\square$

Θα χρειασθούμε επίσης το ανάπτυγμα Laurent μιάς ολόμορφης συνάρτησης γύρω από μία μεμονωμένη ανωμαλία. Η απόδειξη είναι πάλι η ίδια με την περίπτωση συνάρτησης με μιγαδικές τιμές ([8], 6.81).

**Πόρισμα 6.9 (Ανάπτυγμα Laurent).** *Έστω $U = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_o| < R\}$, $X$ χώρος Banach και $f : U \longrightarrow X$ ολόμορφη. Τότε υπάρχουν μοναδικά $\{a_n : n \in \mathbb{Z}\} \subseteq X$ ώστε*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_o)^k \; + \; \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} \frac{1}{(z - z_o)^k}$$

*όπου οι δύο σειρές συγκλίνουν απόλυτα για $z \in U$ και ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του $U$. Οι συντελεστές $a_n$ δίδονται από τις σχέσεις*

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{(w - z_o)^{n+1}} dw$$

*όπου $\gamma$ είναι κύκλος κέντρου $z_o$ και ακτίνας $\rho < R$.*

Αν $a_{-n} = 0$ για κάθε $n = 1, 2, ...$, τότε (και μόνον τότε) η $f$ επεκτείνεται σε ολόμορφη συνάρτηση σε μιά περιοχή του $z_o$, και το $z_o$ είναι **επουσιώδης ανωμαλία** για την $f$. Αν υπάρχει $k > 0$ ώστε $a_{-k} \neq 0$ και $a_{-n} = 0$ για κάθε $n > k$, τότε η $z \longrightarrow (z - z_o)^k f(z)$ επεκτείνεται σε ολόμορφη συνάρτηση σε μιά περιοχή του $z_o$, και το $z_o$ είναι **πόλος τάξης k**. Αν $a_{-n} \neq 0$ για άπειρους δείκτες $n \in \mathbb{N}$, τότε (και μόνον τότε) το $z_o$ δεν είναι ούτε επουσιώδης ανωμαλία ούτε πόλος, είναι **ουσιώδης ανωμαλία** για την $f$.

Το επόμενο γεωμετρικό λήμμα, που είναι προφανές όταν το συμπαγές K είναι π.χ. πεπερασμένη ένωση κλειστών δίσκων, αποδεικνύεται στο [8], 12.8.

**Λήμμα 6.10** *Αν $K \subseteq U \subseteq \mathbb{C}$ όπου $U$ ανοικτό και $K$ συμπαγές, υπάρχει θετικά προσανατολισμένο σύστημα καμπύλων $\Gamma$ στο $U$ ώστε $K \subseteq ins(\Gamma)$ και $\mathbb{C} \setminus U \subseteq out(\Gamma)$.*

*Επομένως (από την Πρόταση 6.7) αν $X$ χώρος Banach και $f : U \to X$ ολόμορφη τότε*

$$\int_\Gamma f(w) dw = 0$$

*και*
$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(w)}{w-z}dw$$
*για κάθε* $z \in K$.

**Ορισμός 6.1** *Έστω* $K \subseteq U \subseteq \mathbb{C}$ *όπου* $U$ *ανοικτό και* $K$ *συμπαγές. Λέμε ότι ένα σύστημα καμπύλων* $\Gamma$ *όπου* $\Gamma^* \subseteq U$ **περικλείει το** $K$ **στο** $U$ *αν είναι θετικά προσανατολισμένο,* $K \subseteq \mathrm{ins}(\Gamma)$ *και* $\mathbb{C} \setminus U \subseteq \mathrm{out}(\Gamma)$.

Θα χρειασθούμε επίσης μία ασθενή μορφή του Θεωρήματος Runge ([8] 12.14).

**Θεώρημα 6.11** *Έστω* $U \subseteq \mathbb{C}$ *ανοικτό σύνολο και* $f : U \to \mathbb{C}$ *ολόμορφη συνάρτηση. Υπάρχει ακολουθία* $(r_n)$ *από ρητές συναρτήσεις, ολόμορφες στο* $U$, *ώστε* $r_n \longrightarrow f$ *ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του* $U$.

# 7 Ο Συναρτησιακός Λογισμός

## 7.1 Εισαγωγή

Σταθεροποιούμε μια άλγεβρα Banach $A$ με μονάδα και ένα στοιχείο $x \in A$. Για κατάλληλες μιγαδικές συναρτήσεις $f$, θέλουμε να ορίσουμε αντίστοιχα στοιχεία $f(x) \in A$.

Αν $p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \quad (a_k \in \mathbb{C})$ είναι πολυώνυμο, γράφουμε

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$

Η απεικόνιση $p \longrightarrow p(x)$ είναι μορφισμός από την άλγεβρα των πολυωνύμων στην $A$. Μάλιστα, παίρνει τιμές στην (προφανώς μεταθετική) άλγεβρα που παράγεται από το $x$ και την μονάδα $1$ της $A$.

Στόχος αυτής της παραγράφου είναι η επέκταση αυτής της απεικόνισης σε άλλες κατηγορίες συναρτήσεων.

Παραδείγματος χάριν, αν η $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ είναι ολόμορφη συνάρτηση, τότε έχει δυναμοσειρά

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, \quad a_k \in \mathbb{C} \tag{6}$$

που συγκλίνει, μάλιστα απόλυτα και ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{C}$, και μπορούμε να ορίσουμε

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \ \in \ \mathcal{A}.$$

Πράγματι, η σειρά αυτή συγκλίνει (στην τοπολογία της νόρμας της $\mathcal{A}$), γιατί

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \|x^k\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \|x\|^k < \infty,$$

επομένως η σειρά συγκλίνει απόλυτα άρα (αφού η $\mathcal{A}$ είναι *πλήρης*) συγκλίνει.

**Παρατήρηση** Έτσι επεκτείναμε την απεικόνιση $p \to p(x)$ σε μία απεικόνιση $\Phi_\alpha : f \to f(x)$ από την άλγεβρα $H(\mathbb{C})$ των ακεραίων συναρτήσεων με τιμές στην $\mathcal{A}$. Σημείωσε την αλλαγή οπτικής σε σχέση με την προηγούμενη παράγραφο: εκεί ορίζαμε συναρτήσεις με πεδίο ορισμού το $\mathbb{C}$ και τιμές στην $\mathcal{A}$ (π.χ.

δυναμοσειρές $\sum b_k z^k$ με συντελεστές $b_k \in \mathcal{A}$ και $z \in \mathbb{C}$), ενώ τώρα (έχοντας σταθεροποιήσει ένα στοιχείο $x \in \mathcal{A}$) ορίζουμε μία απεικόνιση $\Phi_\alpha$ της μορφής $\Phi_\alpha(f) = \sum a_k x^k \in \mathcal{A}$, όπου οι συντελεστές $a_k$ ανήκουν στο $\mathbb{C}$.

Παρατηρούμε ότι δεν είναι απαραίτητο η ακτίνα σύγκλισης $R$ της δυναμοσειράς (6) να είναι $\infty$, αρκεί να είναι μεγαλύτερη από την φασματική ακτίνα $\rho(x)$ του $x$. Πράγματι, αν $\rho(x) < \rho < R$ τότε, εφόσον $\rho(x) = \lim_k \|x^k\|^{1/k}$, υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ ώστε αν $k \geq k_0$ να ισχύει $\|x^k\|^{1/k} < \rho$, οπότε

$$\sum_{k \geq k_0}^{\infty} |a_k| \|x^k\| \leq \sum_{k \geq k_0}^{\infty} |a_k| \rho^k < \infty.$$

Επομένως, αν η $f$ είναι ολόμορφη σε μία ανοικτή μπάλα κέντρου $0$ που περιέχει ολόκληρο το φάσμα $\sigma(x)$ του $x$, τότε το στοιχείο $f(x)$ της $\mathcal{A}$ ορίζεται. Δεν αρκούν όμως τέτοιες συναρτήσεις. Παραδείγματος χάριν, αν $x \in \mathrm{Inv}(\mathcal{A})$, τότε το $x^{-1}$ ορίζεται, ενώ η συνάρτηση $f(z) = z^{-1}$ δεν είναι ολόμορφη σε καμμία μπάλα γύρω από το $0$. Βεβαίως η $f$ είναι ολόμορφη στο ανοικτό σύνολο $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ που περιέχει το $\sigma(x)$, δεν είναι όμως *ολικά* παραστάσιμη με δυναμοσειρά σ'αυτό το σύνολο, αλλά μόνον *τοπικά*. Θα χρειασθεί μάλιστα να ορίσουμε στοιχεία $f(x)$ της $\mathcal{A}$ για συναρτήσεις που είναι ολόμορφες σε μια περιοχή του $\sigma(x)$, όπως παραδείγματος χάριν συναρτήσεις που παίρνουν την τιμή $0$ σε ένα "κομμάτι" του $\sigma(x)$ και $1$ σε ένα άλλο. Το στοιχείο $f(x)$ μπορεί να ορισθεί, όπως θα δούμε, "μετατρέποντας τον *ολοκληρωτικό τύπο του Cauchy* σε ορισμό".

Σε ειδικές κατηγορίες αλγεβρών (όπως είναι οι $C^*$ άλγεβρες), μπορούμε να προχωρήσουμε ακόμη περισσότερο, και να ορίσουμε στοιχεία $f(x)$ της $\mathcal{A}$ για συναρτήσεις που είναι (απλώς) συνεχείς στο $\sigma(x)$. Το θέμα αυτό θα μας απασχολήσει αργότερα.

## 7.2 Ορισμός του Συναρτησιακού Λογισμού

Ο ορισμός θα δοθεί σε τρία βήματα: θα ορίσουμε πρώτα ρητές συναρτήσεις του $x$, στη συνέχεια θα βρούμε μια ισοδύναμη μορφή μέσω του ολοκληρωτικού τύπου του Cauchy, και έτσι θα φτάσουμε στον γενικό ορισμό.

Επεκτείνουμε την απεικόνιση $p \longrightarrow p(x)$ κατ'αρχήν από τα πολυώνυμα στις **ρητές συναρτήσεις**, της μορφής $r = p/q$ όπου $p, q$ πολυώνυμα. Πρέπει όμως να εξετάσουμε πότε το "κλάσμα" $r(x) = p(x)(q(x))^{-1}$ έχει έννοια, δηλαδή πότε ισχύει $q(x) \in \mathrm{Inv}(\mathcal{A})$.

**Λήμμα 7.1 (φασματικής απεικόνισης)** *Για κάθε πολυώνυμο* $p$,

$$\sigma(p(x)) = \{p(z) : z \in \sigma(x)\}.$$

**Απόδειξη** Αν το $p$ είναι σταθερό, το $p(x)$ είναι πολλαπλάσιο του $1 \in A$, οπότε το συμπέρασμα αληθεύει. Υποθέτω λοιπόν ότι το $p$ δεν είναι σταθερό.

Έστω $z \in \mathbb{C}$. Θέτουμε $q(w) = p(w) - z$ ($w \in \mathbb{C}$). Το πολυώνυμο $q$ παραγοντοποιείται

$$q(w) = c(w - w_1)(w - w_2) \ldots (w - w_n)$$

όπου $w_1, \ldots, w_n$ οι ρίζες του $q$ και $c \neq 0$. Επομένως

$$q(x) = c(x - w_1 1)(x - w_2 1) \ldots (x - w_n 1) \quad \in \mathcal{A}$$

Παρατήρησε ότι, επειδή οι παράγοντες $x - w_i 1$ μετατίθενται μεταξύ τους, το γινόμενό τους έχει αντίστροφο αν και μόνον αν καθένας έχει αντίστροφο. Επομένως, η σχέση $z \notin \sigma(p(x))$, δηλαδή $q(x) = p(x) - z1 \in \mathrm{Inv}(\mathcal{A})$, ισοδυναμεί με την $x - w_i 1 \in \mathrm{Inv}(\mathcal{A})$, δηλαδή $w_i \notin \sigma(x)$, για κάθε $i = 1, \ldots n$. Επομένως $z \notin \sigma(p(x))$ αν και μόνον αν $w \neq w_i$ για κάθε $w \in \sigma(x)$, δηλαδή $q(w) \neq 0$, ισοδύναμα $p(w) \neq z$ για κάθε $w \in \sigma(x)$. $\square$

Έστω $U \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό. Συμβολίζουμε $H(U)$ την άλγεβρα των ολομόρφων συναρτήσεων $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ και θέτουμε $R(U) = \{f \in H(U) : f$ ρητή$\}$ και $P(U) = \{f \in H(U) : f$ πολυώνυμο$\}$.

Μία ρητή συνάρτηση $f$ γράφεται $f = p/q$ όπου τα πολυώνυμα $p, q$ δεν έχουν κοινές ρίζες. Μια τέτοια συνάρτηση ανήκει στο $R(U)$ αν και μόνον αν οι ρίζες του $q$ δεν ανήκουν στο $U$. Είναι φανερό ότι η $P(U)$ είναι υπάλγεβρα της $R(U)$ που είναι υπάλγεβρα της $H(U)$.

Η απεικόνιση

$$P(U) \longrightarrow \mathcal{A} : \ p \longrightarrow p(x)$$

είναι καλά ορισμένη (πράγματι, αν $p(z) = q(z)$ για κάθε $z \in U$ τότε, επειδή το $U$ είναι άπειρο σύνολο, οι συντελεστές των $p$ και $q$ ταυτίζονται, άρα $p(x) = q(x)$). Είναι φανερό ότι η απεικόνιση αυτή είναι μορφισμός αλγεβρών, δηλαδή ότι

$$p_1(x) + p_2(x) = (p_1 + p_2)(x) \ \text{ και } \ p_1(x)p_2(x) = (p_1 p_2)(x)\,.$$

**Συναρτησιακός λογισμός** για το ζεύγος $(U, x)$ λέγεται κάθε μορφισμός $\Phi : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{A}$ (όπου $\mathcal{U}$ άλγεβρα συναρτήσεων από το $U$ στο $\mathbb{C}$ που περιέχει την $P(U)$) που ικανοποιεί $\Phi(p) = p(x)$ όταν $p \in P(U)$.

**Λήμμα 7.2** *Έστω $U \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό. Ο συναρτησιακός λογισμός $p \longrightarrow p(x)$ επεκτείνεται στην $R(U)$ αν και μόνον αν $\sigma(x) \subseteq U$. Η επέκταση $\Phi_\rho$ είναι μοναδική και ορίζεται από την σχέση*

$$\Phi_\rho(f) = p(x)(q(x))^{-1} := f(x)$$

*όπου $f = p/q$.*

**Απόδειξη.** Από το προηγούμενο Λήμμα προκύπτει ότι αν $r = p/q$ είναι ρητή συνάρτηση με πόλους εκτός του $\sigma(x)$, τότε $q(x) \in \text{Inv}(\mathcal{A})$. Μπορούμε λοιπόν να ορίσουμε $r(x) = p(x)q(x)^{-1}$.

Αν λοιπόν $\sigma(x) \subseteq U$ και $r \in R(U)$, το $\Phi_\rho(r) \in \mathcal{A}$ ορίζεται. Είναι φανερό ότι $\Phi_\rho(p) = p(x)$ για $p \in P(U)$.

Ισχυρίζομαι ότι η $\Phi_\rho$ είναι μορφισμός: Πράγματι, αν $r_i = p_i/q_i \in R(U)$ $(i = 1, 2)$, επειδή τα $p_i(x),\ q_j(x)^{-1}$ μετατίθενται[7], έχουμε

$$\begin{aligned}\Phi_\rho(r_1).\Phi_\rho(r_2) &= p_1(x)q_1(x)^{-1}p_2(x)q_2(x)^{-1} = p_1(x)p_2(x)(q_1(x)q_2(x))^{-1} \\ &= (p_1p_2)(x)((q_1q_2)(x))^{-1} = \Phi_\rho(r_1r_2)\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}\Phi_\rho(r_1) + \Phi_\rho(r_2) &= p_1(x)q_1(x)^{-1} + p_2(x)q_2(x)^{-1} \\ &= (p_1(x)q_2(x) + p_2(x)q_1(x))q_2(x)^{-1}q_1(x)^{-1} \\ &= \Phi_\rho(p_1q_2 + p_2q_1).(\Phi_\rho(q_1q_2))^{-1} \overset{(*)}{=} \Phi_\rho\left(\frac{p_1q_2 + p_2q_1}{q_1q_2}\right) \\ &= \Phi_\rho(r_1 + r_2)\end{aligned}$$

(η (*) έπεται από την πολλαπλασιαστικότητα της $\Phi_\rho$, που ήδη έχουμε δείξει).

Έστω, αντίστροφα, ότι ορίζεται ένας συναρτησιακός λογισμός $\Phi : R(U) \longrightarrow \mathcal{A}$. Ισχυρίζομαι ότι $\sigma(x) \subseteq U$. Πράγματι: για κάθε $z \notin U$ θέτω $p(w) = w - z$ $(w \in \mathbb{C})$. Τότε $\frac{1}{p} \in R(U)$ και

$$1 = \Phi(\frac{1}{p})\Phi(p) = \Phi(\frac{1}{p})(x - z1) = (x - z1)\Phi(\frac{1}{p})$$

συνεπώς $x - z1 \in \text{Inv}(\mathcal{A})$ δηλαδή $z \notin \sigma(x)$.

Επίσης για κάθε $r = p/q \in R(U)$ έχουμε

$$\Phi(r) = \Phi(p)(\Phi(q))^{-1} = p(x)(q(x))^{-1} = \Phi_\rho(r)$$

πράγμα που αποδεικνύει και την μοναδικότητα του $\Phi_\rho$. $\square$

[7] Αν $pq = qp$ και $q \in \text{Inv}(\mathcal{A})$ τότε $q^{-1}p = q^{-1}pqq^{-1} = q^{-1}qpq^{-1} = pq^{-1}$

**Παρατήρηση 7.3** *Αν $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{A}$, ο* **μεταθέτης** *του $\mathcal{S}$ ορίζεται από την σχέση*

$$\mathcal{S}' = \{y \in \mathcal{A} : ys = sy \ \forall s \in \mathcal{S}\}.$$

Είναι φανερό ότι ο $\mathcal{S}'$ είναι άλγεβρα και περιέχει την μονάδα της $\mathcal{A}$. Επιπλέον (αν η $\mathcal{A}$ είναι άλγεβρα Banach) η $\mathcal{S}'$ είναι κλειστή υπάλγεβρα της $\mathcal{A}$. Παρατηρούμε ότι ισχύει $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}''$ και ότι ένα υποσύνολο $\mathcal{S}$ είναι μεταθετικό αν και μόνον αν περιέχεται στον μεταθέτη του, ισοδύναμα αν $\mathcal{S}'' \subseteq \mathcal{S}'$. [8]

Επίσης ελέγχεται εύκολα ότι αν $x \in \text{Inv}(\mathcal{A})$ τότε $x^{-1} \in \{x\}''$.

Από την παρατήρηση αυτή προκύπτει ότι

*Ο συναρτησιακός λογισμός $\Phi_\rho$ παίρνει τιμές στην $\{x\}''$, δηλαδή ότι $p(x)(q(x))^{-1} \in \{x\}''$. Ειδικότερα το σύνολο $\Phi_\rho(R(U))$ αποτελεί μεταθετική υπάλγεβρα της $\mathcal{A}$ που περιέχει το $x$ και την $1$.*

Για να επεκτείνουμε τον συναρτησιακό λογισμό στην $H(U)$, είναι αναγκαίο να εκφράσουμε τον $\Phi_\rho$ σε μια ισοδύναμη μορφή που επιδέχεται επέκταση. Η μορφή αυτή προκύπτει από τον ολοκληρωτικό τύπο του Cauchy, αν "αντικαταστήσουμε την μεταβλητή $w \in \mathbb{C}$ με το στοιχείο $x \in \mathcal{A}$". Πρέπει όμως να αποδείξουμε ότι η "αντικατάσταση" αυτή έχει έννοια:

**Πρόταση 7.4** *Αν $U \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό που περιέχει το $\sigma(x)$ και $r \in R(U)$ ρητή συνάρτηση τότε για κάθε θετικά προσανατολισμένο σύστημα καμπύλων $\Gamma$ που περικλείει το $\sigma(x)$ στο $U$ (Ορισμός 6.1), έχουμε*

$$r(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma r(w)(w1 - x)^{-1}dw.$$

*Ειδικότερα το ολοκλήρωμα αυτό δεν εξαρτάται από το προσανατολισμένο σύστημα καμπύλων $\Gamma$, αρκεί το $\Gamma$ να περικλείει το $\sigma(x)$ στο $U$.*

**Απόδειξη.** Κατ'αρχήν το ολοκλήρωμα υπάρχει, γιατί η συνάρτηση $w \longrightarrow r(w)(w1 - x)^{-1}$ ορίζεται και είναι συνεχής στο $\Gamma^*$.

Κάθε ρητή συνάρτηση $r$ γράφεται ως πεπερασμένο άθροισμα

$$r(w) = p(w) + \sum_{m,k} c_{m,k}(w - z_m)^{-k}$$

όπου $p$ πολυώνυμο, $c_{m,k} \in \mathbb{C}$ και $z_m$ οι πόλοι της $r$ (ανάλυση σε απλά κλάσματα). Από την γραμμικότητα του ολοκληρώματος, αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε την Πρόταση για καθέναν από τους όρους του αθροίσματος αυτού (που

[8] Εύκολα αποδεικνυεται ότι $\mathcal{S}''' = \mathcal{S}'$.

είναι της μορφής $w \to (w-\lambda)^k$ για $k \in \mathbb{Z}$ και $\lambda \in \mathbb{C}$). Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε το

**Λήμμα 7.5** *Έστω $\lambda \notin \sigma(x)$ και $\Gamma$ ένα θετικά προσανατολισμένο σύστημα καμπύλων με $\text{Ind}_\Gamma(\lambda) = 0$ και $\text{Ind}_\Gamma(z) = 1$ για κάθε $z \in \sigma(x)$. Τότε*

$$(\lambda 1 - x)^n = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma (\lambda - w)^n (w1 - x)^{-1} dw$$

*για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Αν μάλιστα $n \in \mathbb{N}$, το συμπέρασμα ισχύει χωρίς τους περιορισμούς $\lambda \notin \sigma(x)$ και $\text{Ind}_\Gamma(\lambda) = 0$.*

**Απόδειξη.** Ονομάζουμε $y_n$ το ολοκλήρωμα δεξιά. Αν $w \notin \sigma(x)$,

$$(\lambda 1 - x)(w1 - x)^{-1} = 1 + (\lambda - w)(w1 - x)^{-1}.$$

Επομένως

$$\begin{aligned}(\lambda 1 - x) y_n &= \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \left( (\lambda - w)^n 1 + (\lambda - w)(w1 - x)^{-1} \right) dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma (\lambda - w)^n 1 dw + \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma (\lambda - w)^{n+1} (w1 - x)^{-1} dw.\end{aligned}$$

Αλλά το πρώτο ολοκλήρωμα μηδενίζεται για κάθε $n \in \mathbb{Z} \backslash \{-1\}$ (αφού η $w \to (\lambda - w)^n$ έχει παράγουσα) αλλά και για $n = -1$ αφού $\text{Ind}_\Gamma(\lambda) = 0$. Επομένως

$$(\lambda 1 - x) y_n = y_{n+1}$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε το Λήμμα για $n = 0$, δηλαδή ότι

$$1 = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma (w1 - x)^{-1} dw.$$

Έστω $\gamma_\rho(t) = \rho e^{it}, \ t \in [0, 2\pi]$ όπου $\rho > \|x\|$. Παρατηρούμε ότι, αν $U = \mathbb{C} \backslash \sigma(x)$, για κάθε $z \notin U$ έχουμε $\text{Ind}_\Gamma(z) = 1 = \text{Ind}_{\gamma_\rho}(z)$. Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση $f : U \longrightarrow \mathcal{A} : w \longrightarrow (w1 - x)^{-1}$ ορίζεται και είναι ολόμορφη. Επομένως από το Θεώρημα του Cauchy (Πρόταση 6.7),

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma (w1 - x)^{-1} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} (w1 - x)^{-1} dw.$$

Ομως όταν $w \in \gamma_\rho^*$, έχουμε $|w| = \rho > \|x\|$ επομένως η σειρά

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{w^{k+1}}$$

συγκλίνει στο $\frac{1}{w}(1-\frac{x}{w})^{-1}=(w1-x)^{-1}$ομοιόμορφα ως προς $w\in\gamma_\rho^*$, οπότε

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\rho}(w1-x)^{-1}dw=\sum_{k=0}^{\infty}x^k\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\rho}\frac{1}{w^{k+1}}dw=x^0\mathrm{Ind}_{\gamma_\rho}(0)=1$$

(γιατί $\int_{\gamma_\rho}w^m dw=0$ όταν $m\in\mathbb{Z}\backslash\{-1\}$) και η απόδειξη είναι πλήρης. $\square$

**Ορισμός 7.1 (Συναρτησιακός Λογισμός (functional calculus))** *Έστω $U\subseteq\mathbb{C}$ ένα ανοικτό σύνολο που περιέχει το $\sigma(x)$. Επιλέγουμε (Λήμμα 6.10) ένα θετικά προσανατολισμένο σύστημα καμπύλων $\Gamma$ που περικλείει το $\sigma(x)$ στο $U$. Τότε για κάθε $f\in H(U)$ το ολοκλήρωμα*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(w)(w1-x)^{-1}dw$$

*ορίζει ένα στοιχείο της $A$ το οποίο συμβολίζουμε $\tilde{f}(x)$.*

**Παρατήρηση.** Το ολοκλήρωμα αυτό υπάρχει, γιατί η συνάρτηση $w\longrightarrow f(w)(w1-x)^{-1}$ είναι ορισμένη και συνεχής στο $\Gamma^*$. Εξάλλου, επειδή η συνάρτηση αυτή είναι ολόμορφη στο $\Omega:=U\backslash\sigma(x)$, από το Θεώρημα Cauchy (Πρόταση 6.7) έπεται ότι το ολοκλήρωμα που ορίζει το $\tilde{f}(x)$ δεν εξαρτάται από το προσανατολισμένο σύστημα καμπύλων $\Gamma$, αρκεί να περικλείει το $\sigma(x)$ στο $U$ (γιατί δύο τέτοια συστήματα καμπύλων $\Gamma_1,\Gamma_2$ ικανοποιούν $\mathrm{Ind}_{\Gamma_1}(z)=\mathrm{Ind}_{\Gamma_2}(z)$ για κάθε $z\notin\Omega$).

Επομένως το $\tilde{f}(x)$ είναι καλά ορισμένο.

Απο την Πρόταση 7.4 έπεται ότι, όταν η $f$ ειναι ρητή, έχουμε $\tilde{f}(x)=f(x)$.

Θα χρειασθεί το

**Λήμμα 7.6** *Με τους συμβολισμούς του προηγουμένου ορισμού*

$$\|\tilde{f}(x)\|\leq\frac{1}{2\pi}V(\Gamma)\|f\|_\Gamma\sup\{\|(w1-x)^{-1}\|:w\in\Gamma^*\}$$

*όπου $V(\Gamma)$ είναι το μήκος της καμπύλης και $\|f\|_\Gamma:=\sup\{\|f(w)|:w\in\Gamma^*\}$.*

**Απόδειξη** προφανής.

**Θεώρημα 7.7** *(i) Η απεικόνιση*

$$\Phi_h:H(U)\longrightarrow\mathcal{A}:\ f\longrightarrow\tilde{f}(x)$$

*είναι συναρτησιακός λογισμός, και $f(x) \in \{x\}''$ για κάθε $f \in H(U)$.*

*(ii) Αν $f, f_n \in H(U)$ και $f_n \to f$ ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του $U$, τότε $\|f_n(x) - f(x)\| \to 0$.*

**Απόδειξη του Θεωρήματος.** Αποδεικνύουμε πρώτα το (ii): Επιλέγουμε ένα θετικά προσανατολισμένο σύστημα καμπύλων $\Gamma$ που περικλείει το $\sigma(x)$ στο $U$. Από το λήμμα έχουμε

$$\|f(x) - f_n(x)\| \leq \frac{1}{2\pi} V(\Gamma)\|f - f_n\|_\Gamma \sup\{\|(w1 - x)^{-1}\| : w \in \Gamma^*\}$$

το οποίο τείνει στο $0$ εφόσον το $\Gamma^*$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $U$.

*Απόδειξη του (i)* Η γραμμικότητα της $\Phi_h$ είναι προφανής. Αν $f, g \in H(U)$, για να δείξω ότι $\Phi_h(fg) = \Phi_h(f).\Phi_h(g)$ επιλέγω, από το Θεώρημα Runge (6.11) ακολουθίες $f_n, g_n \in H(U)$ ρητών συναρτήσεων που συγκλίνουν στις $f$ και $g$ αντίστοιχα, ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του $U$. Τότε και η $(f_n g_n)$ θα τείνει στην $fg$ ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του $U$. Επειδή ο $\Phi_h$ επεκτείνει τον $\Phi_\rho$ (Πρόταση 7.4), έχουμε

$$\Phi_h(f_n g_n) = \Phi_\rho(f_n g_n) = \Phi_\rho(f_n)\Phi_\rho(g_n) = \Phi_h(f_n)\Phi_h(g_n)$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Ομως από το (ii) έχω

$$\|f_n(x) - f(x)\| \to 0 \ \text{ και } \quad \|g_n(x) - g(x)\| \to 0$$

και συνεπώς, λόγω της συνέχειας του γινομένου,

$$\Phi_h(fg) = \lim_n \Phi_h(f_n g_n) = \lim_n \Phi_h(f_n)\Phi_h(g_n) = \Phi_h(f)\Phi_h(g).$$

Τέλος, η σχέση $f(x) \in \{x\}''$ προκύπτει από το γεγονός ότι η $\{x\}''$ είναι κλειστή υπάλγεβρα της $\mathcal{A}$ και ότι $f_n(x) \in \{x\}''$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ (Παρατήρηση 7.3), αφού οι $f_n$ είναι ρητές. $\square$

**Παρατήρηση.** Το στοιχείο $f(x)$ της $A$ εξαρτάται όχι από την ίδια την $f$, αλλά από τον περιορισμό της σε μια ανοικτή περιοχή του $\sigma(x)$. Πράγματι αν οι συναρτήσεις $f, g \in H(U)$ ταυτίζονται σε κάποιο ανοικτό $V$ με $\sigma(x) \subseteq V \subseteq U$, τότε επιλέγοντας ένα σύστημα καμπύλων $\Gamma$ που να περικλείει το $\sigma(x)$ στο $V$, βρίσκουμε $f(x) = g(x)$ από τον ορισμό (7.1). Αυτή η παρατήρηση οδηγεί στον επόμενο ορισμό:

**Ορισμός 7.2** *Αν $f, g$ είναι ολόμορφες μιγαδικές συναρτήσεις ορισμένες σε ανοικτά σύνολα που περιέχουν το $\sigma(x)$, γράφουμε $f \equiv g$ όταν υπάρχει ανοικτό $U \supseteq \sigma(x)$ ώστε $f(z) = g(z)$ $\forall z \in U$. Συμβολίζουμε $\mathrm{Hol}(x)$ το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας. Με τις προφανείς πράξεις, η $\mathrm{Hol}(x)$ είναι άλγεβρα με μονάδα (χωρίς τοπολογία). Ταυτίζουμε συνήθως μία κλάση με έναν αντιπρόσωπό της και γράφουμε $f \in \mathrm{Hol}(x)$ όταν η συνάρτηση $f$ ορίζεται και είναι ολόμορφη σε μία (ανοικτή) περιοχή $U_f$ του $\sigma(x)$.*

Το θεώρημα που ακολουθεί είναι απλή αναδιατύπωση του προηγουμένου.

**Θεώρημα 7.8** *Η απεικόνιση*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hol}(x) & \to & A \\ f & \mapsto & f(x) \end{array}$$

*είναι (καλά ορισμένος) μορφισμός αλγεβρών που ικανοποιεί $p(x) = p(x)$ όταν $p$ πολυώνυμο και $f(x) \in \{x\}''$ για κάθε $f \in \mathrm{Hol}(x)$.*

**Πρόταση 7.9 (Μοναδικότητα)** *Έστω $\Phi : \mathrm{Hol}(x) \to A$ μορφισμός αλγεβρών με τις ιδιότητες*

*(a) $\Phi(p) = p(x)$ για κάθε πολυώνυμο $p$ και*

*(b) Αν $f, f_n$ είναι ολόμορφες συναρτήσεις ορισμένες σ' ένα ανοικτό σύνολο $U$ που περιέχει το $\sigma(x)$ και αν $f_n \to f$ ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του $U$, τότε $\|\Phi(f_n) - \Phi(f)\| \to 0$.*

*Τότε $\Phi(f) = f(x)$ για κάθε $f \in \mathrm{Hol}(x)$.*

**Απόδειξη.** Έστω πρώτα ότι η $f \in \mathrm{Hol}(x)$ είναι ρητή συνάρτηση, $f = p/q$. Έχουμε $fq = p$ άρα, αφού ο $\Phi$ είναι μορφισμός, $\Phi(f)\Phi(q) = \Phi(p)$ δηλαδή $\Phi(f)q(x) = p(x)$ από το $(a)$. Αλλά το $q$ δεν μηδενίζεται στο $\sigma(x)$, άρα $q(x) \in \mathrm{Inv}(\mathcal{A})$ επομένως $\Phi(f) = p(x)(q(x))^{-1} = f(x)$.

Έστω τώρα $g \in \mathrm{Hol}(x)$. Υπάρχει τότε ανοικτό σύνολο $U_g \supseteq \sigma(x)$ ώστε $g \in H(U_g)$. Από το Θεώρημα Runge, υπάρχουν ρητές συναρτήσεις $g_n \in H(U_g)$ ώστε $g_n \longrightarrow g$ ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του $U_g$. Επομένως από το $(b)$ έχουμε $\|\Phi(g_n) - \Phi(g)\| \to 0$. Επίσης γνωρίζουμε ότι $\|g_n(x) - g(x)\| \to 0$ (Θεώρημα 7.7 (ii)). Δείξαμε όμως ότι $\Phi(g_n) = g_n(x)$ για κάθε $n$. Επομένως $\Phi(g) = g(x)$ και η απόδειξη είναι πλήρης. $\square$

**Θεώρημα 7.10 (φασματικής απεικόνισης)** *Αν $f \in \mathrm{Hol}(x)$, τότε*

$$\sigma(f(x)) = f(\sigma(x)).$$

**Απόδειξη** Έστω $U \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό με $\sigma(x) \subseteq U$ ώστε $f \in H(U)$. Αν $z \in \sigma(x)$ τότε η συνάρτηση $g : U \longrightarrow \mathbb{C}$ όπου

$$g(w) = \begin{cases} \frac{f(w)-f(z)}{w-z} & \text{αν } w \neq z \\ f'(z) & \text{αν } w = z \end{cases}$$

είναι ολόμορφη στο $U$ και $f(w) - f(z) = (w - z)g(w)$ για κάθε $w \in U$. Εφαρμόζοντας στην σχέση αυτή τον μορφισμό $\Phi_h$, έχουμε

$$f(x) - f(z)1 = (x - z1)g(x).$$

Αφού $x - z1 \notin \mathrm{Inv}(\mathcal{A})$, η ισότητα αυτή δείχνει ότι $f(x) - f(z)1 \notin \mathrm{Inv}(\mathcal{A})$, δηλαδή ότι $f(z) \in \sigma(f(x))$. Επομένως $f(\sigma(x)) \subseteq \sigma(f(x))$.

Αντίστροφα αν $\zeta \notin f(\sigma(x))$ τότε το σύνολο $V = \{w \in \mathbb{C} : f(w) \neq \zeta\}$ είναι ανοικτό και περιέχει το $\sigma(x)$, και η συνάρτηση $h$ όπου $h(w) = (f(w) - \zeta)^{-1}$ ορίζεται και είναι ολόμορφη στο $V$. Ορίζεται λοιπόν το $h(x) \in \mathcal{A}$ και ισχύει

$$h(x)(f(x) - \zeta 1) = (f(x) - \zeta 1)h(x) = 1,$$

άρα $f(x) - \zeta 1 \in \mathrm{Inv}(\mathcal{A})$, δηλαδή $\zeta \notin \sigma(f(x))$. Επομένως $f(\sigma(x)) \supseteq \sigma(f(x))$. $\square$

**Πόρισμα 7.11** *Αν $f \in \mathrm{Hol}(x)$, τότε*

$$\rho(f(x)) = \sup\{|f(z)| : z \in \sigma(x)\}.$$

*Ειδικότερα, αν $w \notin \sigma(x)$,*

$$d(w, \sigma(x)) = \frac{1}{\rho((w1 - x)^{-1})}.$$

**Απόδειξη** Η πρώτη ισότητα είναι άμεση από το θεώρημα φασματικής απεικόνισης, και η δεύτερη είναι εφαρμογή της πρώτης στην συνάρτηση $f(z) = (w - z)^{-1}$.

**Πρόταση 7.12 (Σύνθεση απεικονίσεων)** *Αν $f \in \mathrm{Hol}(x)$ και $g \in \mathrm{Hol}(f(x))$ τότε $h := g \circ f \in \mathrm{Hol}(x)$ και $h(x) = g(f(x))$.*

*(Ακριβέστερα η σχέση $g \circ f \in \mathrm{Hol}(x)$ σημαίνει: υπάρχει ανοικτό $U \supseteq \sigma(x)$ ώστε $f \in H(U)$ και η $g \circ f$ να ορίζεται και να είναι ολόμορφη στο $U$.)*

**Απόδειξη** Θέτω $y = f(x)$. Υπάρχουν $U_f, U_g \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτά με $\sigma(x) \subseteq U_f$ και $\sigma(y) \subseteq U_g$ ώστε $f \in H(U_f)$ και $g \in H(U_g)$. Ορίζω

$$U_h = \{z \in U_f : f(z) \in U_g\} = U_f \cap f^{-1}(U_g)$$

και
$$h(z) = g(f(z)), \quad z \in U_h.$$
Το $U_h$ είναι ανοικτό και η $h$ είναι ολόμορφη στο $U_h$.

**Ισχυρισμός** $\sigma(x) \subseteq U_h$.

Πράγματι, αν $z \in \sigma(x)$ τότε $z \in U_f$ και $f(z) \in f(\sigma(x))$. Αλλά $f(\sigma(x)) = \sigma(f(x)) = \sigma(y)$ από το θεώρημα φασματικής απεικόνισης. Επειδή $\sigma(y) \subseteq U_g$ έχω $f(z) \in U_g$. Δηλαδή $z \in U_h$.

Εδειξα λοιπόν ότι $h \in \mathrm{Hol}(x)$, δηλαδή ότι το $h(x)$ ορίζεται, και μένει να δείξω ότι $h(x) = g(y)$.

Επιλέγω ένα θετικά προσανατολισμένο σύστημα καμπύλων $\Gamma_g$ που περικλείει το $\sigma(y)$ στο $U_g$. Τότε
$$g(y) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_g} g(w)(w1 - y)^{-1}dw. \tag{7}$$

Για να εκφράσω το $(w1 - y)^{-1} = (w1 - f(x))^{-1}$ μέσω του ολοκληρωτικού τύπου πρέπει να επιλέξω ένα κατάλληλο σύστημα καμπύλων.

Το σύνολο $\mathrm{ins}\,\Gamma_g = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Ind}_{\Gamma_g}(z) = 1\} = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Ind}_{\Gamma_g}(z) \neq 0\}$ είναι ανοικτό και το $\sigma(y) \subseteq \mathrm{ins}\,\Gamma_g$ είναι συμπαγές, οπότε υπάρχει ανοικτό $W$ ώστε $\sigma(y) \subseteq W \subseteq \overline{W} \subseteq \mathrm{ins}\,\Gamma_g$. Αφού $f(\sigma(x)) = \sigma(y)$ και η $f$ είναι συνεχής, το $V := f^{-1}(W) \cap U_h$ είναι ανοικτό με
$$\sigma(x) \subseteq V \subseteq U_h \;\text{ και }\; \sigma(y) = f(\sigma(x)) \subseteq f(V) \subseteq \overline{f(V)} \subseteq \mathrm{ins}\,\Gamma_g.$$

Επιλέγω ένα θετικά προσανατολισμένο σύστημα καμπύλων $\Gamma$ που περικλείει το $\sigma(x)$ στο $V$.

Παρατηρώ ότι για κάθε $w \in \Gamma_g^*$ ισχύει $w \notin f(V)$ άρα η συνάρτηση $f_w(z) := \frac{1}{w - f(z)}$ ορίζεται και είναι ολόμορφη στο $V$. Επομένως $f_w \in \mathrm{Hol}(x)$ και
$$\begin{aligned}(w1 - f(x))^{-1} &= f_w(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f_w(z)(z1 - x)^{-1}dz \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{1}{w - f(z)}(z1 - x)^{-1}dz. \end{aligned} \tag{8}$$

Αντικαθιστώντας την (8) στην (7) έχω
$$\begin{aligned} g(y) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_g} g(w)(w1 - f(x))^{-1}dw \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_g} g(w)\left(\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{1}{w - f(z)}(z1 - x)^{-1}dz\right)dw. \end{aligned}$$

Απο το Θεώρημα Fubini (η συνάρτηση $(w,z) \longrightarrow \frac{g(w)}{w-f(z)}(z1-x)^{-1}$ είναι συνεχής στο $\Gamma_g^* \times \Gamma^*$) η τελευταία παράσταση ισούται με

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_g}\frac{g(w)}{w-f(z)}dw\right)(z1-x)^{-1}dz.$$

Αλλά για κάθε $z \in \Gamma^*$ έχω $z \in V$ άρα $f(z) \in f(V) \subseteq \mathrm{ins}(\Gamma_g)$, οπότε

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_g}\frac{g(w)}{w-f(z)}dw = g(f(z)) = h(z)$$

από το Θεώρημα Cauchy, άρα τελικά

$$g(y) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} h(z)(z1-x)^{-1}dz = h(x)$$

και η απόδειξη έχει ολοκληρωθεί. □

## 7.3 Η απεικόνιση $x \longrightarrow f(x)$

Μέχρι τώρα, είχαμε σταθεροποιήσει ένα στοιχείο $x$ σε μια άλγεβρα Banach $A$ με μονάδα, και είχαμε μελετήσει την απεικόνιση $f \longrightarrow f(x)$ καθώς η $f$ μεταβάλλεται στο σύνολο $\mathrm{Hol}(x)$ των (κλάσεων) συναρτήσεων που είναι ολόμορφες σε μία περιοχή του $\sigma(x)$.

Αλλάζουμε τώρα οπτική: σταθεροποιούμε μία συνάρτηση $f$, ολόμορφη σε ένα ανοικτό σύνολο $U$ και μελετάμε την $f(x)$ *ως συνάρτηση του* $x$. Για να ορίζεται όμως το $f(x)$ πρέπει το $\sigma(x)$ να περιέχεται στο $U$. Αυτό οδηγεί στον ακόλουθο ορισμό

**Ορισμός 7.3** *Έστω $U \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό. Θέτουμε*

$$\mathcal{A}_U = \{x \in \mathcal{A} : \sigma(x) \subseteq U\}.$$

Η επόμενη Πρόταση εξασφαλίζει ότι το $\mathcal{A}_U$ είναι ανοικτό σύνολο.

**Πρόταση 7.13** *Έστω $x \in \mathcal{A}$. Για κάθε ανοικτό $U \subseteq \mathbb{C}$ με $\sigma(x) \subseteq U$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε αν $y \in \mathcal{A}$ και $\|y - x\| < \delta$ τότε $\sigma(y) \subseteq U$.*

**Απόδειξη** Αν το συμπέρασμα δεν ίσχυε, θα υπήρχε $U \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό με $\sigma(x) \subseteq U$ και $y_n \in \mathcal{A}$ ώστε $\|y_n - x\| \longrightarrow 0$ αλλά $\sigma(y_n) \nsubseteq U$ για κάθε $n$. Δηλαδή θα υπήρχε $z_n \in \sigma(y_n) \cap (\mathbb{C} \backslash U)$ για κάθε $n$. Επειδή $|z_n| \leq \|y_n\|$, η $(z_n)$ είναι φραγμένη. Περνώντας σε υπακολουθία, μπορώ να υποθέσω ότι η $(z_n)$ συγκλίνει, έστω στο $z$. Επειδή $z_n \notin U$ έχω $z \notin U$ άρα $z \notin \sigma(x)$, δηλαδή $z1 - x \in \text{Inv}(\mathcal{A})$. Όμως $z_n 1 - y_n \in \mathcal{A} \backslash \text{Inv}(\mathcal{A})$ και $z_n 1 - y_n \longrightarrow z1 - x$, πράγμα που αντιφάσκει με το γεγονός ότι το $\mathcal{A} \backslash \text{Inv}(\mathcal{A})$ είναι κλειστό. $\square$

**Θεώρημα 7.14** *Έστω $U \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό και $f \in H(U)$. Η απεικόνιση*

$$(\mathcal{A}_U, \|\cdot\|) \longrightarrow (\mathcal{A}, \|\cdot\|) : x \longrightarrow f(x)$$

*είναι συνεχής.*

**Απόδειξη.** Έστω $x \in \mathcal{A}_U$.

Σταθεροποιώ ένα θετικά προσανατολισμένο σύστημα καμπύλων $\Gamma$ που περικλείει το $\sigma(x)$ στο $U$. Το σύνολο

$$V = \text{ins}\,\Gamma = \{z \in \mathbb{C} : \text{Ind}_\Gamma(z) = 1\} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Ind}_\Gamma(z) \neq 0\}$$

είναι ανοικτό και $\sigma(x) \subseteq V \subseteq U$.

Από την Πρόταση 7.13, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε $y \in \mathcal{A}$ με $\|y\| < \delta$ να ισχύει $\sigma(x+y) \subseteq V$. Επεται ότι $x + y \in \mathcal{A}_U$ και ότι το σύστημα καμπύλων $\Gamma$ περικλείει το $\sigma(x+y)$ στο $U$. Επομένως το ολοκλήρωμα

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(w)(w1 - (x+y))^{-1} dw$$

ορίζεται και ισούται με $f(x+y)$. Εχουμε

$$f(x) - f(x+y) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(w)((w1-x)^{-1} - (w1 - (x+y))^{-1}) dw$$

επομένως, από το Λήμμα 7.6,

$$\|f(x) - f(x+y)\| \leq \frac{V(\Gamma)}{2\pi} \|f\|_\Gamma \sup\{\|(w1-x)^{-1} - (w1-(x+y))^{-1}\| : w \in \Gamma^*\}.$$

Έστω $M = \sup\{\|(w1-x)^{-1}\| : w \in \Gamma^*\}$. Το $M$ είναι πεπερασμένο, γιατί η συνάρτηση $w \longrightarrow (w1-x)^{-1}$ είναι (ορισμένη και) συνεχής στο συμπαγές $\Gamma^*$.

Αν $y \in \mathcal{A}$ με $\|y\| < \min(\frac{1}{2M}, \delta)$ τότε $\|y\| < \dfrac{1}{2\|(w1-x)^{-1}\|}$ για κάθε $w \in \Gamma^*$, επομένως από το Λήμμα 4.3 έχουμε

$$\|(w1-(x+y))^{-1} - (w1-x)^{-1}\| < 2\|(w1-x)^{-1}\|^2.\|y\| \leq 2M^2\|y\|$$

για κάθε $w \in \Gamma^*$ και συνεπώς

$$\|f(x) - f(x+y)\| \leq \frac{V(\Gamma)}{\pi}\|f\|_\Gamma \, M^2\|y\|$$

πράγμα που δείχνει ότι $\|f(x) - f(x+y)\| \longrightarrow 0$ καθώς $y \longrightarrow 0$. $\square$

## 7.4 Η προβολή του Riesz

Ενα στοιχείο $p$ μίας άλγεβρας $A$ λέγεται **ταυτοδύναμο** αν $p^2 = p$. Εν γένει η $\mathcal{A}$ μπορεί να μην περιέχει ταυτοδύναμα εκτός από τα τετριμμένα, δηλαδή το 0 και το 1. Αυτό συμβαίνει για παράδειγμα στην $C(K)$, όταν ο συμπαγής χώρος $K$ είναι συνεκτικός. Αν όμως ο $K$ δεν είναι συνεκτικός, η χαρακτηριστική συνάρτηση $\chi_F$ κάθε μη κενού ανοικτού και κλειστού γνήσιου υποσυνόλου $F$ του $K$ είναι μη τετριμμένο ταυτοδύναμο στοιχείο της $C(K)$.

Θα δείξω ότι κάθε άλγεβρα Banach $A$ με μονάδα που περιέχει ένα στοιχείο με μη συνεκτικό φάσμα περιέχει και ένα μη τετριμμένο ταυτοδύναμο στοιχείο.

Υποθέτω ότι το φάσμα ενός στοιχείου $x \in A$ μπορεί να γραφεί στην μορφή $\sigma(x) = F_1 \cup F_2$ όπου $F_1, F_2$ είναι ξένα κλειστά σύνολα. Επιλέγω ξένα ανοικτά σύνολα $U_1, U_2$ ώστε $F_i \subseteq U_i$ και ονομάζω $f_i : U_1 \cup U_2 \longrightarrow \mathbb{C}$ την χαρακτηριστική συνάρτηση του $U_i$. Τότε η $f_i$ είναι ολόμορφη στην περιοχή $U = U_1 \cup U_2$ του $\sigma(A)$, άρα $f_i \in \text{Hol}(x)$, οπότε το $f_i(x)$ είναι καλά ορισμένο στοιχείο της $A$.

Γράφουμε

$$p_i = f_i(x) \qquad (i = 1, 2).$$

Οι επόμενες ιδιότητες είναι άμεσες συνέπειες του συναρτησιακού λογισμού:

Επειδή $f_i f_j = f_i \delta_{ij}$, έχουμε $p_i p_j = p_i \delta_{ij}$ και ειδικότερα $p_i^2 = p_i$. Επειδή $f_1 + f_2 = 1$ στο $U$, έχουμε $p_1 + p_2 = 1$. Αν $\emptyset \neq F_i \neq \sigma(x)$ τότε $f_i(\sigma(x)) = \{0, 1\}$, και επομένως $\sigma(p_i) = \{0, 1\}$ από το θεώρημα φασματικής απεικόνισης. Επομένως τα $p_i$ είναι μη τετριμμένα ταυτοδύναμα στοιχεία της $A$ (μάλιστα της $\{x\}''$).

Αν επιλέξω ένα θετικά προσανατολισμένο σύστημα καμπύλων $\Gamma_i$ που να περικλείει το $F_i$ στο $U \backslash F_j$ $(i \neq j)$, τότε το σύστημα $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ περικλείει το $\sigma(x)$

στο $U$, και άρα

$$p_1 = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f_1(w)(w1-x)^{-1}dw = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}(w1-x)^{-1}dw$$

αφού η $f_1$ ισούται με 1 στο $\Gamma_1$ και με 0 στο $\Gamma_2$.

**Παρατήρηση.** Το γεγονός ότι $p_1 \neq 1$ όταν $F_1 \neq \sigma(x)$ δείχνει ότι, στον ορισμό του συναρτησιακού λογισμού (βλ. Ορισμό 7.1), το σύστημα καμπύλων $\Gamma$ πρέπει να περικλείει *ολόκληρο* το $\sigma(x)$.

Συνοψίζουμε:

**Ορισμός 7.4** *Έστω $F$ κλειστό υποσύνολο του φάσματος $\sigma(x)$ ενός στοιχείου $x$ μιάς άλγεβρας Banach $\mathcal{A}$ με μονάδα, με την ιδιότητα το $\sigma(x)\backslash F$ να είναι επίσης κλειστό [9]. Για κάθε θετικά προσανατολισμένο σύστημα καμπύλων $\Gamma$ στο $\mathbb{C}$ που περικλείει το $F$ στο συμπλήρωμα του $\sigma(x)\backslash F$ (δηλ. τέτοιο ώστε $F \subseteq \operatorname{ins}\Gamma$ και $\sigma(x)\backslash F \subseteq \operatorname{out}\Gamma$) ορίζουμε το* **ταυτοδύναμο στοιχείο του Riesz** $p_F \in A$ *από την σχέση*

$$p_F = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (z1-x)^{-1}dz.$$

**Πρόταση 7.15** *(i) $p_F \in \{x\}''$.*

*(ii) $p_F^2 = p_F$.*

*(iii) $p_F = 0$ αν και μόνον αν $F = \emptyset$ και $p_F = 1$ αν και μόνον αν $F = \sigma(x)$.*

**Παρατήρηση** Γενικότερα αν $\sigma(x) = F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_n$ όπου τα $F_i$ είναι κλειστά ξένα υποσύνολα του $\mathbb{C}$, τότε τα αντίστοιχα ταυτοδύναμα στοιχεία $p_{F_i} = p_i$ ικανοποιούν $p_i p_j = p_j p_i = \delta_{ij} p_j$ και $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1$.

[9] δηλαδή το $F$ να είναι ανοικτό και κλειστό στην σχετική τοπολογία του $\sigma(x)$

# 8 Η προβολή του Riesz σε άλγεβρες τελεστών

Στην παράγραφο αυτή θα εξετάσουμε ταυτοδύναμα στοιχεία της άλγεβρας Banach $B(X)$ όπου $X$ είναι χώρος Banach.

**Συμβολισμός** Αν $T$ είναι (φραγμένος) τελεστής που δρά σ'έναν χώρο Banach $Y$, με $\sigma(T)$ θα συμβολίζουμε το φάσμα του $T$ *ως προς την άλγεβρα Banach* $B(Y)$. Έτσι, $\lambda \notin \sigma(T)$ αν και μόνον αν ο τελεστής $\lambda I - T$ απεικονίζει τον $Y$ 1-1 και επί του $Y$ (οπότε ο αντίστροφός του θα είναι φραγμένος, από το θεώρημα ανοικτής απεικόνισης).

## 8.1 Γενικές ιδιότητες

Έστω $X$ χώρος Banach και $A \in B(X)$. Σταθεροποιούμε ένα ανοικτό και κλειστό υποσύνολο $F \subseteq \sigma(A)$ και συμβολίζουμε το αντίστοιχο ταυτοδύναμο στοιχείο, ή προβολή, του Riesz με $P_F$ (παρ. 7.4).

**Θεώρημα 8.1** *Εστω $X_1 = P_F(X), X_2 = (I - P_F)(X)$. Τότε οι $X_1, X_2$ είναι κλειστοί υπόχωροι του $X$ τέτοιοι ώστε*

*(i) $X_1 \cap X_2 = \{0\}$ και $X_1 + X_2 = X$*

*(ii) $T(X_i) \subseteq X_i$ για κάθε $T \in \{A\}'$ (λέμε ότι ο $X_i$ είναι **υπεραναλλοίωτος** για τον $A$)*

*(iii) αν $A_i \in B(X_i)$ είναι ο περιορισμός του $A$ στον $X_i$ τότε $\sigma(A_1) = F$ και $\sigma(A_2) = \sigma(A) \setminus F$.*

*Δηλαδή σε κάθε (μη τετριμμένο) ανοικτό και κλειστό υποσύνολο του $\sigma(\mathrm{A})$ αντιστοιχεί ένα (μη τετριμμένο)* συμπληρωματικό *ζεύγος από κλειστούς υποχώρους που είναι υπεραναλλοίωτοι για τον $A$.*

**Απόδειξη (i)** Είναι απλή άσκηση, χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι ο $P_F$ είναι συνεχής και ταυτοδύναμος, να δείξεις ότι $X_1 = \ker(I - P_F)$ και επομένως ότι ο $X_1$ είναι κλειστός[10] και επίσης ότι ικανοποιείται η (i).

**(ii)** Αν $T \in \{A\}'$, τότε $TP_F = P_F T$ αφού $P_F \in \{A\}''$. Επομένως για κάθε $x \in X_1$ έχουμε

$$Tx = T(P_F x) = P_F(Tx) \in P_F(X) = X_1$$

[10]θυμίζω ότι εν γένει το πεδίο τιμών ενός φραγμένου τελεστή μπορεί να μην είναι κλειστό

άρα $T(X_1) \subseteq X_1$. Ομοίως $T(X_2) \subseteq X_2$.

**(iii)** Αρκεί να δείξω ότι (a) $\sigma(A) = \sigma(A_1) \cup \sigma(A_2)$ και ότι
(b) $\sigma(A_1) \subseteq F$ και $\sigma(A_2) \subseteq \sigma(A) \backslash F$.

**Απόδειξη του (a)** Εστω $z \notin \sigma(A)$. Θέτω $R_z = (zI - A)^{-1}$. Αφού $R_z \in \{A\}'' \subseteq \{A\}'$ έχουμε $R_z(X_i) \subseteq X_i$ από το (ii). Συμβολίζουμε τον περιορισμό του $R_z$ στον $X_i$ με $R_z^{(i)}$, οπότε $R_z^{(i)} \in B(X_i)$.

Για κάθε $x \in X_1$, γράφοντας $I_i \in B(X_i)$ για τον ταυτοτικό τελεστή, έχουμε

$$R_z^{(1)}(zI_1 - A_1)x = R_z(zI - A)x = x$$

και ομοίως $(zI_1 - A_1)R_z^{(1)}x = x$, άρα $R_z^{(1)} = (zI_1 - A_1)^{-1}$.
Ομοίως $R_z^{(2)} = (zI_2 - A_2)^{-1}$. Επομένως $z \notin \sigma(A_1)$ και $z \notin \sigma(A_2)$.

Αντίστροφα, έστω $z \notin \sigma(A_1)$ και $z \notin \sigma(A_2)$. Τότε υπάρχουν τελεστές $T_i \in B(X_i)$ ώστε

$$T_i(zI_i - A_i) = (zI_i - A_i)T_i = I_i \quad (i = 1, 2).$$

Ορίζω έναν τελεστή $T$ στον $X$ από την σχέση $T(x_1 + x_2) = T_1x_1 + T_2x_2$ για $x_i \in X_i$. Επειδή $T = T_1P_F + T_2(I - P_F)$, ο $T$ είναι φραγμένος τελεστής. Αν $x \in X_1$, τότε $(zI - A)x = (zI_1 - A_1)x \in X_1$ και $Tx = T_1x \in X_1$, άρα $T(zI - A)x = (zI - A)Tx = x$. Το ίδιο ισχύει και αν $x \in X_2$, άρα και για κάθε $x \in X = X_1 + X_2$. Επομένως $T = (zI - A)^{-1}$ άρα $z \notin \sigma(A)$. Αυτό αποδεικνύει το (a).

**Απόδειξη του (b)** Εστω $z \notin F$. Επιλέγω ανοικτά ξένα σύνολα $U_i$ ώστε $F \subseteq U_1$ και $(\sigma(A) \backslash F) \cup \{z\} \subseteq U_2$. Εστω $f$ η χαρακτηριστική του $U_1$ και έστω

$$g(w) = \begin{cases} (z - w)^{-1} & w \in U_1 \\ 0 & w \in U_2. \end{cases}$$

Τότε οι $f, g$ είναι ολόμορφες στο $U = U_1 \cup U_2$ άρα $f, g \in \mathrm{Hol}(A)$. Επειδή $f(w) = g(w)(z - w)$ για κάθε $w \in U$ έχουμε

$$f(A) = g(A)(zI - A) = (zI - A)g(A).$$

Αλλά $f(A) = P_F$ άρα, για κάθε $x \in X_1$,

$$x = f(A)x = g(A)(zI - A)x = (zI - A)g(A)x.$$

Ομως $g(A) \in \{A\}'$ και επομένως $g(A)(X_1) \subseteq X_1$. Αρα αν $T : X_1 \to X_1$ είναι ο περιορισμός του $g(A)$ στο $X_1$ η προηγούμενη ισότητα δίνει

$$x = T(zI_1 - A_1)x = (zI_1 - A_1)Tx$$

για κάθε $x \in X_1$, πράγμα που δείχνει ότι $z \notin \sigma(A_1)$.

Όμοια αποδεικνύεται ότι $\sigma(A_2) \subseteq \sigma(A) \backslash F$. □

## 8.2 Μεμονωμένα σημεία του φάσματος

Υποθέτω τώρα ότι το $z_o$ είναι μεμονωμένο σημείο του $\sigma(A)$. Συμβολίζουμε $P_o$ την προβολή Riesz $P_{\{z_o\}}$, $X_o$ τον υπόχωρο $X_{\{z_o\}}$ και $A_o$ τον περιορισμό του $A$ στον $X_o$. Τότε από το Θεώρημα 8.1 έχουμε ότι $A(X_o) \subseteq X_o$ και ότι $\sigma(A_o) = \{z_o\}$. Επεται ότι $\sigma(A_o - z_oI) = \{0\}$, άρα $\lim \|(A_o - z_oI)^k\|^{1/k} = 0$ (Θεώρημα 5.3).

**Πρόταση 8.2** $\qquad X_o = \{x \in X : \lim_n \|(z_oI - A)^n x\|^{1/n} = 0\}$.

**Απόδειξη** Εστω $x \in X_o$. Τότε

$$\|(z_oI - A)^k x\|^{1/k} = \|(z_oI - A_o)^k x\|^{1/k} \leq \|(z_oI - A_o)^k\|^{1/k} \|x\|^{1/k},$$

άρα $\lim_n \|(z_oI - A)^n x\|^{1/n} = 0$.

Υποθέτω αντίστροφα ότι το $x \in X$ ικανοποιεί $\lim_n \|(z_oI - A)^n x\|^{1/n} = 0$. Ονομάζω $B$ τον τελεστή $A - z_oI$ και $B_o, B_1$ τους περιορισμούς του $B$ στους υποχώρους $X_o$ και $(I - P_o)X$. Γράφω επίσης $x = x_o + x_1$ όπου $x_o \in X_o$ και $x_1 \in X_1$. Απο το Θεώρημα 8.1 έχω ότι το φάσμα του τελεστή $B_1$ δεν περιέχει το 0 (διότι το $z_o$ δεν ανήκει στο φάσμα του αντίστοιχου περιορισμού του $A$). Συνεπώς ο $B_1$ είναι αντιστρέψιμος, άρα για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε
$\|x_1\| = \|B_1^{-n} B_1^n x_1\| \leq \|B_1^{-n}\|.\|B_1^n x_1\| \leq \|B_1^{-1}\|^n.\|B_1^n x_1\|$.

Αν ονομάσω $\alpha_n = \|B^n x\|^{1/n}$ και $\gamma_n = \|B_o^n x_o\|^{1/n}$ τότε έχω

$$\frac{\|x_1\|}{\|B_1^{-1}\|^n} \leq \|B_1^n x_1\| = \|B^n x_1\| = \|B^n(x - x_o)\| \leq \|B^n x\| + \|B^n x_o\| = \alpha_n^n + \gamma_n^n .$$

Επειδή $x_o \in X_o$ έχουμε $\gamma_n \to 0$ από την προηγούμενη παράγραφο και εξ υποθέσεως έχουμε $\alpha_n \to 0$. Από την τελευταία ανισότητα έπεται όμως τότε ότι $\|x_1\|^{1/n} \to 0$, πράγμα που δεν μπορεί να συμβεί αν $x_1 \neq 0$.
Συνεπώς $x = x_o \in X_o$. □

## 8.3 Πόλοι του επιλύοντα τελεστή

Έστω $A \in \mathcal{B}(X)$. Θεωρούμε τον **επιλύοντα τελεστή** $R_z := (zI - A)^{-1}$. Ο τελεστής αυτός ορίζεται για κάθε $z$ στο ανοικτό σύνολο $\mathbb{C}\backslash\sigma(A)$ και η συνάρτηση $\mathbb{C}\backslash\sigma(A) \longrightarrow \mathcal{B}(X) : z \longrightarrow R_z$ είναι ολόμορφη (Παράδειγμα 6.1).

Εστω $z_o \in \sigma(A)$ μεμονωμένο σημείο. Τότε το $z_o$ είναι μεμονωμένη ανωμαλία της συνάρτησης $z \to R_z$, που δεν είναι επουσιώδης (πράγματι, αν το $\lim\limits_{z\to z_o} R_z = T$ υπάρχει, τότε ελέγχεται εύκολα ότι $T(z_oI - A) = (z_oI - A)T = I$, οπότε $z_o \notin \sigma(A)$). Επομένως, από το Πόρισμα 6.9 η συνάρτηση $z \to R_z$ έχει ανάπτυγμα Laurent κοντά στο $z_o$:

$$R_z = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(z - z_o)^k + \sum_{k=1}^{\infty} B_k(z - z_o)^{-k}$$

όπου $A_k, B_k \in \mathcal{B}(X)$. Έχουμε

$$B_k = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (w - z_o)^{k-1}(wI - A)^{-1}dw$$

όπου $\gamma$ είναι κύκλος με κέντρο $z_o$ και ακτίνα $r$ τέτοια ώστε το $\gamma^*$ να μην τέμνει το $\sigma(A)\backslash\{z_o\}$. Μάλιστα, το $z_o$ είναι πόλος τάξης $n$ αν και μόνον αν $B_n \neq 0$ και $B_m = 0$ για $m > n$.

**Λήμμα 8.3** *Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ έχουμε*

$$B_1 = P_{\{z_o\}} \;\; \text{και} \;\; B_k = (A - z_oI)^{k-1}P_{\{z_o\}}.$$

**Απόδειξη.** Επιλέγω ανοικτά ξένα σύνολα $U_1, U_2$ ώστε

$$\overline{B(z_o, r)} \subseteq U_1 \quad \text{και} \quad \sigma(A)\backslash\{z_o\} \subseteq U_2\,.$$

θέτω $U = U_1 \cup U_2$ και έστω $f : U \to \mathbb{C}$ η χαρακτηριστική του $U_1$. Τότε $f \in \mathrm{Hol}(A)$ και $f(A) = P_{\{z_o\}}$.

Εστω $\Gamma$ ένα προσανατολισμένο σύστημα καμπύλων που περικλείει το $\sigma(A)\backslash\{z_o\}$ στο $U_2$. Παρατήρησε ότι το σύστημα καμπύλων $\Gamma_1 = \Gamma + \gamma$ περικλείει το $\sigma(A)$ στο $U$. Επομένως, αν $k \in \mathbb{N}$ και $g_k(z) = f(z)(z - z_o)^k$, τότε η $g_k$ ορίζεται και είναι ολόμορφη στο $U$, και έχουμε

$$\begin{aligned}(A-z_oI)^kP_{\{z_o\}} = (A-z_oI)^kf(A) = g_k(A) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} g_k(w)(wI-A)^{-1}dw \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} g_k(w)(wI-A)^{-1}dw + \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} g_k(w)(wI-A)^{-1}dw \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}(w-z_o)^k(wI-A)^{-1}dw = B_k\end{aligned}$$

αφού η $g_k(z)$ μηδενίζεται στο $\Gamma^*$ και ισούται με $(z-z_o)^k$ στο $\gamma^*$. □

Από το Λήμμα έπεται ότι $B_k\mid_{X_o} = (A_o - z_oI)^{k-1}$, και αν $B_k = 0$ τότε $B_n = 0$ για κάθε $n \geq k$.

Αυτό αποδεικνύει την

**Πρόταση 8.4** *Ενα μεμονωμένο σημείο $z_o$ του $\sigma(A)$ είναι πόλος της $R_z$ τάξης $n_o$ αν και μόνον αν $(A-z_oI)^{n_o}P_{\{z_o\}} = 0$ και $(A-z_oI)^{n_o-1}P_{\{z_o\}} \neq 0$, δηλαδή αν και μόνον αν $(A_o - z_oI)^{n_o} = 0$ και $(A_o - z_oI)^{n_o-1} \neq 0$. Αρα το $z_o$ είναι ουσιώδης ανωμαλία της $R_z$ αν και μόνον αν ο τελεστής $A_o - z_oI$ (είναι ψευδομηδενοδύναμος αλλά) δεν είναι μηδενοδύναμος.*

Η ακολουθία $\{\ker((z_oI-A)^n)\}$ είναι αύξουσα ακολουθία κλειστών υποχώρων του $X$ που είναι $A$-αναλλοίωτοι. Επομένως το σύνολο

$$Y_o = \bigcup_{n=1}^{\infty} \ker((z_oI-A)^n) = \{x \in X : \exists n \in \mathbb{N} : (z_oI-A)^n x = 0\}$$

των **γενικευμένων ιδιοδιανυσμάτων** του $A$ είναι γραμμικός χώρος (όχι αναγκαστικά κλειστός). Εν γένει μπορεί να είναι $\{0\}$. Αν όμως ο $A$ έχει γενικευμένα μη μηδενικά ιδιοδιανύσματα, τότε έχει ιδιοδιανύσματα. Πράγματι, έστω $x \neq 0$, $x \in Y_o$, και έστω $n \in \mathbb{N}$ ο ελάχιστος ώστε $(z_oI-A)^n x = 0$. Αν $n = 1$, το $x$ είναι ιδιοδιάνυσμα του $A$. Αν όχι, τότε το $y := (z_oI-A)^{n-1}x$ είναι (μη μηδενικό) ιδιοδιάνυσμα του $A$.

Αν ένα $x \in X$ ικανοποιεί $(z_oI-A)^n x = 0$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ τότε βέβαια $\lim_k \|(z_oI-A)^k x\|^{1/k} = 0$ οπότε $x \in X_o$ (Πρόταση 8.2). Δηλαδή

$$Y_o \subseteq X_o.$$

Πότε ισχύει ισότητα;

**Πρόταση 8.5** *Ενα μεμονωμένο σημείο $z_o$ του $\sigma(A)$ είναι πόλος της $R_z$ αν και μόνον αν*

$$X_o = \{x \in X : \exists\, n \in \mathbb{N} : (z_o I - A)^n x = 0\}.$$

*Έχουμε τότε* [11]

$$0 \neq \ker(z_o I - A) \subset \ker((z_o I - A)^2) \subset ... \subset \ker((z_o I - A)^{n_o}) = X_o$$

*και* $\ker((z_o I - A)^n) = X_o$ *για κάθε* $n \geq n_o$, *όπου* $n_o$ *είναι η τάξη του πόλου. Ειδικότερα, το* $z_o$ *είναι ιδιοτιμή του* $A$.

**Απόδειξη.** Υποθέτω ότι $Y_o = X_o$. Τότε $X_o = \cup_n X_n$, όπου κάθε $X_n = \ker((z_o I - A)^n)$ είναι κλειστός υπόχωρος του χώρου Banach $X_o$. Από το Θεώρημα Κατηγορίας του Baire, κάποιος $X_n$ θα έχει μη κενό εσωτερικό, οπότε $X_n = X_o$. Αν $n_o$ είναι ο ελάχιστος ακέραιος που ικανοποιεί αυτήν την ισότητα, τότε $(z_o I - A)^{n_o}(X_o) = \{0\}$ (άρα $\ker((z_o I - A)^{n_o}) = X_o$) και
$(z_o I - A)^{n_o - 1}(X_o) \neq \{0\}$ (άρα $\ker((z_o I - A)^{n_o - 1}) \neq X_o$), επομένως $B_{n_o+1} = 0$ και $B_{n_o} \neq 0$, δηλαδή το $z_o$ είναι πόλος της $R_z$ τάξης $n_o$.

Αν αντίστροφα το $z_o$ είναι πόλος της $R_z$ τάξης $n_o$, τότε από την Πρόταση 8.4 ο τελεστής $(z_o I - A)|_{X_o}$ είναι μηδενοδύναμος τάξης $n_o$, δηλαδή $(z_o I - A)^{n_o}(X_o) = \{0\}$ και $(z_o I - A)^{n_o - 1}(X_o) \neq \{0\}$. □

**Παρατηρήσεις (i)** Από την προηγούμενη απόδειξη είναι φανερό ότι ο $Y_o$ είναι κλειστός υπόχωρος του $X$ αν και μόνον αν η ακολουθία των υποχώρων $\{\ker((z_o I - A)^n)\}$ τερματίζεται. Δεν αρκεί όμως αυτό για να είναι το $z_o$ πόλος της $R_z$ :

**Παράδειγμα** Ο τελεστής

$$W : \ell^2 \to \ell^2 \;:\; (a_1, a_2, ...) \to (0, 0, \frac{a_2}{2}, \frac{a_3}{3}, ...)$$

είναι ψευδομηδενοδύναμος (άσκηση), αλλά όχι μηδενοδύναμος αφού $W^n(e_n) \neq 0$ όταν $n > 1$. Παρόλα αυτά ισχύει $0 \neq \ker(W) = ... = \ker(W^n) = [e_1]$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

**(ii)** Γενικότερα αποδεικνύεται ότι ένα σημείο $z_o \in \mathbb{C}$ είναι πόλος της $R_z$ αν και μόνον αν και οι δύο ακολουθίες

$$\ker(z_o I - A) \subseteq \ker((z_o I - A)^2) \subseteq ... \subseteq \ker((z_o I - A)^n) \subseteq ...$$

και

$$\operatorname{ran}(z_o I - A) \supseteq \operatorname{ran}((z_o I - A)^2) \supseteq ... \supseteq \operatorname{ran}((z_o I - A)^n) \supseteq ...$$

[11] ο συμβολισμός $A \subset B$ σημαίνει $A \subseteq B$ και $A \neq B$

έχουν θετικό και πεπερασμένο μήκος. Τότε έχουν αναγκαστικά το ίδιο μήκος, που ταυτίζεται με την τάξη του $n_o$ του πόλου, και μάλιστα
$\ker P_o = \text{ran}(z_o I - A)^{n_o}$, οπότε

$$X = \ker(z_o I - A)^{n_o} \oplus \text{ran}(z_o I - A)^{n_o}.$$

(βλ. [4], Πρόταση 50.2).

**(iii)** Δείξαμε ότι αν το $z_o$ είναι πόλος της $R_z$ τότε είναι ιδιοτιμή του $A$. Το αντίστροφο δεν αληθεύει εν γένει: μία ιδιοτιμή του $A$ δεν είναι αναγκαστικά πόλος της $R_z$, ούτε πάντα μεμονωμένο σημείο του $\sigma(A)$ (Παράδειγμα;)

**(iv)** Υπό της συνθήκες της Πρότασης 8.5, δεν έπεται κατ'ανάγκην ότι ο $X_o$ ή κάποιος από τους $\ker((z_o I - A)^n)$ έχει πεπερασμένη διάσταση. (Παράδειγμα;)

### 8.3.1 Ειδική περίπτωση: $\dim(X_o) < \infty$

Στην περίπτωση αυτή ισχύει κατ'ανάγκην η ισότητα $Y_o = X_o$, άρα ο ψευδομηδενοδύναμος τελεστής $z_o I - A_o$ είναι μηδενοδύναμος οπότε (από την πρόταση 8.4) το $z_o$ είναι πόλος της $R_z$.

Θέτουμε $\text{B} := z_o I - A_o$. Είναι σαφές ότι $\text{B}(\ker(B^k) \subseteq \ker(B^{k-1})$ για κάθε $k$. Επομένως αν επιλέξουμε μία βάση του $\ker(z_o I - A_o)$ και την επεκτείνουμε σε βάση του $\ker((z_o I - A)^2)$, μετά σε βάση του $\ker((z_o I - A)^3)$ και ούτω καθεξής, κατασκευάζουμε μία βάση του $X_o$ ως προς την οποία ο πίνακας του B είναι γνήσια άνω τριγωνικός.

Αυτό αποδεικνύει την

**Πρόταση 8.6** *Αν $\dim(X_o) < \infty$, υπάρχει ελάχιστος $n_o$ ώστε $(z_o I - A_o)^{n_o} = 0$ και ο τελεστής $A_o$ τριγωνοποιείται. Συγκεκριμένα, υπάρχει βάση του $X_o$ ως προς την οποία ο πίνακας του $A_o$ είναι άνω τριγωνικός, και μάλιστα τα στοιχεία της διαγωνίου του είναι όλα ίσα με $z_o$.*

**Παρατήρηση.** Επειδή

$$\{0\} \neq \ker(z_o I - A) \subset \ker((z_o I - A)^2) \subset \ldots \subset \ker((z_o I - A)^{n_o}) = X_o$$

είναι προφανές ότι $\dim \ker((z_o I - A)^n) \geq n$ για $n \leq n_o$ και η ανισότητα μπορεί να είναι γνήσια (παράδειγμα: ένας μηδενοδύναμος τελεστής με δείκτη 2 σε έναν τρις- (ή απειρο-) διάστατο χώρο).

## 8.4 Αλγεβρικοί τελεστές

Ένας τελεστής A σ' έναν χώρο Banach X λέγεται **αλγεβρικός** αν υπάρχει πολυώνυμο $p$ ώστε $p(\mathrm{A}) = 0$. Όταν $\dim X < \infty$, κάθε $A \in B(X)$ είναι αλγεβρικός. Πράγματι, αν $\dim X = n$ τότε $\dim B(X) = n^2$, οπότε τα $I, A, A^2, \dots, A^{n^2}$ είναι γραμμικά εξαρτημένα, συνεπώς ο A μηδενίζεται από ένα πολυώνυμο βαθμού το πολύ $n^2 + 1$. Το Θεώρημα Cayley-Hamilton βεβαιώνει ότι στην πραγματικότητα ο A μηδενίζεται από ένα πολυώνυμο βαθμού το πολύ $n$. Ο συναρτησιακός λογισμός επιτρέπει μια απλή απόδειξη του θεωρήματος αυτού:

**Θεώρημα 8.7 (Cayley - Hamilton)** *Αν $p$ είναι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο ενός τελεστή $A$ σε χώρο πεπερασμένης διάστασης (δηλαδή $p(z) = \det(zI - A)$), τότε $p(A) = 0$.*

**Απόδειξη.** Αν $\sigma(A) = \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$, τότε υπάρχουν αρκετά μικροί κύκλοι $\gamma_i$ ώστε $Ind_{\gamma_i}(z_j) = \delta_{ij}$. Αν $\Gamma = \gamma_1 + \dots + \gamma_n$, τότε η $\Gamma$ περικλείει το $\sigma(\mathrm{A})$ στο $\mathbb{C}$, άρα από τον συναρτησιακό λογισμό έχουμε

$$p(A) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma p(w)(wI - A)^{-1} dw.$$

Αλλά για κάθε $w \notin \sigma(A)$ έχουμε $(wI - A)^{-1} = (\det(wI - A))^{-1} B(w)$, όπου $B(w)$ είναι πίνακας που τα στοιχεία του είναι πολυώνυμα ως προς $w$, δηλαδή ο $B(w)$ είναι πολυώνυμο ως προς $w$ (με συντελεστές πίνακες). Επομένως

$$p(A) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma p(w)(\det(wI - A))^{-1} B(w) dw = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma B(w) dw = 0$$

γιατί η συνάρτηση $w \to B(w)$ είναι πολυωνυμική, άρα έχει παράγουσα. $\square$

Υποθέτουμε τώρα ότι ο A είναι ένας αλγεβρικός τελεστής σ'έναν (ενδεχομένως απειροδιάστατο) χώρο Banach X. Έστω $p$ ένα πολυώνυμο ελάχιστου βαθμού που μηδενίζει τον A (ένα (μιγαδικό) πολλαπλάσιο του ελαχιστικού πολυωνύμου του A). Τότε $p(\sigma(\mathrm{A})) = \sigma(p(\mathrm{A})) = \{0\}$ από το θεώρημα (ή το λήμμα) φασματικής απεικόνισης, και συνεπώς το $\sigma(\mathrm{A})$ είναι πεπερασμένο σύνολο, και αποτελείται ακριβώς από τις ρίζες του $p$.

Έστω $z_o \in \sigma(\mathrm{A})$ και $d$ η **αλγεβρική πολλαπλότητα** του $z_o$ ως προς $p$, δηλαδή η πολλαπλότητα του $z_o$ ως ρίζας του $p$. Ισχυρίζομαι ότι το $z_o$ είναι πόλος του επιλύοντα τελεστή τάξης ακριβώς $d$, άρα είναι ιδιοτιμή του A.

Πράγματι, υπάρχει πολυώνυμο $q$ ώστε $p(z) = (z - z_o)^d q(z)$ για κάθε $z$ και $q(z_o) \neq 0$. Αν $\mathrm{A}_o, \mathrm{A}_1$ είναι οι περιορισμοί του A στους $\mathrm{X}_o = P_{\{z_o\}}(X)$ και

$\mathrm{X}_1 = (\mathrm{I} - P_{\{z_o\}})(X)$ αντίστοιχα, τότε $\sigma(A_o) = \{z_o\}$ και $\sigma(A_1) = \sigma(\mathrm{A})\backslash\{z_o\}$. Επομένως το σύνολο $\sigma(q(A_o)) = q(\sigma(A_o))$ δεν περιέχει το 0. Αρα ο τελεστής $q(A_o)$ είναι αντιστρέψιμος (στον $X_o$). Από την άλλη μεριά έχουμε $p(A) = 0$, άρα $p(A_o) = (A_o - z_oI)^d q(A_o) = 0$. Επομένως $(A_o - z_oI)^d = 0$. Ομοίως, $0 = p(A_1) = (A_1 - z_oI)^d q(A_1)$ άρα $q(A_1) = 0$ αφού $z_o \notin \sigma(A_1)$.

Μένει να δείξω ότι $(A_o - z_oI)^{d-1} \neq 0$. Πράγματι, αν $(A_o - z_oI)^{d-1} = 0$, τότε για κάθε $x \in X$ γράφοντας $x = P_o x + (I - P_o)x$, έχουμε

$$
\begin{aligned}
&(A - z_oI)^{d-1}q(A)x = (A - z_oI)^{d-1}q(A)P_o x + (A - z_oI)^{d-1}q(A)(I - P_o)x \\
&= q(A_o)(A_o - z_oI)^{d-1}P_o x + (A_1 - z_oI)^{d-1}q(A_1)(I - P_o)x = 0
\end{aligned}
$$

δηλαδή $(A - z_oI)^{d-1}q(A) = 0$, πράγμα που αντιβαίνει στο γεγονός ότι το $p$ έχει ελάχιστο βαθμό.

Αποδείξαμε λοιπόν την

**Πρόταση 8.8** *Αν $A \in \mathcal{B}(X)$ είναι αλγεβρικός τελεστής, τότε το φάσμα του είναι πεπερασμένο και αποτελείται από ιδιοτιμές. Κάθε ιδιοτιμή είναι πόλος του επιλύοντα τελεστή με τάξη ίση προς την πολλαπλότητα της ιδιοτιμής ως ρίζας του ελαχιστικού πολυωνύμου που μηδενίζει τον* A.

## 8.5 Συμπαγείς τελεστές

Ενας τελεστής $A$ σ' έναν χώρο Banach $X$ λέγεται **συμπαγής** αν απεικονίζει φραγμένα σύνολα σε σχετικά συμπαγή σύνολα. Ένας τέτοιος τελεστής είναι βέβαια φραγμένος. Ειδικότερα οι φραγμένοι τελεστές πεπερασμένης τάξης (δηλαδή οι $A \in \mathcal{B}(X)$ που ικανοποιούν $\dim(A(X)) < \infty$) είναι συμπαγείς, και το ίδιο ισχύει για norm-όρια ακολουθιών απο τέτοιους τελεστές. Αν ο $X$ είναι χώρος Hilbert, τότε αντίστροφα κάθε συμπαγής τελεστής είναι όριο μίας ακολουθίας από τελεστές πεπερασμένης τάξης (βλ. π.χ. [5], 3.2). Το ίδιο ισχύει σε πολλούς χώρους Banach, όχι όμως σε όλους [2].

Θα χρειασθούμε το γεγονός ότι κάθε $z_o \in \sigma(A)\backslash\{0\}$ είναι μεμονωμένο σημείο του φάσματος του $A$ (βλ. π.χ. [5], 5.1). Αν $P_o$ είναι η αντίστοιχη προβολή Riesz και $X_o = P_o(X)$, τότε ο $A_o := A|_{X_o}$ είναι αντιστρέψιμος (γιατί το $\sigma(A_o) = \{z_o\}$ δεν περιέχει το 0), και επίσης είναι συμπαγής. Επομένως είναι πεπερασμένης τάξης, γιατί η μοναδιαία μπάλα του $A_o(X)$ έχει μη κενό εσωτερικό και συμπαγή κλειστή θήκη. Αφού ο $A_o$ είναι αντιστρέψιμος, έπεται ότι $\dim X_o < \infty$. Από την πρόταση 8.6 έπεται ότι υπάρχει ελάχιστος $n_o \in \mathbb{N}$ ώστε ο χώρος $X_o$ να ισούται με τον χώρο

$$\{x \in X : (z_oI - A)^{n_o}x = 0\}$$

των γενικευμένων ιδιοδιανυσμάτων του $A$. Ειδικότερα, το $z_o$ είναι ιδιοτιμή και, από την πρόταση 8.5, είναι πόλος του επιλύοντα του $A$ τάξης ακριβώς $n_o$.

**Παρατήρηση** Το $0$ ανήκει αναγκαστικά στο $\sigma(A)$, όταν $\dim X = \infty$ (γιατί;), αλλά ενδέχεται να μην είναι ιδιοτιμή, ή να μην είναι μεμονωμένο σημείο του $\sigma(A)$.

# 9 Συνέχεια του φάσματος

Στην παράγραφο αυτή θα μελετήσουμε την μεταβολή του φάσματος $\sigma(x)$ καθώς μεταβάλλεται το στοιχείο $x$ μιάς άλγεβρας Banach $\mathcal{A}$ με μονάδα.

## 9.1 Η συνάρτηση $x \to \rho(x)$

Ξεκινάμε από την μελέτη της συνάρτησης $x \longrightarrow \rho(x) : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}$. Ξέρουμε ότι $\rho(x) \leq \|x\|$, επομένως αν $x_n \longrightarrow 0$ τότε $\rho(x_n) \longrightarrow 0$, δηλαδή η $\rho$ είναι συνεχής στο $0$.

**Ερώτημα 1** Είναι η $\rho$ *ομοιόμορφα* συνεχής συνάρτηση;

Παρατήρησε ότι αν σε μία άλγεβρα Banach $\mathcal{A}$ ισχύει $|\rho(x) - \rho(y)| \leq \|x - y\|$, τότε η $\rho$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στην $\mathcal{A}$. Θα δείξουμε (Θεώρημα 9.5) ότι αυτό συμβαίνει όταν η $\mathcal{A}$ είναι μεταθετική. Η πιό απλή μη-μεταθετική άλγεβρα είναι η άλγεβρα $M_2(\mathbb{C})$ των $2 \times 2$ (μιγαδικών) πινάκων. Ακόμα και σ' αυτήν την άλγεβρα, η ομοιόμορφη συνέχεια της $\rho$ αποτυγχάνει:

**Παράδειγμα** Έστω

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1/n \\ n & 0 \end{pmatrix}, \quad B_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ n & 0 \end{pmatrix}$$

Τότε $\|A_n - B_n\| = \frac{1}{n} \longrightarrow 0$ ενώ $\rho(A_n) - \rho(B_n) = 1$.

**Άσκηση** Δείξτε ότι η άλγεβρα $T_2(\mathbb{C})$ των των $2 \times 2$ *άνω τριγωνικών* πινάκων είναι μη μεταθετική, αλλά η $\rho : T_2(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.

**Ερώτημα 2** Είναι η $\rho$ συνεχής;

Θα δείξουμε ότι αυτό ισχύει όταν $\dim(\mathcal{A}) < \infty$ (9.7), δεν ισχύει όμως εν γένει:

**Παράδειγμα Kakutani** Υπάρχει μία ακολουθία $(A_k)$ από (φραγμένους) μηδενοδύναμους τελεστές στον $H = \ell^2(\mathbb{N})$ (οπότε $\rho(A_k) = 0$) που συγκλίνει σ' έναν τελεστή $A$ με $\rho(A) > 0$.

**Απόδειξη** Αν $\{e_n : n = 0, 1, ...\}$ είναι η συνηθισμένη βάση του $H$, ορίζω $Ae_n = a(n)e_{n+1}$. Ελέγχεται εύκολα ( Άσκηση) ότι ο $A$ επεκτείνεται σε φραγμένο τελεστή $A : H \longrightarrow H$ αν και μόνον αν η ακολουθία $(a(n))$ είναι φραγμένη, και μάλιστα $\|A\| = \sup |a(n)|$.

Ορίζω την $(a(n))$ ως εξής: Κάθε ζυγός όρος τίθεται ίσος με 1. Από τους υπόλοιπους, κάθε δεύτερος όρος τίθεται ίσος με $1/2$. Από τους υπόλοιπους, κάθε δεύτερος όρος τίθεται ίσος με $1/2^2$, και ούτω καθεξής:

| | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | – | 1 | – | 1 | – | 1 | – | 1 | – | 1 | – | 1 | – | 1 | – | 1 | ... |
| 1 | 1/2 | 1 | – | 1 | 1/2 | 1 | – | 1 | 1/2 | 1 | – | 1 | 1/2 | 1 | – | 1 | ... |
| 1 | 1/2 | 1 | 1/4 | 1 | 1/2 | 1 | – | 1 | 1/2 | 1 | 1/4 | 1 | 1/2 | 1 | – | 1 | ... |
| 1 | 1/2 | 1 | 1/4 | 1 | 1/2 | 1 | 1/8 | 1 | 1/2 | 1 | 1/4 | 1 | 1/2 | 1 | – | 1 | ... |
| 1 | 1/2 | 1 | 1/4 | 1 | 1/2 | 1 | 1/8 | 1 | 1/2 | 1 | 1/4 | 1 | 1/2 | 1 | 1/16 | 1 | ... |

Δηλαδή στο $k$ στάδιο θέτω $1/2^k$ στο πρώτο κενό, αφήνω ένα κενό, θέτω $1/2^k$ στο επόμενο, κ.ο.κ.

Αν $k = 1, 2, ...$ θέτω $A_k e_n = a(n)_k e_{n+1}$ όπου

$$a(n)_k = \begin{cases} a(n) & \text{αν } a(n) \neq 1/2^k \\ 0 & \text{αν } a(n) = 1/2^k. \end{cases}$$

Παρατήρησε ότι αν ο τελεστής $B$ ορίζεται από τη σχέση $Be_n = b(n)e_{n+1}$ τότε $B^{m+1}e_n = b(n)b(n+1)\dots b(n+m)e_{n+m+1}$, επομένως $A_k^{2^k+1} = 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Δηλαδή κάθε $A_k$ είναι μηδενοδύναμος, αλλά ο δείκτης του μεγαλώνει πολύ γρήγορα με το $k$.

Επίσης είναι φανερό ότι $\|A - A_k\| = 1/2^k \longrightarrow 0$.

Μένει να δειχθεί ότι $\rho(A) \neq 0$. Εχουμε

$$A^{m+1}e_0 = a(0)a(1)\dots a(m)e_{m+1},$$

άρα $\|A^{m+1}\| \geq a(0)a(1)\dots a(m)$, οπότε

$$\rho(A) \geq \liminf_m (a(0)a(1)\dots a(m))^{\frac{1}{m+1}}.$$

Αν όμως $m = 2^p - 2$, τότε

$$a(0)a(1)\dots a(m) = 1^{2^{p-1}}.(1/2)^{2^{p-2}}.(1/4)^{2^{p-3}}\dots(1/2)^{p-1}$$

άρα

$$\log(a(0)a(1)\dots a(m)) = \sum_{n=0}^{p-1} 2^{p-1-n}\log(1/2)^n$$

οπότε

$$\log((a(0)a(1)\dots a(m))^{\frac{1}{m+1}}) = \frac{2^{p-1}}{2^p - 1}\log(1/2)\sum_{n=0}^{p-1}\frac{n}{2^n}.$$

Επειδή $\sum_n n2^{-n} = 2$, έπεται ότι

$$\liminf((a(0)a(1)\dots a(m))^{\frac{1}{m+1}}) \geq \frac{1}{2}. \quad \square$$

## 9.2 Η συνάρτηση $x \longrightarrow \sigma(x)$

Θα μελετήσουμε τώρα την συνάρτηση $x \longrightarrow \sigma(x)$ που παίρνει τιμές στο σύνολο των συμπαγών μη κενών υποσυνόλων του $\mathbb{C}$.

Το Παράδειγμα Kakutani δείχνει ότι η συνάρτηση αυτή αποκλείεται να είναι "συνεχής", γιατί ενώ $\sigma(A_n) = \{0\}$ για κάθε $n$, έχουμε $\sigma(\lim A_n) \neq \{0\}$.

Η έννοια της συνέχειας για συναρτήσεις που παίρνουν τιμές στο σύνολο των συμπαγών μη κενών υποσυνόλων του $\mathbb{C}$ μπορεί να εκφρασθεί μέσω των ακόλουθων συμβολισμών:

**Συμβολισμοί** Αν $K \subseteq \mathbb{C}$ συμπαγές και $\varepsilon > 0$, γράφουμε

$$(K)_\varepsilon := \{z \in \mathbb{C} : d(z, K) < \varepsilon\}$$

$$[K]_\varepsilon := \{z \in \mathbb{C} : d(z, K) \leq \varepsilon\}.$$

Είναι φανερό ότι το $(K)_\varepsilon$ είναι ανοικτή περιοχή του $K$ και το $[K]_\varepsilon$ είναι κλειστή περιοχή του $K$. Επίσης, ένα επιχείρημα συμπάγειας δείχνει ότι για κάθε ανοικτή περιοχή $U$ του $K$ υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $K \subseteq (K)_\varepsilon \subseteq U$.

Ας θυμηθούμε ότι μία συνάρτηση $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow (-1, 1)$ λέγεται *άνω ημισυνεχής* στο $x_o \in \mathbb{R}$ αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $\varphi(x) < \varphi(x_o) + \varepsilon$ όταν $|x - x_o| < \delta$. Αντίστοιχα η $\varphi$ λέγεται *κάτω ημισυνεχής* αν $\varphi(x) > \varphi(x_o) - \varepsilon$, δηλαδή $\varphi(x_o) < \varphi(x) + \varepsilon$, όταν $|x - x_o| < \delta$. Αν θέσουμε $\Phi(x) := (-1, \varphi(x)]$, τότε είναι φανερό ότι οι δύο προηγούμενες σχέσεις ισοδυναμούν με τις $\Phi(x) \subseteq (\Phi(x_o))_\varepsilon$ και $\Phi(x_o) \subseteq (\Phi(x))_\varepsilon$ αντίστοιχα.

Κατ' αναλογίαν, μία συνάρτηση $x \longrightarrow K(x)$ ορισμένη σ'έναν μετρικό χώρο $(X, d)$ που οι τιμές της είναι μη κενά συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{C}$ θα λέγεται **άνω ημισυνεχής** στο $x_o$ αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $K(x) \subseteq (K(x_o))_\varepsilon$ όταν $d(x, x_o) < \delta$ και θα λέγεται **κάτω ημισυνεχής** αν $K(x_o) \subseteq (K(x))_\varepsilon$ όταν $d(x, x_o) < \delta$. Η $K$ θα λέγεται **συνεχής** αν είναι άνω και κάτω ημισυνεχής.

**Σημείωση.** Στο σύνολο των μη κενών συμπαγών υποσυνόλων του $\mathbb{C}$ ορίζεται η λεγόμενη *μετρική του Hausdorff* $\Delta$ από τον τύπο

$$\Delta(K_1, K_2) = \max\{\sup\{d(z_1, K_2) : z_1 \in K_1\},\ \sup\{d(z_2, K_1) : z_2 \in K_2\}\}.$$

Αποδεικνύεται ότι η $\Delta$ είναι μετρική και ότι το σύνολο των μη κενών συμπαγών υποσυνόλων του $\mathbb{C}$ γίνεται πλήρης μετρικός χώρος ως προς την $\Delta$. Είναι εύκολο να δεί κανείς ότι η συνάρτηση $K$ είναι συνεχής ως προς την $\Delta$ αν και μόνον αν είναι άνω και κάτω ημισυνεχής.

Έχουμε ήδη αποδείξει (πρόταση 7.13) ότι

**Πρόταση 9.1 (άνω ημισυνέχεια του φάσματος)** *Η συνάρτηση $x \longrightarrow \sigma(x)$ είναι άνω ημισυνεχής στην $\mathcal{A}$.*

**Παρατήρηση 9.2** *Έπεται ότι και η συνάρτηση $x \longrightarrow \rho(x)$ είναι άνω ημισυνεχής. Πράγματι, αν $\varepsilon > 0, x \in \mathcal{A}$ και επιλέξω $\delta > 0$ ώστε $\sigma(y) \subseteq (\sigma(x))_\varepsilon$ όταν $\|x-y\| < \delta$, τότε, επειδή $\rho(y) \in \sigma(y) \subseteq (\sigma(x))_\varepsilon$, υπάρχει $\lambda \in \sigma(x)$ ώστε $|\rho(y) - \lambda| < \varepsilon$, οπότε $\rho(y) < |\lambda| + \varepsilon \leq \rho(x) + \varepsilon$.*

Το παράδειγμα Kakutani δείχνει ότι η $\sigma$ δεν είναι κάτω ημισυνεχής εν γένει. Το επόμενο θεώρημα δείχνει ότι η κάτω ημισυνέχεια εξασφαλίζεται, αν η $\sigma$ περιορισθεί σε μεταθετικές υπάλγεβρες της $\mathcal{A}$.

Θα χρειασθεί μία απλή παρατήρηση.

**Λήμμα 9.3** *Έστω $\mathcal{A}$ άλγεβρα Banach με μονάδα και $a, b \in \mathcal{A}$ με $ab = ba$. Τότε $\rho(ab) \leq \rho(a)\rho(b)$.*

**Απόδειξη** Επειδή $ab = ba$ έχουμε $(ab)^n = a^n b^n$ άρα $\|(ab)^n\| \leq \|a^n\|.\|b^n\|$. Το συμπέρασμα έπεται από τον τύπο της φασματικής ακτίνας (Θεώρημα 5.3). $\square$

**Πρόταση 9.4** *Έστω $\mathcal{A}$ άλγεβρα Banach με μονάδα και $x, y \in \mathcal{A}$ με $xy = yx$. Τότε*

$$\sigma(x) \subseteq [\sigma(y)]_{\rho(x-y)}.$$

*Επομένως*

$$\Delta(\sigma(x), \sigma(y)) \leq \rho(x-y) \leq \|x-y\|.$$

**Απόδειξη** Αν $\sigma(x) \nsubseteq [\sigma(y)]_{\rho(x-y)}$, υπάρχει $\lambda \in \sigma(x)$ ώστε $d(\lambda, \sigma(y)) > \rho(x-y)$. Εχουμε όμως αποδείξει (πόρισμα 7.11) ότι

$$d(\lambda, \sigma(y)) = \frac{1}{\rho((\lambda 1 - y)^{-1})}$$

άρα $\rho((\lambda 1-y)^{-1})\rho(x-y) < 1$. Επειδή τα στοιχεία $a = (\lambda 1-y)^{-1}$ και $b = x-y$ μετατίθενται, έχουμε $\rho((\lambda 1 - y)^{-1}(x-y)) \leq \rho((\lambda 1 - y)^{-1})\rho(x-y)$, άρα $\rho((\lambda 1 - y)^{-1})(x-y)) < 1$. Αυτό όμως σημαίνει ότι $1 - (\lambda 1 - y)^{-1})(x-y) \in$ Inv$(\mathcal{A})$. Τότε όμως

$$\lambda 1 - x = (\lambda 1 - y)(1 - (\lambda 1 - y)^{-1}(x-y)) \in \text{Inv}(\mathcal{A})$$

πράγμα που αντιφάσκει με το γεγονός ότι $\lambda \in \sigma(x)$. $\square$

**Παρατήρηση** Η Πρόταση αυτή (καθώς και το Θεώρημα που ακολουθεί) μπορεί ν' αποδειχθεί, όπως θα δούμε, και με την βοήθεια της θεωρίας Gelfand για μεταθετικές άλγεβρες Banach (βλ. 10.12).

**Θεώρημα 9.5** *Έστω $\mathcal{A}$ μεταθετική άλγεβρα Banach με μονάδα. Τότε η συνάρτηση $x \longrightarrow \sigma(x)$ είναι συνεχής (μάλιστα ομοιόμορφα συνεχής) στην $\mathcal{A}$, και το ίδιο ισχύει για την $x \longrightarrow \rho(x)$.*

**Απόδειξη** Η ομοιόμορφη συνέχεια της $x \longrightarrow \sigma(x)$ είναι άμεση από την σχέση

$$\Delta(\sigma(x), \sigma(y)) \leq \|x - y\|.$$

Γιά την $\rho$, παρατηρήσαμε ήδη στην 9.2 ότι, αν $\rho(x-y) < \delta$, η σχέση $\sigma(x) \subseteq [\sigma(y)]_{\rho(x-y)}$ συνεπάγεται την $\rho(x) < \rho(y) + \delta$. Επειδή $\sigma(y) \subseteq [\sigma(x)]_{\rho(x-y)}$ έχουμε και $\rho(y) < \rho(x) + \delta$. Τελικώς λοιπόν $\rho(x-y) < \delta \Rightarrow |\rho(x) - \rho(y)| < \delta$, και συνεπώς

$$|\rho(x) - \rho(y)| \leq \rho(x - y) \leq \|x - y\|. \quad \square$$

Έστω $x \in \mathcal{A}$ και έστω ότι $\sigma(x) \subseteq U$ όπου $U$ ανοικτό σύνολο. Η Πρόταση 9.1 δείχνει ότι αν $x_n \longrightarrow x$, τότε $\sigma(x_n) \subseteq U$ τελικά. Το επόμενο θεώρημα είναι μία σημαντική βελτίωση: δείχνει ότι δεν είναι δυνατόν τα σύνολα $\sigma(x_n)$ να βρίσκονται όλα μέσα σε ένα "κομμάτι" του $U$.

**Θεώρημα 9.6 (Newburgh)** *Έστω $x \in \mathcal{A}$ και έστω ότι $\sigma(x) \subseteq U \cup V$ όπου $U, V$ ξένα ανοικτά σύνολα. Αν $\sigma(x) \cap U \neq \emptyset$, τότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε $y \in \mathcal{A}$ με $\|x - y\| < \delta$ να ισχύει $\sigma(y) \cap U \neq \emptyset$.*

**Απόδειξη** Αν δεν ισχύει το συμπέρασμα, υπάρχει ακολουθία $(y_n)$ στην $\mathcal{A}$ που συγκλίνει στο $x$ ώστε $\sigma(y_n) \cap U = \emptyset$ για κάθε $n$. Από την Πρόταση 9.1 μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\sigma(y_n) \subseteq U \cup V$, άρα $\sigma(y_n) \subseteq V$.

Έστω $f : U \cup V \longrightarrow \mathbb{C}$ η χαρακτηριστική του $U$. Επειδή τα $\sigma(x)$ και $\sigma(y_n)$ περιέχονται στο $U \cup V$, ορίζονται τα $f(x)$, $f(y_n)$. Έχουμε αποδείξει (Θεώρημα 7.14) ότι $\lim_n f(y_n) = f(x)$. Ομως $f(y_n) = 0$ αφού η $f$ μηδενίζεται στο $\sigma(y_n)$, ενώ $f(x) \neq 0$ αφού $1 \in f(\sigma(x))$.

Η αντίφαση αυτή δείχνει ότι $\sigma(y_n) \cap U \neq \emptyset$ τελικά. $\square$

**Θεώρημα 9.7** *Έστω $\mathcal{A}$ άλγεβρα Banach με μονάδα. Έστω $x_o \in \mathcal{A}$ με ολικά μη συνεκτικό φάσμα. Τότε η συνάρτηση $x \longrightarrow \sigma(x)$ είναι συνεχής στο $x_o$.*

**Απόδειξη** Θα χρειασθούμε μόνον την ακόλουθη ιδιότητα του $\sigma(x)$ (βλ. 9.2.1): Για κάθε $\epsilon > 0$ το $\sigma(x)$ μπορεί να καλυφθεί από πεπερασμένο πλήθος *ξένων* ανοικτών συνόλων $V_1, \ldots V_n$ που το καθένα έχει διάμετρο μικρότερη από $\epsilon$.

Από το Θεώρημα Newburgh, επειδή $V_i \cap \sigma(x) \neq \emptyset$ για $i = 1, \dots n$, μπορώ να βρώ $\delta_i > 0$ ώστε αν $\|x - y\| < \delta_i$ να ισχύει $V_i \cap \sigma(y) \neq \emptyset$.

Έστω $y \in \mathcal{A}$ με $\|x - y\| < \min \delta_i$. Αν $\lambda \in \sigma(x)$, υπάρχει $i$ ώστε $\lambda \in V_i$, άρα υπάρχει $\mu \in \sigma(y)$ με $|\mu - \lambda| < \epsilon$ (αφού $\operatorname{diam}(V_i) < \epsilon$), άρα $d(\lambda, \sigma(y)) < \epsilon$. Δείξαμε λοιπόν ότι $\sigma(x) \subseteq (\sigma(y))_\epsilon$.

Από την άλλη μεριά, λόγω άνω ημισυνέχειας υπάρχει $\delta_o > 0$ ώστε $\sigma(y) \subseteq (\sigma(x))_\epsilon$. Αν λοιπόν $\|x - y\| < \min\{\delta_o, \delta_1, \dots \delta_n\}$, τότε $\Delta(\sigma(x), \sigma(y)) < \epsilon$. $\square$

**Παρατήρηση** Το Θεώρημα αυτό εφαρμόζεται ειδικότερα όταν η $\mathcal{A}$ έχει πεπερασμένη διάσταση. Κυρίως όμως το Θεώρημα (εφαρμοζόμενο στην περίπτωση $\mathcal{A} = \mathcal{B}(X)$, όπου $X$ χώρος Banach) δείχνει ότι κάθε συμπαγής τελεστής είναι σημείο συνέχειας της απεικόνισης $\mathrm{A} \longrightarrow \sigma(\mathrm{A})$.

### 9.2.1 Ολικά μη συνεκτικοί μετρικοί χώροι

Ας ονομάσουμε *αποσύνδεση* σε έναν (Hausdorff) τοπολογικό χώρο $(X, \tau)$ ένα ζεύγος *μη κενών* ανοικτών συνόλων $U, V$ με $U \cap V = \emptyset$ και $U \cup V = X$. Επομένως ο $X$ είναι συνεκτικός αν και μόνον αν δεν δέχεται αποσύνδεση. Ο χώρος $X$ λέγεται **ολικά μη συνεκτικός** αν κάθε ζεύγος σημείων του μπορεί να διαχωρισθεί με μία αποσύνδεση.

Έτσι, ένας χώρος Hausdorff είναι ολικά μη συνεκτικός αν έχει μία βάση από ανοικτά και κλειστά σύνολα. Πράγματι, αν $B$ είναι μία βάση για την $\tau$ από ανοικτά και κλειστά σύνολα, τότε για κάθε $x \neq y$ στο $X$ υπάρχει $B \in B$ με $x \in B$ και $y \notin B$, οπότε η αποσύνδεση $(B, X \backslash B)$ διαχωρίζει τα $x$ και $y$.

Το αντίστροφο ισχύει όταν ο $X$ είναι συμπαγής. Πράγματι: αν ο $X$ είναι ολικά μη συνεκτικός, για κάθε $x \in X$ και για κάθε ανοικτό σύνολο $U$ που περιέχει το $x$, θα κατασκευάσω ένα ανοικτό και κλειστό σύνολο $V$ ώστε $x \in V \subseteq U$. Αν $U = X$, θέτω $V = U$. Αν όχι, το συμπλήρωμα $U^c$ του $U$ είναι συμπαγές. Για κάθε $y \in U^c$, διάλεξε μία αποσύνδεση $V_y, U_y$ με $x \in V_y,\ y \in U_y$. Αφού η οικογένεια $\{U_y : y \in U^c\}$ καλύπτει το συμπαγές σύνολο $U^c$, έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα $\{U_i : i = 1, \dots, n\}$. Το σύνολο $W = \cup_i U_i$ είναι ανοικτό και κλειστό, περιέχει το $U^c$ αλλά όχι το $x$, άρα το $V = W^c$ έχει τις απαιτούμενες ιδιότητες. [12]

[12] Έπεται τώρα ότι για κάθε $x \in X$ η συνεκτική συνιστώσα $C(x)$ του $x$ είναι μονοσύνολο: Αν $y \neq x$, υπάρχει ανοικτό και κλειστό σύνολο $Q \subseteq X$ με $x \in Q$ και $y \notin Q$. Αλλά το $C(x) \cap Q$ είναι μη κενό και σχετικά ανοικτό και κλειστό στον τοπολογικό χώρο $C(x)$, ο οποίος είναι συνεκτικός, οπότε $C(x) \cap Q = C(x)$, δηλαδή $C(x) \subseteq Q$, άρα $y \notin C(x)$. Δηλαδή, ένας συμπαγής χώρος Hausdorff είναι ολικά μη συνεκτικός αν και μόνον αν δεν έχει καθόλου συνεκτικά υποσύνολα (εκτός απ' τα μονοσύνολα).

Παρατήρησε ότι το σύνολο όλων των ανοικτών και κλειστών υποσυνόλων του $X$ είναι κλειστό και ως προς συμπληρώματα (είναι *σύνδεσμος Boole*). Επομένως αν το $X$ καλύπτεται από μία πεπερασμένη οικογένεια $\{U_i : i = 1, \ldots, n\}$ από ανοικτά και κλειστά σύνολα, τότε καλύπτεται και από μία πεπερασμένη οικογένεια $\{V_i : i = 1, \ldots, n\}$ από *ξένα* ανοικτά και κλειστά σύνολα με $V_i \subseteq U_i$: αρκεί να θέσουμε $V_i = U_i \setminus (\cup_{j \le i} U_j)$.

Έστω τώρα $X$ ολικά μη συνεκτικός συμπαγής μετρικός χώρος. Τότε για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει πεπερασμένη οικογένεια $\{V_1, \ldots, V_n\}$ από *ξένα* ανοικτά (και κλειστά) σύνολα με διάμετρο το πολύ $\epsilon$ που καλύπτει το $X$. Πράγματι, για κάθε $x \in X$ έστω $W_x$ ανοικτή περιοχή του $x$ με διάμετρο το πολύ $\epsilon$ (ο χώρος $X$ είναι ολικά φραγμένος). Διάλεξε τώρα ένα ανοικτό και κλειστό σύνολο $U_x$ με $x \in U_x \subseteq W_x$. Η οικογένεια $\{U_x : x \in X\}$ είναι ανοικτό κάλυμμα του $X$, άρα έχει ένα πεπερασμένο υποκάλυμμα $\{U_i : i = 1, \ldots, n\}$. Το ζητούμενο κάλυμμα προκύπτει όπως στην προηγούμενη παράγραφο.

# 10 Μεταθετικές άλγεβρες Banach

## 10.1 Ιδεώδη και μορφισμοί

Αν $\mathcal{A}$ είναι μία άλγεβρα (μεταθετική ή όχι) και $\mathcal{J}$ ένα (αμφίπλευρο) ιδεώδες της $\mathcal{A}$, τότε ο χώρος πηλίκο $\mathcal{A}/\mathcal{J}$ γίνεται άλγεβρα αν εφοδιασθεί με τις πράξεις

$$\begin{aligned}
(x+\mathcal{J})+(y+\mathcal{J}) &= (x+y)+\mathcal{J} \\
\lambda(x+\mathcal{J}) &= (\lambda x)+\mathcal{J} \\
(x+\mathcal{J}).(y+\mathcal{J}) &= (x.y)+\mathcal{J}
\end{aligned}$$

και η κανονική απεικόνιση πηλίκο

$$\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{J} : x \to x+\mathcal{J}$$

είναι μορφισμός με πυρήνα $\ker \pi = \mathcal{J}$. Αντίστροφα, αν $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ είναι μορφισμός αλγεβρών, τότε ο πυρήνας του είναι ιδεώδες της $\mathcal{A}$. Αν η $\mathcal{A}$ έχει μονάδα $1$, τότε η $\mathcal{A}/\mathcal{J}$ έχει μονάδα[13], το $1+\mathcal{J}$.

**Παρατηρήσεις (i)** Ένα ιδεώδες μιάς άλγεβρας με μονάδα είναι γνήσιο αν και μόνον αν δεν περιέχει την μονάδα, ισοδύναμα αν δεν περιέχει κανένα αντιστρέψιμο στοιχείο.

**(ii)** Κάθε άλγεβρα Banach $\mathcal{A}$ με μονάδα, εκτός από το $\mathbb{C}$, έχει γνήσια αριστερά ιδεώδη και γνήσια δεξιά ιδεώδη. Πράγματι: η $\mathcal{A}$ περιέχει κάποιο μη αντιστρέψιμο στοιχείο $x$, αλλιώς είναι ισομετρικά ισόμορφη με το $\mathbb{C}$ (Θεώρημα 5.2). Αν το $x$ δεν έχει αριστερό αντίστροφο, τότε το $\mathcal{A}x = \{ax : a \in \mathcal{A}\}$ είναι γνήσιο αριστερό ιδεώδες. Αν πάλι το $x$ έχει αριστερό αντίστροφο $y$, τότε το $y$ δεν έχει αριστερό αντίστροφο, γιατί αλλιώς θα ήταν αντιστρέψιμο, οπότε και το $x$ θα ήταν αντιστρέψιμο. Τότε το $\mathcal{A}y$ είναι γνήσιο αριστερό ιδεώδες.

Συνεπώς κάθε μεταθετική άλγεβρα Banach με μονάδα έχει γνήσια αμφίπλευρα ιδεώδη. Δεν έχουν όμως όλες οι άλγεβρες γνήσια αμφίπλευρα ιδεώδη (παράδειγμα: $M_n(\mathbb{C}), n \geq 2$).

Ένα (αριστερό, δεξί ή αμφίπλευρο) ιδεώδες $\mathcal{J}$ μιάς άλγεβρας $\mathcal{A}$ λέγεται **μεγιστικό** αν είναι *γνήσιο* και δεν περιέχεται γνήσια σε κανένα (ομοειδές) ιδεώδες, εκτός από την $\mathcal{A}$. Παραδείγματος χάριν, αν $\varphi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ είναι *μη μηδενικός* μορφισμός, τότε ο πυρήνας του είναι μεγιστικό ιδεώδες, γιατί έχει συνδιάσταση 1.

[13] Το αντίστροφο δεν ισχύει κατ' ανάγκη: αν παραδείγματος χάριν $\mathcal{A} = c_0$ και $\mathcal{J} = \{a \in c_0 : ae_1 = 0\}$, τότε η $\mathcal{A}$ δεν έχει μονάδα, αλλά η $\mathcal{A}/\mathcal{J}$ έχει μονάδα το $e_1 + \mathcal{J}$.

Στόχος αυτής της παραγράφου είναι να δειχθεί ότι, σε κάθε μεταθετική άλγεβρα Banach με μονάδα, κάθε μεγιστικό ιδεώδες είναι αυτής της μορφής.

**Θεώρημα 10.1 (Krull)** *Αν $\mathcal{A}$ είναι μία άλγεβρα με μονάδα, κάθε (αριστερό, δεξί ή αμφίπλευρο)* γνήσιο *ιδεώδες $\mathcal{J}$ της $\mathcal{A}$ περιέχεται σε ένα μεγιστικό (ομοειδές) ιδεώδες.*

**Απόδειξη** Υποθέτω ότι το $\mathcal{J}$ είναι αριστερό ιδεώδες της $\mathcal{A}$. Οι άλλες περιπτώσεις αποδεικνύονται όμοια.

Ονομάζω $S$ την οικογένεια όλων των *γνήσιων* αριστερών ιδεωδών της $\mathcal{A}$ που περιέχουν το $\mathcal{J}$. Η $S$ διατάσσεται μερικά από την σχέση του περιέχεσθαι. Θα δείξω ότι έχει μεγιστικό στοιχείο.

Αν $C \subseteq S$ είναι μία ολικά διατεταγμένη οικογένεια, θέτω $\mathcal{M}_C := \cup C$ και ισχυρίζομαι ότι το $\mathcal{M}_C$ είναι άνω φράγμα της $C$. Πράγματι: Το $\mathcal{M}_C$ περιέχει κάθε στοιχείο της $C$, άρα και το $\mathcal{J}$. Αν $x, y \in \mathcal{M}_C$ και $a \in \mathcal{A}$, τότε υπάρχουν $\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2 \in C$ ώστε $x \in \mathcal{J}_1$, $y \in \mathcal{J}_2$ οπότε $ax \in \mathcal{J}_1 \subseteq \mathcal{M}_C$ γιατί το $\mathcal{J}_1$ είναι αριστερό ιδεώδες. Επίσης, επειδή η $C$ είναι ολικά διατεταγμένη, μπορώ να υποθέσω ότι $\mathcal{J}_1 \subseteq \mathcal{J}_2$, οπότε $x, y \in \mathcal{J}_2$, άρα $x + y \in \mathcal{J}_2 \subseteq \mathcal{M}_C$. Άρα το $\mathcal{M}_C$ είναι αριστερό ιδεώδες. Επιπλέον, είναι γνήσιο, γιατί κανένα στοιχείο της $C$ δεν περιέχει την μονάδα, άρα ούτε το $\mathcal{M}_C$ την περιέχει.

Έπεται από το Λήμμα Zorn ότι η οικογένεια $S$ έχει ένα μεγιστικό στοιχείο $\mathcal{M}$. Αυτό σημαίνει ότι κανένα στοιχείο της $S$ δεν περιέχει το $\mathcal{M}$, εκτός απ' το ίδιο το $\mathcal{M}$. Ισχυρίζομαι ότι το $\mathcal{M}$ είναι μεγιστικό ως προς την ιδιότητα του να είναι αριστερό ιδεώδες. Πράγματι: Ότι είναι αριστερό ιδεώδες και ότι περιέχει το $\mathcal{J}$ είναι σαφές, αφού $\mathcal{M} \in S$. Αν τώρα $\mathcal{K}$ είναι ένα αριστερό γνήσιο ιδεώδες της $\mathcal{A}$ που περιέχει το $\mathcal{M}$, τότε το $\mathcal{K}$ ανήκει στην $S$, αφου περιέχει το $\mathcal{J}$. Επομένως $\mathcal{K} = \mathcal{M}$ λόγω μεγιστικότητας του $\mathcal{M}$ στην $S$. $\square$

**Παρατήρηση** Η ύπαρξη μονάδας δεν μπορεί να παραλειφθεί. Παραδείγματος χάριν, αποδεικνύεται (άσκηση) ότι το σύνολο $c_{00} \subseteq c_0$ των ακολουθιών με πεπερασμένο φορέα είναι ιδεώδες της $c_0$ που δεν περιέχεται σε κανένα μεγιστικό ιδεώδες.

**Πρόταση 10.2** *Αν $\mathcal{A}$ είναι μία άλγεβρα Banach με μονάδα και $\mathcal{J}$ ένα (αριστερό, δεξί ή αμφίπλευρο)* γνήσιο *ιδεώδες της $\mathcal{A}$, τότε η κλειστή θήκη $\overline{\mathcal{J}}$ του $\mathcal{J}$ είναι* γνήσιο *(ομοειδές) ιδεώδες.*

**Απόδειξη** Το γεγονός ότι το $\overline{\mathcal{J}}$ είναι ιδεώδες έπεται από την συνέχεια των αλγεβρικών πράξεων. Πρέπει να αποδειχθεί ότι είναι *γνήσιο*, δηλαδή ότι $1 \notin$

$\overline{\mathcal{J}}$. Αυτό πράγματι αληθεύει, γιατί η ανοικτή μπάλα με κέντρο $1$ και ακτίνα $1$ αποτελείται από αντιστρέψιμα στοιχεία (Λήμμα 4.1), επομένως δεν τέμνει το $\mathcal{J}$. $\square$

**Παρατήρηση** Και στην πρόταση αυτή η ύπαρξη μονάδας δεν μπορεί να παραλειφθεί. Παραδείγματος χάριν, το ιδεώδες $c_{00}$ της $c_0$ είναι γνήσιο, αλλά η κλειστή του θήκη δεν είναι.

**Πόρισμα 10.3** *Κάθε μεγιστικό (αριστερό, δεξί ή αμφίπλευρο) ιδεώδες μίας άλγεβρας Banach με μονάδα είναι κλειστό.*

**Απόδειξη** Η κλειστή του θήκη είναι (ομοειδές) γνήσιο ιδεώδες. $\square$

**Πρόταση 10.4** *Αν $\mathcal{A}$ είναι μία άλγεβρα Banach με μονάδα και $\mathcal{J}$ ένα αμφίπλευρο* κλειστό *ιδεώδες της $\mathcal{A}$, τότε ο χώρος πηλίκο $\mathcal{A}/\mathcal{J}$ εφοδιασμένος με την νόρμα πηλίκο*

$$\|a+\mathcal{J}\|_q = \inf\{\|a+x\| : x \in \mathcal{J}\} = d(a,\mathcal{J})$$

*είναι άλγεβρα Banach με μονάδα, και η κανονική απεικόνιση πηλίκο $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{J}$ είναι συνεχής (επι-)μορφισμός.*

**Απόδειξη** Το γεγονός ότι η $\|.\|_q$ είναι πλήρης νόρμα στον χώρο πηλίκο $\mathcal{A}/\mathcal{J}$ και ότι η απεικόνιση πηλίκο είναι συνεχής αποδεικνύεται στην γενική θεωρία των χώρων Banach (βλ. π.χ. [1], ΙΙΙ.4). Μένει να αποδειχθεί ότι

$$\|ab+\mathcal{J}\|_q \le \|a+\mathcal{J}\|_q . \|b+\mathcal{J}\|_q .$$

Πράγματι, αν $x, y \in \mathcal{J}$ έχουμε

$$\|(a+x)(b+y)\| \le \|a+x\|.\|b+y\|.$$

Αλλά $(a+x)(b+y) = ab + (ay+xb+xy)$ και $ay+xb+xy \in \mathcal{J}$, άρα $\|(a+x)(b+y)\| \ge \|ab+\mathcal{J}\|_q$. Επομένως η προηγούμενη ανισότητα δίνει

$$\|ab+\mathcal{J}\|_q \le \|a+x\|.\|b+y\|$$

για κάθε $x, y \in \mathcal{J}$, και το συμπέρασμα έπεται παίρνοντας infimum ως προς $x$ και $y$. $\square$

**Θεώρημα 10.5** *Έστω $\mathcal{A}$ μία* μεταθετική *άλγεβρα με μονάδα και $\mathcal{J}$ ένα γνήσιο ιδεώδες της $\mathcal{A}$. Το $\mathcal{J}$ είναι μεγιστικό ιδεώδες αν και μόνον αν η άλγεβρα πηλίκο είναι σώμα.*

**Απόδειξη** Θέτω $\mathcal{B} = \mathcal{A}/\mathcal{J}$. Έστω $x \in \mathcal{A}\backslash\mathcal{J}$, δηλαδή $\pi(x) \in \mathcal{B}\backslash\{0\}$. Θέτω $\mathcal{M} = \mathcal{A}x + \mathcal{J}$. Εύκολα βλέπει κανείς ότι το $\mathcal{M}$ είναι το μικρότερο ιδεώδες της $\mathcal{A}$ που περιέχει το $\mathcal{J}$ και το $x$.

Αν το $\mathcal{J}$ είναι μεγιστικό ιδεώδες της $\mathcal{A}$, τότε το $\mathcal{M}$ δεν είναι γνήσιο, δηλαδή $\mathcal{A} = \mathcal{M}$, άρα $\pi(\mathcal{A}) = \pi(\mathcal{A}x + \mathcal{J}) = \pi(\mathcal{A})\pi(x)$ δηλαδή $\mathcal{B} = \mathcal{B}\pi(x)$ πράγμα που σημαίνει ότι $\pi(x) \in \text{Inv}(\mathcal{B})$, άρα η $\mathcal{B}$ είναι σώμα.

Αντίστροφα αν για κάθε $x \in \mathcal{A}\backslash\mathcal{J}$ υπάρχει $a \in \mathcal{A}$ ώστε $\pi(a) = (\pi(x))^{-1}$, τότε θέτοντας $y = 1 - ax$ έχουμε $1 = ax + y$ όπου $y \in \mathcal{J}$ (γιατί $\pi(y) = \pi(1) - \pi(a)\pi(x) = 0$, οπότε το ιδεώδες που παράγεται από το $\mathcal{J}$ και το $x$ δεν είναι γνήσιο, δηλαδή το $\mathcal{J}$ είναι μεγιστικό. $\square$

Έστω $\mathcal{A}$ μία μεταθετική άλγεβρα Banach με μονάδα και $\mathcal{M}$ ένα μεγιστικό ιδεώδες της $\mathcal{A}$. Τότε η άλγεβρα πηλίκο $\mathcal{A}/\mathcal{M}$ είναι σώμα (Θεώρημα 10.5), αλλά είναι και άλγεβρα Banach (Πρόταση 10.4), διότι το $\mathcal{M}$ είναι κλειστό ιδεώδες. Συνεπώς από το Θεώρημα Gelfand - Mazur (5.2) υπάρχει ένας (ισομετρικός) ισομορφισμός $\lambda : \mathcal{A}/\mathcal{M} \to \mathbb{C}$. Αυτό αποδεικνύει το

**Πόρισμα 10.6** *Έστω $\mathcal{A}$ μεταθετική άλγεβρα Banach με μονάδα και $\mathcal{J}$ γνήσιο ιδεώδες της $\mathcal{A}$. Το $\mathcal{J}$ είναι μεγιστικό ιδεώδες αν και μόνον αν η $\mathcal{A}/\mathcal{J}$ είναι ισομετρικά ισόμορφη με το $\mathbb{C}$.*

**Ορισμός 10.1** **Χαρακτήρας** *ή* **πολλαπλασιαστική γραμμική μορφή** *$\varphi$ σε μία άλγεβρα $\mathcal{A}$ λέγεται ένας* μη μηδενικός *μορφισμός $\varphi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$. Το σύνολο των χαρακτήρων της $\mathcal{A}$ συμβολίζουμε $\mathcal{M}(\mathcal{A})$.*

**Παρατήρηση** Αν η $\mathcal{A}$ έχει μονάδα, τότε ένας μορφισμός $\varphi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ είναι χαρακτήρας αν και μόνον αν $\varphi(1) = 1$ (γιατί;).

Συνεπώς αν δύο χαρακτήρες $\varphi$ και $\psi$ της $\mathcal{A}$ έχουν τον ίδιο πυρήνα, τότε ταυτίζονται, γιατί για κάθε $x \in \mathcal{A}$ ισχύει $x - \varphi(x)1 \in \ker(\varphi) = \ker(\psi)$, δηλαδή $\psi(x - \varphi(x)1) = 0$ άρα $\psi(x) = \varphi(x)\psi(1) = \varphi(x)$.

**Θεώρημα 10.7** *Έστω $\mathcal{A}$ μία μεταθετική άλγεβρα Banach με μονάδα. Η απεικόνιση*

$$\varphi \to \ker\varphi$$

*είναι αμφιμονοσήμαντη μεταξύ του συνόλου των χαρακτήρων και του συνόλου των μεγιστικών ιδεωδών της $\mathcal{A}$.*

**Απόδειξη** Όπως παρατηρήσαμε στην αρχή της παραγράφου, κάθε χαρακτήρας $\varphi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ της $\mathcal{A}$ ορίζει ένα μεγιστικό ιδεώδες, τον πυρήνα του, $\ker \varphi$. Η προηγούμενη παρατήρηση δείχνει ότι η απεικόνιση $\varphi \to \ker \varphi$ είναι 1-1.

Έστω $\mathcal{M}$ μεγιστικό ιδεώδες της $\mathcal{A}$ και $\lambda : \mathcal{A}/\mathcal{M} \to \mathbb{C}$ ο μοναδικός (γιατί;) ισομετρικός ισομορφισμός που εξασφαλίζει το Θεώρημα Gelfand - Mazur. Αν ονομάσουμε $\varphi$ την σύνθεση του $\lambda$ με την κανονική απεικόνιση πηλίκο $\pi$,

$$\varphi : \mathcal{A} \xrightarrow{\pi} \mathcal{A}/\mathcal{M} \xrightarrow{\lambda} \mathbb{C}$$

τότε έχουμε έναν μορφισμό $\varphi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ με $\varphi(1) = 1$ και $\ker \varphi = \ker \pi = \mathcal{M}$ (αφού ο $\lambda$ είναι 1-1). Επομένως η απεικόνιση $\varphi \to \ker \varphi$ είναι επί. $\square$

**Πόρισμα 10.8** *Το σύνολο $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ των χαρακτήρων κάθε μεταθετικής άλγεβρας Banach $\mathcal{A}$ με μονάδα δεν είναι κενό.*

**Απόδειξη** Αν η $\mathcal{A}$ έχει μη μηδενικά μεγιστικά ιδεώδη, τότε από το προηγούμενο θεώρημα έχει χαρακτήρες. Αν δεν έχει μεγιστικά ιδεώδη, τότε κάθε μη μηδενικό στοιχείο της είναι αντιστρέψιμο, οπότε ο ισομορφισμός της $\mathcal{A}$ με το $\mathbb{C}$ που εξασφαλίζει το Θεώρημα Gelfand - Mazur είναι (ο μοναδικός) χαρακτήρας της $\mathcal{A}$ (και ο πυρήνας του, δηλ. το $\{0\}$, είναι μεγιστικό ιδεώδες). $\square$

**Παρατήρηση** Η μεταθετικότητα της $\mathcal{A}$ στο προηγούμενο πόρισμα δεν μπορεί εν γένει να παραλειφθεί. Παραδείγματος χάριν, η άλγεβρα $M_n(\mathbb{C})$ των $n \times n$ πινάκων δεν έχει (αμφίπλευρα) ιδεώδη (είναι *απλή*) επομένως δεν έχει χαρακτήρες.

Από την άλλη μεριά όμως, η υπάλγεβρά της $T_n(\mathbb{C})$ που αποτελείται από τους άνω τριγωνικούς πίνακες έχει ακριβώς $n$ χαρακτήρες (άσκηση), παρόλο που δεν είναι μεταθετική.

**Παρατήρηση** Εφόσον τα μεγιστικά ιδεώδη μίας μεταθετικής άλγεβρας Banach με μονάδα είναι κλειστά, έπεται ότι οι χαρακτήρες της είναι συνεχείς. Αυτό όμως ισχύει γενικότερα:

**Πρόταση 10.9** *Κάθε χαρακτήρας μιας άλγεβρας Banach (μεταθετικής ή όχι) είναι συνεχής, με νόρμα το πολύ 1. Αν μάλιστα η άλγεβρα έχει μονάδα, τότε κάθε χαρακτήρας έχει νόρμα ακριβώς 1.*

**Απόδειξη** Έστω $\varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$. Θα δείξω ότι $|\varphi(x)| \leq 1$ για κάθε $x \in \mathcal{A}$ με $\|x\| \leq 1$. Έστω ότι υπάρχει $x_o \in \mathcal{A}$ με $\|x_o\| \leq 1$ και $\varphi(x_o) = \lambda$ όπου $|\lambda| > 1$.

Θέτω $x = x_o/\lambda$. Επειδή $\|x\| < 1$, η σειρά

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} x^n$$

συγκλίνει. Αλλά $y = xy + x$ άρα $\varphi(y) = \varphi(x)\varphi(y) + \varphi(x) = \varphi(y) + 1$, άτοπο. Επομένως

$$\|\varphi\| = \sup\{|\varphi(x)| : \|x\| \leq 1\} \leq 1.$$

Αν η $\mathcal{A}$ έχει μονάδα, τότε $\|\varphi\| = 1$ επειδή $\varphi(1) = 1$. $\square$

Η επόμενη Πρόταση χαρακτηρίζει τα αντιστρέψιμα στοιχεία μιάς μεταθετικής άλγεβρας Banach με μονάδα, καθώς και το φάσμα κάθε στοιχείου της, μέσω των χαρακτήρων της:

**Πρόταση 10.10** *Έστω $\mathcal{A}$ μεταθετική άλγεβρα Banach με μονάδα και $x \in \mathcal{A}$.*

*(α) Το $x$ είναι αντιστρέψιμο στην $\mathcal{A}$ αν και μόνον αν $\phi(x) \neq 0$ για κάθε $\phi \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$, ισοδύναμα αν το $x$ δεν περιέχεται σε κανένα (μεγιστικό) ιδεώδες της $\mathcal{A}$.*

*(β) $\sigma(x) = \{\phi(x) : \phi \in \mathcal{M}(\mathcal{A})\}$.*

**Απόδειξη** (α) Το σύνολο $\mathcal{J} = \mathcal{A}x$ είναι ιδεώδες της $\mathcal{A}$. Αν $x \notin \text{Inv}(\mathcal{A})$, τότε το $\mathcal{J}$ είναι γνήσιο ιδεώδες, άρα περιέχεται σε κάποιο μεγιστικό ιδεώδες, άρα (από το Θεώρημα 10.7) το $x$ μηδενίζεται από κάποιον χαρακτήρα της $\mathcal{A}$. Αντίστροφα αν το $x$ μηδενίζεται από κάποιον χαρακτήρα $\varphi$, τότε περιέχεται στο μεγιστικό ιδεώδες $\ker\varphi$.

(β) Έστω $\lambda \in \mathbb{C}$. Εξ ορισμού $\lambda \in \sigma(x)$ αν και μόνον αν $\lambda 1 - x \notin \text{Inv}(\mathcal{A})$. Από το (i) αυτό συμβαίνει αν και μόνον αν υπάρχει $\varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ ώστε $\varphi(\lambda 1 - x) = 0$, δηλαδή $\varphi(x) = \lambda$. $\square$

Σε μία μη μεταθετική άλγεβρα $\mathcal{A}$, η φασματική ακτίνα $\rho : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^+$ δεν είναι εν γένει υποπροσθετική: Παραδείγματος χάριν αν $\mathcal{A} = M_2(\mathbb{C})$ και

$$a = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

τότε $\rho(a) = \rho(b) = 0$ ενώ $\rho(a + b) = 1$.

Η Πρόταση 10.10 επιτρέπει να δείξουμε ότι σε μεταθετικές άλγεβρες Banach όχι μόνον η φασματική ακτίνα, αλλά και το ίδιο το φάσμα είναι "υποπροσθετικό" και "υποπολλαπλασιαστικό".

**Λήμμα 10.11** *Έστω $\mathcal{A}$ μεταθετική άλγεβρα Banach με μονάδα, $a, b \in \mathcal{A}$. Τότε*

$$\sigma(a+b) \subseteq \sigma(a) + \sigma(b) \quad \textit{και} \quad \sigma(ab) \subseteq \sigma(a).\sigma(b)$$

*(όπου αν $A, B \subseteq \mathbb{C}$ γράφουμε $A + B = \{z + w : z \in A,\, w \in B\}$ και $A.B = \{zw : z \in A,\, w \in B\}$).*

*Επομένως $\rho(a+b) \leq \rho(a) + \rho(b)$ και $\rho(ab) \leq \rho(a).\rho(b)$.*

**Απόδειξη** Από την Πρόταση 10.10 έπεται ότι

$$\sigma(a+b) = \{\varphi(a+b) : \varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{A})\}.$$

Αλλά $\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$ για κάθε $\varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$, άρα

$$\begin{aligned}
\sigma(a+b) &= \{\varphi(a) + \varphi(b) : \varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{A})\} \\
&\subseteq \{\varphi(a) : \varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{A})\} + \{\psi(b) : \psi \in \mathcal{M}(\mathcal{A})\} \\
&= \sigma(a) + \sigma(b).
\end{aligned}$$

Ομοίως, επειδή $\varphi(ab) = \varphi(a).\varphi(b)$ για κάθε $\varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$, αποδεικνύεται η δεύτερη σχέση.

Κάθε $\lambda \in \sigma(a+b)$ είναι της μορφής $z+w$ όπου $z \in \sigma(a)$ και $w \in \sigma(b)$, άρα $|\lambda| \leq |z| + |w| \leq |z| + \rho(b) \leq \rho(a) + \rho(b)$, επομένως $\rho(a+b) \leq \rho(a) + \rho(b)$. Ομοίως, επειδή κάθε $\mu \in \sigma(ab)$ είναι της μορφής $zw$ όπου $z \in \sigma(a)$ και $w \in \sigma(b)$, έχουμε $|\mu| = |z|.|w| \leq |z|.\rho(b) \leq \rho(a).\rho(b)$, επομένως $\rho(ab) \leq \rho(a).\rho(b)$. $\square$

**Πρόταση 10.12** *Έστω $\mathcal{A}$ άλγεβρα Banach με μονάδα και $a, b \in \mathcal{A}$ με $ab = ba$. Τότε*

$$\sigma(a+b) \subseteq \sigma(a) + \sigma(b) \quad \textit{και} \quad \sigma(ab) \subseteq \sigma(a).\sigma(b).$$

*Επομένως $\rho(a+b) \leq \rho(a) + \rho(b)$ και $\rho(ab) \leq \rho(a).\rho(b)$.*

**Απόδειξη** Αρκεί να εφαρμόσουμε το προηγούμενο λήμμα σε μία *μεταθετική* Banach υπάλγεβρα $\mathcal{B}$ της $\mathcal{A}$ που να περιέχει τα $a, b$ *και επί πλέον* να ικανοποιεί $\sigma_{\mathcal{B}}(x) = \sigma_{\mathcal{A}}(x)$ για κάθε $x \in \mathcal{B}$. Παρατήρησε ότι, επειδή τα $a, b$ μετατίθενται, υπάρχει μία μεταθετική Banach υπάλγεβρα της $\mathcal{A}$ που τα περιέχει: παραδείγματος χάριν η κλειστή γραμμική θήκη $\mathcal{D}$ του συνόλου $\{a^n b^m : n, m \in \mathbb{N}\}$. Ομως η $\mathcal{D}$ δεν έχει εν γένει την ιδιότητα $\sigma_{\mathcal{D}}(x) = \sigma_{\mathcal{A}}(x)$ για κάθε $x \in \mathcal{D}$ (παράδειγμα;).

Ονομάζω λοιπόν $\mathcal{B}$ τον δεύτερο μεταθέτη $\{a, b\}''$ των $a$ και $b$, δηλαδή

$$\mathcal{B} = \{x \in \mathcal{A} : xs = sx \text{ για κάθε } s \in \mathcal{A} \text{ ώστε } as = sa \text{ και } bs = sb\}.$$

Έχουμε ήδη παρατηρήσει (δες την Παράγραφο 7.2) ότι η $\mathcal{B}$ είναι μεταθετική άλγεβρα Banach με μονάδα, και είναι εύκολο να ελέγξεις ότι αν $y \in \mathcal{B}$ και $y \in \text{Inv}(\mathcal{A})$ τότε $y^{-1} \in \mathcal{B}$. Επομένως η $\mathcal{B}$ ικανοποιεί τις επιθυμητές ιδιότητες. $\square$

Μπορούμε τώρα να δώσουμε μία δεύτερη απόδειξη της Πρότασης 9.4 χωρίς χρήση του συναρτησιακού λογισμού:

**Πόρισμα 10.13 (βλ. 9.4)** *Έστω $\mathcal{A}$ άλγεβρα Banach με μονάδα και $a, b \in \mathcal{A}$ με $ab = ba$. Τότε*
$$\Delta(\sigma(a), \sigma(b)) \leq \rho(a - b).$$
*Ειδικότερα, η φασματική ακτίνα είναι ομοιόμορφα συνεχής σε* μεταθετικές *υπάλγεβρες της $\mathcal{A}$.*

**Απόδειξη** Από τη σχέση $\sigma(a) \subseteq \sigma(b) + \sigma(a - b)$ έπεται ότι κάθε $\lambda \in \sigma(a)$ είναι της μορφής $z + w$ όπου $z \in \sigma(b)$ και $w \in \sigma(a - b)$, άρα $|\lambda - z| = |w| \leq \rho(a - b)$, επομένως $d(\lambda, \sigma(b)) \leq \rho(a - b)$. Δηλαδή (με τους συμβολισμούς της παραγράφου 9.2)
$$\sigma(a) \subseteq [\sigma(b)]_{\rho(a-b)}.$$
Επειδή $\rho(a - b) = \rho(b - a)$, έχουμε επίσης
$$\sigma(b) \subseteq [\sigma(a)]_{\rho(a-b)}$$
πράγμα που αποδεικνύει το ζητούμενο. $\square$

## 10.2 Ο μετασχηματισμός Gelfand

Αν $\mathcal{A}$ είναι μεταθετική άλγεβρα Banach με μονάδα, θα δείξουμε ότι υπάρχει ένας συμπαγής Hausdorff χώρος $K$ και ένας συνεχής μορφισμός αλγεβρών $\mathcal{G} : \mathcal{A} \to C(K)$ ο οποίος μάλιστα, σε πολλές περιπτώσεις, είναι 1-1. Τότε η $\mathcal{A}$ είναι ισόμορφη, ως άλγεβρα, με μία άλγεβρα συνεχών συναρτήσεων στον $K$.

Όπως θα δούμε, ο χώρος $K$ είναι το σύνολο των χαρακτήρων της $\mathcal{A}$, εφοδιασμένο με την ασθενέστερη τοπολογία που καθιστά τα στοιχεία της $\mathcal{A}$ συνεχείς συναρτήσεις.

**Ορισμός 10.2** *Έστω $\mathcal{A}$ μεταθετική άλγεβρα Banach με μονάδα. Η* **ασθενής-* τοπολογία** *$(w^*)$ στο σύνολο $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ των χαρακτήρων της $\mathcal{A}$ είναι η τοπολογία της σύγκλισης στα σημεία της $\mathcal{A}$:*
*Αν $(\varphi_i)$ είναι δίκτυο στο $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ και $\phi \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$,*

$$\varphi_i \stackrel{w^*}{\to} \varphi \iff \varphi_i(a) \to \varphi(a) \quad \forall a \in \mathcal{A}\,.$$

*Η $w^*$ είναι δηλαδή ο περιορισμός της τοπολογίας γινόμενο του $\mathbb{C}^{\mathcal{A}}$ στο $\mathcal{M}(\mathcal{A})$.*

**Συζήτηση** Γενικότερα, αν $X$ χώρος Banach. Η *ασθενής-* τοπολογία $(w^*)$ του τοπολογικού δυικού $X^*$* είναι εξ ορισμού η τοπολογία της σύγκλισης στα σημεία του $X$. Η $w^*$ είναι δηλαδή ο περιορισμός της τοπολογίας γινόμενο του $\mathbb{C}^X$ στον $X^*$.

Αν ένα οποιοδήποτε υποσύνολο $K$ της μοναδιαίας μπάλας του $X^*$ εφοδιασθεί με την (σχετική) ασθενή-* τοπολογία, τότε κάθε $x \in$ X ορίζει μία συνεχή συνάρτηση $\hat{x} : K \to \mathbb{C} : \phi \to \phi(x)$, η οποία μάλιστα είναι και φραγμένη:

$$\|\hat{x}\|_K := \sup\{|\hat{x}(\phi)| : \phi \in K\} \leq \|x\|$$

(διότι $|\hat{x}(\phi)| = |\phi(x)| \leq \|x\|$ για κάθε $\phi \in K$).
Αν το $K$ είναι $w^*$-συμπαγές (οπότε ο χώρος $C(K)$ είναι χώρος Banach ως προς την νόρμα supremum), ορίζεται έτσι μία απεικόνιση $X \to C(K) : x \to \hat{x}$ η οποία είναι γραμμική [14] και, λόγω της προηγούμενης ανισότητας, συνεχής. Το ζήτημα είναι να επιλέξει κανείς τον χώρο $K$ κατάλληλα, ώστε η απεικόνιση αυτή να έχει επιθυμητές ιδιότητες.

Παραδείγματος χάριν, αν επιλέξει κανείς ολόκληρη την μοναδιαία μπάλα του δυικού (που είναι $w^*$-συμπαγής από το Θεώρημα Αλάογλου - βλ. [9] 17.1) η απεικόνιση γίνεται ισομετρία. Δεν είναι όμως ποτέ επί (γιατί;).

[14] $\widehat{(x+\lambda y)}(\phi) = \phi(x+\lambda y) = \phi(x) + \lambda\phi(\lambda y) = \hat{x}(\phi) + \lambda\hat{y}(\phi)$ γιατί τα στοιχεία $\phi$ του $K$ είναι γραμμικές μορφές

Όταν ο $X$ είναι μεταθετική άλγεβρα Banach, το κατάλληλο “δυικό αντικείμενο” είναι το σύνολο των χαρακτήρων, γιατί αυτοί σέβονται και την πολλαπλασιαστική δομή της άλγεβρας.

Έχουμε δείξει (Πρόταση 10.9) ότι κάθε χαρακτήρας μιάς άλγεβρας Banach $\mathcal{A}$ είναι συνεχής, και μάλιστα έχει νόρμα το πολύ 1. Δηλαδή το σύνολο $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ περιέχεται στην μοναδιαία μπάλα $(\mathcal{A}^*)_1$ του δυικού $\mathcal{A}^*$ της $\mathcal{A}$.

**Πρόταση 10.14** *Έστω $\mathcal{A}$ άλγεβρα Banach με μονάδα. Το σύνολο $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ γίνεται συμπαγής χώρος Hausdorff αν εφοδιασθεί με την ασθενή-* τοπολογία.*

**Απόδειξη** Για κάθε $a \in \mathcal{A}$ θέτω

$$D_a := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \|a\|\} \quad \text{και} \quad D := \prod_{a \in \mathcal{A}} D_a.$$

Δηλαδή το $D$ είναι το σύνολο όλων των συναρτήσεων $\theta : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ που ικανοποιούν $|\theta(a)| \leq \|a\|$ για κάθε $a \in \mathcal{A}$. Κάθε $D_a$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{C}$ επομένως, από το Θεώρημα Tychonoff ([9] 16.1), το $D$ είναι συμπαγής χώρος ως προς την τοπολογία γινόμενο. Αν $\varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$, τότε $\varphi(a) \in D_a$ για κάθε $a \in \mathcal{A}$ (αφού $\|\varphi\| \leq 1$), άρα $\varphi \in D$. Δηλαδή το $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ είναι υποσύνολο του $D$, και η σχετική τοπολογία είναι, όπως παρατηρήσαμε, η ασθενής-*. Αρκεί λοιπόν να δειχθεί ότι το $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ είναι κλειστό υποσύνολο του $D$.

Έστω $\varphi_i \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ και $\theta \in D$ ώστε $\varphi_i(x) \to \theta(x)$ για κάθε $x \in \mathcal{A}$. Θα δείξω ότι $\theta \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$. Πράγματι, για κάθε $a, b \in \mathcal{A}$ έχουμε

(α) $\theta(1) = \lim \varphi_i(1) = 1$, αφού $\varphi_i(1) = 1$ για κάθε $i$.

(β) $\theta(ab) = \lim \varphi_i(ab) = \lim(\varphi_i(a) \cdot \varphi_i(b)) = \lim \varphi_i(a) \cdot \lim \varphi_i(b) = \theta(a) \cdot \theta(b)$ αφού $\varphi_i(ab) = \varphi_i(a) \cdot \varphi_i(b)$ για κάθε $i$.

(γ) $\theta(a + b) = \theta(a) + \theta(b)$ αφού $\varphi_i(a + b) = \varphi_i(a) + \varphi_i(b)$ για κάθε $i$. $\square$

**Παρατήρηση** Η ύπαρξη μονάδας στην $\mathcal{A}$ δεν μπορεί να παραλειφθεί. Παραδείγματος χάριν, ο χώρος των χαρακτήρων της $c_o(\mathbb{N})$ δεν είναι συμπαγής (άσκηση). Από την άλλη μεριά, το σύνολο των χαρακτήρων μίας άλγεβρας πεπερασμένης διάστασης είναι πεπερασμένο (γιατί;) και συνεπώς συμπαγές, είτε η άλγεβρα έχει μονάδα είτε όχι. Παράδειγμα τέτοιας άλγεβρας είναι το επόμενο.

**Παράδειγμα** Στον γραμμικό χώρο $\mathcal{A} = \mathbb{C}^{n+1}$ με βάση $e_0, e_1, \dots, e_n$ ορίζουμε πολλαπλασιασμό από τον κανόνα $e_0 e_k = 0 = e_k e_0$ για κάθε $k = 0, \dots, n$ και

$e_i.e_j = \delta_{ij}e_i$ για $i,j = 1,\dots,n$. Εύκολα ελέγχεται ότι η $\mathcal{A}$ γίνεται μεταθετική άλγεβρα χωρίς μονάδα.

Σημείωσε ότι η άλγεβρα αυτή είναι ισόμορφη με την άλγεβρα των $(n+2)\times(n+2)$ πινάκων της μορφής

$$\begin{pmatrix} 0 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}$$

Εύκολα ελέγχεται ότι $\mathcal{M}(\mathcal{A}) = \{\varphi_i : i = 1,\dots,n\}$, όπου $\varphi_i(e_j) = \delta_{ij}$, $j = 0,\dots,n$.

**Ορισμός 10.3** *Έστω $\mathcal{A}$ μεταθετική άλγεβρα Banach με μονάδα και $x \in \mathcal{A}$. Ορίζουμε*

$$\hat{x} : \mathcal{M}(\mathcal{A}) \to \mathbb{C} : \phi \to \phi(x).$$

*Η απεικόνιση $\mathcal{G} : x \to \hat{x}$ λέγεται* **μετασχηματισμός Gelfand**.

Υπενθυμίζουμε ότι, από τον ορισμό της ασθενούς-* τοπολογίας, για κάθε $x \in \mathcal{A}$ η συνάρτηση $\hat{x} : (\mathcal{M}(\mathcal{A}), w^*) \to \mathbb{C}$ είναι συνεχής, δηλαδή $\hat{x} \in C(\mathcal{M}(\mathcal{A}), w^*)$.

**Θεώρημα 10.15 (Gelfand)** *Ο μετασχηματισμός Gelfand*

$$\mathcal{G} : x \to \hat{x} : \mathcal{A} \to C(\mathcal{M}(\mathcal{A}), w^*)$$

*(i) Είναι μορφισμός αλγεβρών με την ιδιότητα $\mathcal{G}(\mathbf{1}) = 1$.*

*(ii) Ικανοποιεί $\hat{x}(\mathcal{M}(\mathcal{A})) = \sigma(x)$ για κάθε $x \in \mathcal{A}$.*

*(iii) Είναι συνεχής, μάλιστα*

$$\|\hat{x}\|_\infty = \rho(x) \le \|x\|.$$

*για κάθε $x \in \mathcal{A}$.*

*(iv)* $\ker(\mathcal{G}) = \{x \in \mathcal{A} : \rho(x) = 0\}$.

**Απόδειξη** *(i)* Για κάθε $\varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ έχουμε

$$(\hat{x} + \hat{y})(\varphi) = \hat{x}(\varphi) + \hat{y}(\varphi) = \varphi(x) + \varphi(y) = \varphi(x+y) = (\widehat{x+y})(\varphi)$$

επειδή η $\varphi$ είναι γραμμική, δηλαδή

$$\mathcal{G}(x) + \mathcal{G}(y) = \mathcal{G}(x + y).$$

Επίσης

$$(\hat{x} \cdot \hat{y})(\varphi) = \hat{x}(\varphi) \cdot \hat{y}(\varphi) = \varphi(x) \cdot \varphi(y) = \varphi(xy) = \widehat{xy}(\varphi)$$

επειδή η $\varphi$ είναι πολλαπλασιαστική, δηλαδή

$$\mathcal{G}(x) \cdot \mathcal{G}(y) = \mathcal{G}(xy).$$

Άρα η $\mathcal{G}$ είναι μορφισμός αλγεβρών, και

$$\mathcal{G}(\mathbf{1})(\varphi) = \varphi(1) = 1$$

για κάθε $\varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$, δηλαδή $\mathcal{G}(\mathbf{1}) = 1$.

*(ii)* Για κάθε $x \in \mathcal{A}$ έχουμε από την Πρόταση 10.10

$$\sigma(x) = \{\varphi(x) : \varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{A})\} = \{\hat{x}(\varphi) : \varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{A})\} = \hat{x}(\mathcal{M}(\mathcal{A})).$$

*(iii)* Από το *(ii)* έχουμε, χρησιμοποιώντας την (2),

$$\|\hat{x}\|_\infty = \sup\{|\hat{x}(\varphi)| : \varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{A})\} = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(x)\} = \rho(x) \leq \|x\|.$$

*(iv)* Από το *(iii)* προκύπτει ότι $\hat{x} = 0$ αν και μόνον αν $\|\hat{x}\|_\infty = 0$ δηλαδή $\rho(x) = 0$. $\square$

**Ορισμός 10.4** *Έστω $\mathcal{A}$ άλγεβρα με μονάδα. Το* **ριζικό (Radical) του Jacobson** $\mathrm{Rad}(\mathcal{A})$ *της $\mathcal{A}$ είναι η τομή όλων των αριστερών μεγιστικών ιδεωδών της. Αν* $\mathrm{Rad}(\mathcal{A}) = \{0\}$, *η $\mathcal{A}$ λέγεται* **ημιαπλή**.

Αν η $\mathcal{A}$ είναι *μεταθετική άλγεβρα Banach με μονάδα*, τότε

$$\begin{aligned} \mathrm{Rad}(\mathcal{A}) &= \bigcap\{\mathcal{M} \subseteq \mathcal{A} : \mathcal{M} \text{ μεγιστικό ιδεώδες}\} \\ &= \{x \in \mathcal{A} : \phi(x) = 0 \ \forall \phi \in \mathcal{M}(\mathcal{A})\} \\ &= \{x \in \mathcal{A} : \rho(x) = 0\} \end{aligned}$$

δηλαδή το ριζικό ταυτίζεται με το σύνολο των ψευδομηδενοδύναμων στοιχείων (αυτό δεν αληθεύει εν γένει σε μη μεταθετικές άλγεβρες).

Από το *(iv)* του Θεωρήματος Gelfand έπεται ότι

$$\ker(\mathcal{G}) = \mathrm{Rad}(\mathcal{A}),$$

επομένως η $\mathcal{A}$ είναι ημιαπλή αν και μόνον αν ο μετασχηματισμός Gelfand είναι 1-1.

## 10.3 Παραδείγματα

### 10.3.1 Η άλγεβρα $C(K)$

*Αν $K$ είναι χώρος συμπαγής και Hausdorff και $t \in K$, το σύνολο $\mathcal{M}_t = \{f \in C(K) : f(t) = 0\}$ είναι μεγιστικό ιδεώδες της $C(K)$. Κάθε μεγιστικό ιδεώδες της $C(K)$ είναι αυτής της μορφής. Ο χώρος των χαρακτήρων της $C(K)$ είναι ομοιομορφικός με το $K$.*

*Η απεικόνιση Gelfand "είναι" η ταυτοτική απεικόνιση. Είναι ισομετρία και επί.*

**Απόδειξη (i)** Αν $t \in K$ θέτω $\delta_t(f) = f(t)$ για $f \in C(K)$. Είναι σαφές ότι η "εκτίμηση" $\delta_t : C(K) \to \mathbb{C}$ είναι χαρακτήρας της $C(K)$. Επομένως ο πυρήνας της, $\mathcal{M}_t$, είναι μεγιστικό ιδεώδες της $C(K)$. Το ζήτημα είναι να δείξει κανείς το αντίστροφο.

Έστω λοιπόν $\mathcal{M}$ ένα μεγιστικό ιδεώδες της $C(K)$. Αρκεί να δείξω ότι υπάρχει $t \in K$ ώστε $f(t) = 0$ για κάθε $f \in \mathcal{M}$. Γιατί τότε θα έχουμε $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}_t$, άρα, αφού το $\mathcal{M}$ είναι μεγιστικό ιδεώδες, $\mathcal{M} = \mathcal{M}_t$.

Έστω ότι ο ισχυρισμός δεν αληθεύει, δηλαδή ότι για κάθε $s \in K$ υπάρχει $f_s \in \mathcal{M}$ ώστε $f_s(s) \neq 0$. Υπάρχει τότε μία ανοικτή περιοχή $U_s$ του $s$ ώστε η $f_s$ να μην μηδενίζεται πουθενά στην $U_s$. Το σύνολο $\{U_s : s \in K\}$ αποτελεί ανοικτό κάλυμμα του συμπαγούς χώρου $K$, επομένως έχει ένα πεπερασμένο υποκάλυμμα $\{U_1, \ldots, U_n\}$. Ονομάζω $f_1, \ldots, f_n$ τις αντίστοιχες συναρτήσεις και θέτω

$$g = \sum_{i=1}^{n} \overline{f_i} f_i = \sum_{i=1}^{n} |f_i|^2.$$

Ισχυρίζομαι ότι η $g$ δεν μηδενίζεται πουθενά. Πράγματι κάθε $t \in K$ ανήκει σε κάποιο $U_j$, στο οποίο η αντίστοιχη $f_j$ δεν μηδενίζεται. Από την δεύτερη ισότητα έχουμε $g(t) \geq |f_j(t)|^2 > 0$. Επομένως η συνάρτηση $1/g$ ορίζεται και ανήκει στην $C(K)$. Ομως, αφού $f_i \in \mathcal{M}$, η πρώτη ισότητα δείχνει ότι $g \in \mathcal{M}$, άρα $1 = (1/g).g \in \mathcal{M}$, αντίφαση.

Έτσι ο ισχυρισμός αποδείχθηκε.

**(ii)** Δείξαμε λοιπόν ότι η απεικόνιση $t \to \delta_t$ απεικονίζει το $K$ *επί* του συνόλου των χαρακτήρων της $C(K)$. Μάλιστα η απεικόνιση αυτή είναι και 1-1, γιατί αν $t \neq s\,(t, s \in K)$ υπάρχει $f \in C(K)$ ώστε $f(t) = 0$ και $f(s) \neq 0$ (Λήμμα Urysohn), δηλαδή $\delta_t(f) = 0$ και $\delta_s(f) \neq 0$. Επομένως η απεικόνιση

$$\Phi : t \to \delta_t : K \to \mathcal{M}(C(K))$$

είναι αμφιμονοσήμαντη. Για να δείξουμε ότι είναι ομοιομορφισμός αρκεί, αφού ο $K$ είναι συμπαγής, να δείξουμε ότι είναι συνεχής.

Έστω λοιπόν $(t_i)$ δίκτυο στον $K$ ώστε $t_i \to t \in K$. Τότε για κάθε συνεχή συνάρτηση $f$ ισχύει $f(t_i) \to f(t)$, δηλαδή $\delta_{t_i}(f) \to \delta_t(f)$ για κάθε $f \in C(K)$. Από τον ορισμό της ασθενούς-* τοπολογίας, αυτό σημαίνει ακριβώς ότι
$\delta_{t_i} \stackrel{w^*}{\to} \delta_t$.

**(iii)** Αν $f \in C(K)$, για κάθε $t \in K$ έχουμε

$$\hat{f}(\delta_t) = \delta_t(f) = f(t)$$

δηλαδή $(\hat{f} \circ \Phi)(t) = f(t)$ αφού $\delta_t = \Phi(t)$. Επομένως

$$(\mathcal{G}(f)) \circ \Phi = f$$

οπότε, αν "ταυτίσουμε" τους συμπαγείς χώρους $K$ και $\mathcal{M}(C(K))$ μέσω της $\Phi$, ο μετασχηματισμός Gelfand "ταυτίζεται" με την ταυτοτική απεικόνιση: $\mathcal{G}(f) = f$.

### 10.3.2 Η άλγεβρα του δίσκου $A(\mathbb{D})$

Ας θυμηθούμε (παράγραφος 2.5) ότι η $A(\mathbb{D})$ είναι το σύνολο των $f \in C(\mathbb{T})$ που είναι περιορισμοί στο $\mathbb{T}$ συναρτήσεων που ανήκουν στην άλγεβρα

$$\tilde{A} = \{g \in C(\overline{\mathbb{D}}) : g|_{\mathbb{T}} \text{ ολόμορφη } \}.$$

*Για κάθε $z \in \overline{\mathbb{D}}$, η απεικόνιση $\varphi_z : A(\mathbb{D}) \to \mathbb{C}$ όπου $\varphi_z(f) = \tilde{f}(z)$ είναι χαρακτήρας της $A(\mathbb{D})$, και κάθε χαρακτήρας της είναι αυτής της μορφής. Η απεικόνιση $z \to \varphi_z$ είναι ομοιομορφισμός του $\overline{\mathbb{D}}$ επί του χώρου των χαρακτήρων της $A(\mathbb{D})$.*

*Η απεικόνιση Gelfand "είναι" η απεικόνιση $f \to \tilde{f}$. Είναι ισομετρία (άρα είναι 1-1, και έχει κλειστή εικόνα) αλλά δεν είναι επί.*

*Παρατήρηση* Παρόλο που η $A(\mathbb{D})$ είναι υπάλγεβρα της $C(\mathbb{T})$ που έχει χώρο χαρακτήρων $\mathcal{M}(C(\mathbb{T})) \simeq \mathbb{T}$, η $A(\mathbb{D})$ έχει "πολύ μεγαλύτερο" χώρο χαρακτήρων: $\mathcal{M}(A(\mathbb{D})) \simeq \overline{\mathbb{D}}$.

**Απόδειξη** Η απεικόνιση $g \to g|_{\mathbb{T}} : \tilde{A} \to A(\mathbb{D})$ είναι βεβαίως επιμορφισμός αλγεβρών. Επιπλέον, από την αρχή του μεγίστου, είναι ισομετρική:

$$\|g|_{\mathbb{T}}\|_{\mathbb{T}} = \sup\{|g(w)| : w \in \mathbb{T}\} = \sup\{|g(z)| : w \in \overline{\mathbb{D}}\} = \|g\|_{\mathbb{D}} \ ,$$

συνεπώς είναι 1-1. Επομένως η αντίστροφή της είναι (ισο-)μορφισμός αλγεβρών. Δηλαδή η απεικόνιση $f \to \tilde{f} : A(\mathbb{D}) \to \tilde{A}$ είναι (ισο-)μορφισμός αλγεβρών.

Είναι εύκολο τώρα να ελεγχθεί ότι, για κάθε $z \in \overline{\mathbb{D}}$, η απεικόνιση

$$\phi_z : f \to \tilde{f} : A(\mathbb{D}) \to \mathbb{C}$$

είναι (σύνθεση μη μηδενικών μορφισμών, άρα) χαρακτήρας της $A(\mathbb{D})$.

Αντίστροφα αν $\varphi : A(\mathbb{D}) \to \mathbb{C}$ είναι χαρακτήρας, θέτω $z = \varphi(f_1)$ όπου $f_1(w) = w$ $(w \in \mathbb{T})$ και παρατηρώ ότι $|z| \leq \|\varphi\|\|f_1\| = 1$, δηλαδή $z \in \overline{\mathbb{D}}$. Θα δείξω ότι $\varphi = \varphi_z$. Πράγματι, αν $p(w) = \sum_{k=0}^n a_k w^k$ είναι πολυώνυμο, δηλαδή $p = \sum_{k=0}^n a_k f_1^k$, τότε

$$\varphi(p) = \sum_{k=0}^n a_k \varphi(f_1^k) = \sum_{k=0}^n a_k \varphi(f_1)^k = \sum_{k=0}^n a_k z^k = \tilde{p}(z) = \varphi_z(p).$$

Επειδή οι $\varphi$ και $\varphi_z$ είναι συνεχείς και ταυτίζονται στο σύνολο των πολυωνύμων, που είναι πυκνό στην $A(\mathbb{D})$ (όπως έχουμε αποδείξει), έπεται ότι $\varphi(f) = \varphi_z(f)$ για κάθε $f \in A(\mathbb{D})$.

Δείξαμε λοιπόν ότι η απεικόνιση

$$\Psi : z \to \varphi_z : \overline{\mathbb{D}} \to \mathcal{M}(A(\mathbb{D}))$$

είναι επί. Είναι εύκολο να δεί κανείς ότι είναι 1-1: αν $z \neq w$, τότε $\tilde{f}_1(z) \neq \tilde{f}_1(w)$ δηλαδή $\phi_z(f_1) \neq \phi_w(f_1)$.

Εξίσου εύκολα επαληθεύεται ότι η *αντίστροφη* απεικόνιση $\varphi_z \to z$ είναι συνεχής: αν $\varphi_{z_i} \stackrel{w^*}{\to} \varphi_z$ τότε $\varphi_{z_i}(f_1) \to \varphi_z(f_1)$, άρα $z_i \to z$. Επομένως οι συμπαγείς χώροι $\overline{\mathbb{D}}$ και $\mathcal{M}(A(\mathbb{D}))$ είναι ομοιομορφικοί.

Αν $f \in A(\mathbb{D})$, για κάθε $z \in \overline{\mathbb{D}}$ έχουμε

$$\hat{f}(\varphi_z) = \varphi_z(f) = \tilde{f}(z)$$

δηλαδή $(\hat{f} \circ \Psi)(z) = \tilde{f}(z)$. Επομένως

$$(\mathcal{G}(f)) \circ \Psi = \tilde{f}.$$

οπότε, αν "ταυτίσουμε" τους συμπαγείς χώρους $\overline{\mathbb{D}}$ και $\mathcal{M}(A(\mathbb{D}))$ μέσω της $\Psi$, ο μετασχηματισμός Gelfand "ταυτίζεται" με την απεικόνιση: $f \to \tilde{f}$.

Η απεικόνιση Gelfand είναι ισομετρία: για κάθε $f \in A(\mathbb{D})$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{G}(f)\|_\infty &= \sup\{\hat{f}(\varphi) : \varphi \in \mathcal{M}(A(\mathbb{D}))\} = \sup\{\hat{f}(\phi_z) : z \in \overline{\mathbb{D}}\} \\
&= \sup\{\tilde{f}(z) : z \in \overline{\mathbb{D}}\} = \sup\{\tilde{f}(z) : z \in \mathbb{T}\} = \|f\|
\end{aligned}$$

λόγω της αρχής του μεγίστου.

Τέλος, η απεικόνιση Gelfand δεν είναι επί της $C(\mathcal{M}(A(\mathbb{D})))$: Πράγματι, αν μία συνάρτηση $f \in C(\overline{\mathbb{D}})$ δεν είναι ολόμορφη στο $\mathbb{D}$ (π.χ. $f(z) = \bar{z}$), τότε η $f \circ \Psi^{-1}$ ανήκει στην $C(\mathcal{M}(A(\mathbb{D})))$ αλλά όχι στην $\mathcal{G}(A(\mathbb{D}))$.

### 10.3.3 Η άλγεβρα Wiener ή άλγεβρα Fourier $\mathcal{W}$

Θυμίζουμε (παράγραφος (2.8)) ότι πρόκειται για το σύνολο $\mathcal{W}$ των συναρτήσεων $f$ της μορφής

$$f(e^{it}) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} a_k e^{ikt}, \qquad e^{it} \in \mathbb{T}$$

όπου $\sum_k |a_k| < \infty$, και η νόρμα είναι $\|f\|_w := \sum_k |a_k|$.

*Ο χώρος $\mathcal{M}(\mathcal{W})$ των χαρακτήρων είναι ομοιομορφικός με τον μοναδιαίο κύκλο $\mathbb{T}$.*

*Η απεικόνιση Gelfand είναι 1-1, αλλά δεν είναι επί: έχει πυκνή, αλλά όχι κλειστή εικόνα, και (επομένως) η αντίστροφη απεικόνιση δεν είναι συνεχής.*

**Απόδειξη** Η $\mathcal{W}$ είναι υπάλγεβρα της άλγεβρας $C(\mathbb{T})$ (η σειρά $\sum_k a_k e^{ikt}$ συγκλίνει ομοιόμορφα) και περιέχει την μονάδα $\mathbf{1}$. Άρα, κάθε χαρακτήρας της $C(\mathbb{T})$ ορίζει έναν χαρακτήρα της $\mathcal{W}$. Επίσης, η $\mathcal{W}$ είναι $\|\cdot\|_\infty$-πυκνή στην $C(\mathbb{T})$, αφού περιέχει τα τριγωνομετρικά πολυώνυμα. [15] Επομένως κάθε χαρακτήρας της $\mathcal{W}$ επεκτείνεται μοναδικά σε χαρακτήρα της $C(\mathbb{T})$.

Αλλά γνωρίζουμε τους χαρακτήρες της $C(\mathbb{T})$: είναι ακριβώς οι εκτιμήσεις $\{\delta_z : z \in \mathbb{T}\}$ (παράγραφος 10.3.1). Δηλαδή η απεικόνιση

$$\Phi : \mathbb{T} \to \mathcal{M}(\mathcal{W}) : z \to \delta_z$$

είναι 1-1 και επί.

Δεν είναι μάλιστα δύσκολο να δείξει κανείς απευθείας (χωρίς τη χρήση του χαρακτηρισμού του $\mathcal{M}(C(K))$ ότι κάθε χαρακτήρας $\varphi$ της $\mathcal{W}$ είναι εκτίμηση.

[15] Αυτό έπεται π.χ. από το Θεώρημα Stone-Weierstrass ή από το Θεώρημα Fejér.

*Απόδειξη* Αν $\varphi$ είναι χαρακτήρας της $\mathcal{W}$, θέτω $z = \varphi(f_1)$ και ισχυρίζομαι ότι $z \in \mathbb{T}$ και $\varphi = \delta_z$. Πράγματι, αφενός έχουμε $|z| = |\varphi(f_1)| \le \|\varphi\|\|f_1\|_w = 1$. Αλλά από την άλλη, επειδή $f_1 \in \text{Inv}(\mathcal{W})$ άρα $\varphi(f_1) \neq 0$ έχουμε $\varphi(f_1^{-1}) = (\varphi(f_1))^{-1}$, επομένως $\frac{1}{|z|} = |\varphi(f_1^{-1})| \le \|\varphi\|\|f_1^{-1}\|_w = 1$. Έδειξα λοιπόν ότι $z \in \mathbb{T}$.

Τώρα, για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ αν $f_k(e^{it}) = e^{ikt}$ έχουμε

$$z^k = (\varphi(f_1))^k = \varphi(f_1^k) = \varphi(f_k)$$

δηλαδή $\varphi(f_k) = \delta_z(f_k)$. Επομένως οι συνεχείς γραμμικές μορφές $\varphi$ και $\delta_z$ ταυτίζονται στην γραμμική θήκη του συνόλου $\{f_k : k \in \mathbb{Z}\}$, που είναι πυκνή στην $\mathcal{W}$, άρα ταυτίζονται παντού. Ο ισχυρισμός αποδείχθηκε.

Η απεικόνιση $\delta_z \to z$ είναι συνεχής, γιατί αν $\delta_{z_i} \stackrel{w^*}{\to} \delta_z$ τότε $\delta_{z_i}(f_1) \to \delta_z(f_1)$, άρα $z_i \to z$. Αφού οι δύο χώροι είναι συμπαγείς, η απεικόνιση $\Phi$ είναι ομοιομορφισμός.

Για κάθε $f \in \mathcal{W}$ και $\delta_z \in \mathcal{M}(\mathcal{W})$ όπου $z = e^{i\theta}$, έχουμε

$$\mathcal{G}(f)(\delta_z) = \delta_z(f) = f(e^{i\theta})$$

δηλαδή, αν "ταυτίσουμε" τους χώρους $\mathbb{T}$ και $\mathcal{M}(\mathcal{W})$, τότε η απεικόνιση Gelfand "ταυτίζεται" με την ταυτοτική απεικόνιση. Ειδικότερα, η απεικόνιση Gelfand είναι 1-1. Επίσης, η εικόνα της $\mathcal{G}$ είναι πυκνή στην $C(\mathcal{M}(\mathcal{W}))$, γιατί η $\mathcal{W}$ είναι πυκνή στην $C(\mathbb{T})$.

Όμως ο μετασχηματισμός Gelfand δεν απεκονίζει την $\mathcal{W}$ επί της $C(\mathcal{M}(\mathcal{W}))$, γιατί η $\mathcal{W}$ δεν ισούται με την $C(\mathbb{T})$: υπάρχουν συνεχείς συναρτήσεις που η σειρά Fourier τους δεν συγκλίνει απόλυτα. Ένα τέτοιο συγκεκριμένο παράδειγμα είναι η

$$g(e^{it}) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sin kt}{k \log k}.$$

Αποδεικνύεται ότι η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα στον $\mathbb{T}$, άρα ορίζει συνεχή συνάρτηση, αλλά βεβαίως δεν συγκλίνει απόλυτα. (Ας θυμηθούμε επίσης ότι υπάρχουν συνεχείς συναρτήσεις που η σειρά Fourier τους δεν συγκλίνει).

Το επόμενο Θεώρημα αποδείχθηκε αρχικά από τον N. Wiener με διαφορετικές μεθόδους. Σήμερα, είναι ένα άμεσο πόρισμα της θεωρίας Gelfand.

**Θεώρημα 10.16 (Wiener)** *Αν η $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ έχει απολύτως συγκλίνουσα σειρά Fourier και δεν μηδενίζεται πουθενά στον $\mathbb{T}$, τότε η $1/f$ έχει και αυτή απολύτως συγκλίνουσα σειρά Fourier.*
*Με άλλα λόγια:*
*Αν $f \in \mathcal{W}$ και $f(e^{it}) \neq 0$ για κάθε $e^{it} \in \mathbb{T}$, τότε $1/f \in \mathcal{W}$.*

**Απόδειξη** Για κάθε $\varphi = \delta_z \in \mathcal{M}(\mathcal{W})$ από την υπόθεση έχουμε $\varphi(f) \neq 0$, οπότε (Πρόταση 10.10 (α)) $f \in \text{Inv}(\mathcal{W})$. Δηλαδή υπάρχει $g \in \mathcal{W}$ ώστε $fg = 1$. Οι πράξεις όμως στην $\mathcal{W}$ έχουν ορισθεί *κατά σημείο*, οπότε $g(t) = 1/f(e^{it})$ για κάθε $e^{it} \in \mathbb{T}$.

Η θεωρία Gelfand επιτρέπει μια απλή απόδειξη της ακόλουθης επέκτασης του Λήμματος του Wiener.

**Πρόταση 10.17 (Wiener - Levy)** *Αν $f \in \mathcal{W}$ και $h$ είναι συνάρτηση ολόμορφη σε μια περιοχή του $f(\mathbb{T})$, τότε $h \circ f \in \mathcal{W}$.*

**Απόδειξη** Παρατηρούμε πρώτα ότι

$$\sigma(f) = \{\delta_z(f) : \delta_z \in \mathcal{M}(\mathcal{W})\} = \{f(e^{it})) : e^{it}) \in \mathbb{T}\} = f(\mathbb{T}).$$

Συνεπώς αφού η $h$ είναι ολόμορφη σε μια περιοχή του $\sigma(f)$, από τον συναρτησιακό λογισμό για ολόμορφες συναρτήσεις ορίζεται το $h(f) \in \mathcal{W}$.

Θα δείξουμε ότι $h(f) = h \circ f$. Παρατηρούμε ότι αυτό αληθεύει όταν η $h = p$ είναι πολυώνυμο. Επίσης, αν $q$ είναι πολυώνυμο που δεν μηδενίζεται στο $f(\mathbb{T})$, τότε $q(f) = q \circ f \in \text{Inv}(\mathcal{W})$, άρα $\frac{1}{q \circ f} \in \mathcal{W}$. Συνεπώς η σχέση $h(f) = h \circ f$ ισχύει όταν η $h = \frac{p}{q}$ είναι ρητή συνάρτηση ολόμορφη στο $f(\mathbb{T})$. Αλλά από το θεώρημα Runge, κάθε συνάρτηση $h$ ολόμορφη σε μια περιοχή $U$ του $f(\mathbb{T})$ προσεγγίζεται από μια ακολουθία $(r_n)$ τέτοιων ρητών συναρτήσεων ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του $U$. Τότε όμως $\|h(f) - r_n(f)\|_W \to 0$ (Θεώρημα 7.7). Συνεπώς για κάθε $e^{it}$ έχουμε $h(f)(e^{it}) = \lim_n r_n(f)(e^{it}) = \lim_n (r_n \circ f)(e^{it}) = (h \circ f)(e^{it})$. $\square$

### 10.3.4 Η άλγεβρα $\ell^1(\mathbb{Z})$

Η άλγεβρα αυτή είναι ισόμορφη ως άλγεβρα Banach με την άλγεβρα του Wiener μέσω του μετασχηματισμού Fourier $\mathcal{F} : \mathcal{W} \to \ell^1 : f \to \hat{f}$ (βλ. παραγρ. 2.6 και 2.8). Επομένως ο χώρος $\mathcal{M}(\ell^1)$ των χαρακτήρων της είναι ομοιομορφικός με τον $\mathbb{T}$.

Συγκεκριμένα η απεικόνιση $\Psi : \mathbb{T} \to \mathcal{M}(\ell^1) : z \to \psi_z$ όπου $\psi_z((x_n)) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n z^n$ είναι ομοιομορφισμός.

Αν "ταυτίσουμε" τους χώρους αυτούς, τότε ο μετασχηματισμός Gelfand "ταυτίζεται" με τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier, δηλαδή

$$(\mathcal{G}(x))(\Psi(e^{i\theta})) = (\mathcal{F}^{-1}(x))(\theta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n e^{in\theta}$$

για κάθε $x = (x_n) \in \ell^1(\mathbb{Z})$.

Όπως δείξαμε για την (ισόμορφη) άλγεβρα Wiener, ο μετασχηματισμός Gelfand είναι 1-1, και έχει πυκνή εικόνα, αλλά δεν είναι επί της $C(\mathcal{M}(\ell^1))$.

### 10.3.5 Η άλγεβρα $L^1(\mathbb{R})$

*Ο χώρος των χαρακτήρων της $L^1(\mathbb{R})$ είναι ομοιομορφικός με τον $\mathbb{R}$ και ο μετασχηματισμός Gelfand "είναι" ο μετασχηματισμός Fourier $L^1(\mathbb{R}) \to C_0(\mathbb{R})$. Ο μετασχηματισμός Gelfand είναι 1-1, επομένως η $L^1(\mathbb{R})$ είναι ημιαπλή άλγεβρα.*

Η συνέλιξη $(f, g) \to f * g$ όπου

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s)g(t-s)ds$$

ορίζει πολλαπλασιασμό στον $L^1(\mathbb{R})$ ως προς τον οποίο γίνεται μεταθετική άλγεβρα Banach. [16]

Ένα σημαντικό εργαλείο για τα επόμενα είναι το γεγονός ότι η δράση $t \to f_t$ όπου $f(s) = s - t$ της ομάδας $\mathbb{R}$ στον χώρο $\mathbb{R}$ επάγει μια δράση της $\mathbb{R}$ στον χώρο $L^1(\mathbb{R})$:

**Πρόταση 10.18** *Η απεικόνιση*

$$V_s : C_{oo}(\mathbb{R}) \to C_{oo}(\mathbb{R}) : g \to g_s$$

*όπου*[17] *$g_s(t) = g(t-s)$ επεκτείνεται σε ισομετρικό τελεστή $U_s : L^1(\mathbb{R}) \to L^1(\mathbb{R})$. Για κάθε $g \in L^1(\mathbb{R})$ η απεικόνιση $s \to U_s(g) : \mathbb{R} \to L^1(\mathbb{R})$ είναι συνεχής.*

*Γράφουμε $g_s = U_s(g)$ για κάθε $g \in L^1(\mathbb{R})$ και $s \in \mathbb{R}$.*

**Απόδειξη** Έστω $g \in C_{oo}(\mathbb{R})$. Επειδή το μέτρο Lebesgue είναι αναλλοίωτο ως προς μεταφορές, έχουμε για κάθε $s \in \mathbb{R}$

$$\|V_s(g)\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |g(t-s)|dt = \int_{\mathbb{R}} |g(x)|dx = \|g\|_1.$$

Επομένως ο (προφανώς γραμμικός) τελεστής $V_s$ διατηρεί την $\|.\|_1$ στον $C_{oo}(\mathbb{R})$. Ειδικότερα είναι $\|.\|_1$-συνεχής, άρα έχει μοναδική επέκταση σε γραμμική ισομετρία $U_s : L^1(\mathbb{R}) \to L^1(\mathbb{R})$.

[16] βλ. [7], Πρόταση 11.30.

[17] Με $C_{oo}(\mathbb{R})$ συμβολίζουμε τον χώρο των συνεχών συναρτήσεων με συμπαγή φορέα. Είναι γνωστό ότι ο $C_{oo}(\mathbb{R})$ είναι πυκνός υπόχωρος του $L^1(\mathbb{R})$ ([7], Πρόταση 11.29).

Για τον δεύτερο ισχυρισμό, υποθέτω πρώτα ότι $g \in C_{oo}(\mathbb{R})$ και θα δείξω ότι $\lim_{s\to 0} \|U_s(g) - g\|_1 = 0$.

Πράγματι, αν η $g$ μηδενίζεται έξω από το διάστημα $[-\mathrm{M}, \mathrm{M}]$, τότε η $g_s$ μηδενίζεται έξω από το $[-M+s, M+s]$, άρα η οικογένεια $\{g_s : |s| \le M\}$ φέρεται από το συμπαγές $[-2M, 2M]$. Επειδή η $g$ είναι *ομοιόμορφα* συνεχής, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ με $|x - y| < \delta$ να ισχύει $|g(x) - g(y)| < \varepsilon/4\mathrm{M}$. Επομένως αν $|s| < \min(\delta, \mathrm{M})$ έχουμε

$$\|g_s - g\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |g(t-s) - g(t)| dt = \int_{-2M}^{2M} |g(t-s) - g(t)| dt < \varepsilon$$

άρα $\lim_{s\to 0} \|U_s(g) - g\|_1 = 0$.

Αν τώρα η $g \in L^1(\mathbb{R})$ είναι τυχαία, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $g_\varepsilon \in C_{oo}(\mathbb{R})$ με $\|g - g_\varepsilon\|_1 < \varepsilon$. Από την προηγούμενη παράγραφο υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $\|U_s(g_\varepsilon) - g_\varepsilon\|_1 < \varepsilon$ για κάθε $s \in (-\delta, \delta)$. Τότε όμως

$$\begin{aligned} \|U_s(g) - g\|_1 &\le \|U_s(g) - U_s(g_\varepsilon)\|_1 + \|U_s(g_\varepsilon) - g_\varepsilon\|_1 + \|g_\varepsilon - g\|_1 \\ &\le \|g - g_\varepsilon\|_1 + \|U_s(g_\varepsilon) - g_\varepsilon\|_1 + \|g_\varepsilon - g\|_1 < 3\varepsilon \end{aligned}$$

για κάθε $s \in (-\delta, \delta)$ (χρησιμοποίησα το γεγονός ότι κάθε $U_s$ είναι ισομετρία). Αυτό δείχνει ότι $\lim_{s\to 0} \|U_s(g) - g\|_1 = 0$. Τέλος, αν $s \to s_o$ έχουμε $U_s = U_{s-s_o} U_{s_o}$ και συνεπώς

$$\lim_{s\to s_o} \|U_s(g) - U_{s_o}(g)\|_1 = \lim_{s\to s_o} \|U_{s-s_o}(U_{s_o}(g)) - U_{s_o}(g)\|_1 = 0\,. \qquad \square$$

Η άλγεβρα $(L^1(\mathbb{R}), *)$ δεν έχει μονάδα (γιατί;). Θεωρούμε λοιπόν την μοναδοποίησή της $\mathcal{A} = L^1(\mathbb{R}) \oplus \mathbb{C}$. Η $L^1(\mathbb{R})$ είναι μεγιστικό ιδεώδες στην $\mathcal{A}$, συνεπώς υπάρχει ακριβώς ένας χαρακτήρας της $\mathcal{A}$, έστω $\varphi_\infty$, που μηδενίζει την $L^1(\mathbb{R})$. Όλοι οι άλλοι χαρακτήρες της $\mathcal{A}$ ορίζουν χαρακτήρες της $L^1(\mathbb{R})$, και αντίστροφα κάθε χαρακτήρας $\psi$ της $L^1(\mathbb{R})$ επεκτείνεται μοναδικά σε χαρακτήρα $\varphi$ της $\mathcal{A}$, θέτοντας $\varphi(f, \lambda) = \psi(f) + \lambda$.

Θα δείξω ότι όλοι οι χαρακτήρες της $L^1(\mathbb{R})$ είναι της μορφής $\varphi_\xi$ ($\xi \in \mathbb{R}$), όπου η απεικόνιση $\varphi_\xi : L^1(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ ορίζεται από την σχέση

$$\varphi_\xi(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-it\xi} dt$$

(το ολοκλήρωμα υπάρχει, αφού η συνάρτηση $t \to f(t)e^{-it\xi}$ ανήκει στον $L^1(\mathbb{R})$).

Η $\varphi_\xi$ είναι γραμμική μορφή, η οποία δεν είναι η μηδενική (γιατί π.χ. δεν μηδενίζει την χαρακτηριστική συνάρτηση του διαστήματος $[-1, 1]$).

Ισχυρίζομαι ότι η $\varphi_\xi$ είναι χαρακτήρας της $L^1(\mathbb{R})$, δηλαδή ότι $\varphi_\xi(f * g) = \varphi_\xi(f).\varphi_\xi(g)$. Πράγματι,

$$\begin{aligned}
\varphi_\xi(f * g) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (f * g)(t) e^{-it\xi} dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) g(t-s) ds \right) e^{-it\xi} dt \\
&\overset{*}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) \left( \int_{-\infty}^{+\infty} g(t-s) e^{-i(t-s)\xi} dt \right) e^{-is\xi} ds \\
&\overset{**}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) \left( \int_{-\infty}^{+\infty} g(r) e^{-ir\xi} dr \right) e^{-is\xi} ds \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) \varphi_\xi(g) e^{-is\xi} ds = \varphi_\xi(f).\varphi_\xi(g)
\end{aligned}$$

όπου η ισότητα (*) έπεται από το Θεώρημα Fubini και η ισότητα (**) από την "αλλαγή μεταβλητής" $r = t - s$, δηλαδή στην ουσία από το γεγονός ότι το μέτρο Lebesgue στην *ομάδα* $\mathbb{R}$ είναι αναλλοίωτο ως προς μεταφορές.

Είναι εύκολη άσκηση[18] να δείξεις ότι η απεικόνιση $\xi \to \varphi_\xi : \mathbb{R} \to \mathcal{M}(L^1(\mathbb{R}))$ είναι 1-1. Θα δείξω ότι είναι επί.

Έστω λοιπόν $\varphi \in \mathcal{M}(L^1(\mathbb{R}))$. Ειδικότερα η $\varphi$ είναι συνεχής γραμμική μορφή στον $L^1(\mathbb{R})$ (ανήκει στον δυικό του). Αλλά είναι γνωστό ότι ο δυικός του $L^1(\mathbb{R})$ είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον $L^\infty(\mathbb{R})$, άρα υπάρχει[19] $\chi \in L^\infty(\mathbb{R})$ ώστε

$$\varphi(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\chi(t) dt \quad (f \in L^1(\mathbb{R})).$$

*Ισχυρισμός 1* Για κάθε $f \in L^1(\mathbb{R})$ με $\varphi(f) \neq 0$,

$$\varphi(f)\chi(s) = \varphi(f_s) \quad \text{σχεδόν για κάθε } s \in \mathbb{R}. \tag{9}$$

[18] υπολόγισε το $\varphi_\xi(f)$ για την $f(t) = \exp(-|t-1|)$.

[19] βλ. [7], Θεώρημα 11.24

*Απόδειξη* Για κάθε $g \in L^1(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned}
\varphi(f)\varphi(g) &= \varphi(f * g) = \int_{-\infty}^{+\infty} (f * g)(t)\chi(t)dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} g(s)f(t-s)ds \right) \chi(t)dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} g(s) \left( \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-s)\chi(t)dt \right) ds \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} g(s) \left( \int_{-\infty}^{+\infty} f_s(t)\chi(t)dt \right) ds \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} g(s)\varphi(f_s)ds
\end{aligned}$$

δηλαδή

$$\varphi(f) \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\chi(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} g(s)\varphi(f_s)ds. \tag{10}$$

Αφού η ισότητα αυτή ισχύει για κάθε $g \in L^1(\mathbb{R})$, έπεται ότι οι συναρτήσεις $s \to \varphi(f)\chi(s)$ και $s \to \varphi(f_s)$ ορίζουν τα ίδια στοιχεία του $L^\infty(\mathbb{R})$, άρα είναι σχεδόν παντού ίσες. $\square$

Έχουμε δείξει όμως ότι η απεικόνιση $s \to f_s : \mathbb{R} \to L^1(\mathbb{R})$ είναι συνεχής. Αφού και η $\varphi$ είναι συνεχής, έπεται ότι η $s \to \varphi(f_s) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ είναι συνεχής. Αλλάζοντας λοιπόν, αν χρειασθεί, την $\chi$ σε ένα σύνολο μέτρου μηδέν, μπορώ (λόγω της (10)) να υποθέσω ότι η $\chi$ είναι *συνεχής* και ότι η ισότητα ( 9) ισχύει για κάθε $s \in \mathbb{R}$. Εφαρμόζοντας την ισότητα αυτή δυό φορές, μία στο σημείο $s+t$ και μία για την $f_s$, έχουμε

$$\varphi(f)\chi(s+t) = \varphi(f_{s+t}) = \varphi((f_s)_t)) = \varphi(f_s)\chi(t) = \varphi(f)\chi(s)\chi(t)$$

από το οποίο προκύπτει (αφού $\varphi(f) \neq 0$) ότι

$$\chi(s+t) = \chi(s)\chi(t) \quad \text{για κάθε} \quad s, t \in \mathbb{R}. \tag{11}$$

*Ισχυρισμός 2* Υπάρχει $\xi \in \mathbb{R}$ ώστε

$$\chi(t) = e^{-it\xi}.$$

*Απόδειξη* Παρατήρησε πρώτα ότι η $\chi$ δεν είναι μηδέν. Η σχέση (11) δίνει λοιπόν $\chi(0) = 1$. Συνεπώς από την συνέχεια της $\chi$, σε κάποιο διάστημα γύρω απ'το $0$

οι τιμές της $\chi$ θα είναι κοντά στο $1$, άρα υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

$$\int_0^\delta \chi(t)dt = b \neq 0.$$

Ισχυρίζομαι τώρα ότι η $\chi$ είναι διαφορίσιμη! Πράγματι, χρησιμοποιώντας και την (11) έχουμε

$$b\chi(s) = \int_0^\delta \chi(t)\chi(s)dt = \int_0^\delta \chi(t+s)dt = \int_s^{s+\delta} \chi(u)du.$$

Αφού η $\chi$ είναι συνεχής, το ολοκλήρωμα δεξιά είναι διαφορίσιμη συνάρτηση του $s$, άρα η $\chi$ είναι διαφορίσιμη.

Μπορώ λοιπόν να παραγωγίσω την (11) ως προς $s$ :

$$\chi'(s+t).1 = \chi'(s).\chi(t)$$

άρα, θέτοντας $s = 0$,

$$\chi'(t) = \chi'(0)x(t) = \lambda\chi(t).$$

Η διαφορική αυτή εξίσωση έχει γενική λύση $\chi(t) = \chi(0)e^{\lambda t} = e^{\lambda t}$. Αλλά αφού η $\chi$ είναι φραγμένη στο $\mathbb{R}$, το $\lambda$ δεν μπορεί παρά να είναι καθαρά φανταστικός αριθμός, δηλαδή της μορφής $\lambda = -i\xi$ για κάποιο $\xi \in \mathbb{R}$. $\square$

Αποδείχθηκε λοιπόν ότι η απεικόνιση

$$\xi \to \varphi_\xi \, : \, \mathbb{R} \cup \{\infty\} \to \mathcal{M}(L^1(\mathbb{R}) \oplus \mathbb{C})$$

είναι αμφιμονοσήμαντη. Για να δείξω ότι είναι ομοιομορφισμός (όπου ο $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ είναι η συμπαγοποίηση ενός σημείου του $\mathbb{R}$), αρκεί να δείξω ότι είναι συνεχής. Για να δείξω την συνέχεια σε κάποιο $\xi_o \in \mathbb{R}$, πρέπει να δείξω ότι αν $\xi \to \xi_o$, τότε $\varphi_\xi(f) \to \varphi_{\xi_o}(f)$ για κάθε $f \in L^1(\mathbb{R})$, δηλαδή ότι

$$\lim_{\xi\to\xi_o} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-it\xi}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-it\xi_o}dt$$

και αυτό είναι απλή συνέπεια του Θεωρήματος κυριαρχημένης σύγκλισης.

Για να δείξω την συνέχεια στο σημείο $\infty$, πρέπει να δείξω ότι για κάθε $f \in L^1(\mathbb{R})$ και κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $K \subseteq \mathbb{R}$ *συμπαγές* ώστε $|\varphi_\xi(f)| < \varepsilon$ για κάθε $\xi \notin K$. Ισοδύναμα πρέπει να αποδειχθεί το κλασσικό

**Λήμμα 10.19 ( Riemann - Lebesgue)** *Για κάθε* $f \in L^1(\mathbb{R})$,

$$\lim_{\xi \to \pm\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-it\xi}dt = 0.$$

**Απόδειξη** Επειδή $e^{-i\pi} = -1$, έχουμε

$$\varphi_\xi(f) = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\xi(t+\frac{\pi}{\xi})}dt = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(t-\frac{\pi}{\xi})e^{-it\xi}dt$$

και συνεπώς

$$2\varphi_\xi(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} (f(t) - f(t-\frac{\pi}{\xi}))e^{-it\xi}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} (f(t) - f_{\frac{\pi}{\xi}}(t))e^{-it\xi}dt$$

άρα

$$2|\varphi_\xi(f)| \leq \|f - f_{\frac{\pi}{\xi}}\|_1.$$

Αλλά η συνέχεια της $s \to f_s$ ως προς την νόρμα $\|.\|_1$ δείχνει ότι το δεξιά μέλος τείνει στο $0$ καθώς το $\xi$ τείνει στο $\pm\infty$. $\square$

Δείξαμε λοιπόν ότι το $\mathbb{R}$ είναι ομοιομορφικό με το $\mathcal{M}(L^1(\mathbb{R}))$. Αν ταυτίσουμε τους δύο αυτούς χώρους, τότε ο μετασχηματισμός Gelfand ταυτίζεται με τον μετασχηματισμό Fourier

$$\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \to C_0(\mathbb{R}) \; : \; f \to \hat{f}$$

που ορίζεται από την σχέση

$$\hat{f}(\xi) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-it\xi}dt.$$

Η συνάρτηση $\hat{f}$ ανήκει στην $C_0(\mathbb{R})$ γιατί είναι συνεχής και $\lim_{\xi \to \pm\infty} \hat{f}(\xi) = 0$, όπως δείξαμε.

*Ισχυρισμός* Ο μετασχηματισμός Gelfand είναι 1-1.

*Απόδειξη* Αν $f \in L^1(\mathbb{R})$ και $\hat{f}(\xi) = 0$ για κάθε $\xi$, πρέπει να δείξω ότι $f = 0$ σχεδόν παντού. Αρκεί να δείξω ότι $\int f(t)h(t)dt = 0$ για "αρκετές" συναρτήσεις

$h$. Αν $g \in L^1(\mathbb{R})$ και $\hat{g} \in L^1(\mathbb{R})$, έχουμε

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(x)g(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-itx}dt \right) g(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \left( \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)e^{-itx}dx \right) dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\hat{g}(t)dt. \end{aligned}$$

Μένει να βρεθούν "αρκετές" συναρτήσεις της μορφής $\hat{g}$. Παρατηρούμε πρώτα ότι κάθε συνάρτηση της μορφής $h(t) = p(t)e^{-at^2}$ όπου $a > 0$ και $p$ πολυώνυμο ισούται με $\hat{g}$ για κάποια $g$ της ίδιας μορφής (άσκηση). Συνεπώς

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)h(t)dt = 0$$

για κάθε συνάρτηση της μορφής $h(t) = p(t)e^{-at^2}$.

Ισχυρίζομαι όμως ότι κάθε συνάρτηση $\psi \in C_o(\mathbb{R})$ προσεγγίζεται ομοιόμορφα από γραμμικούς συνδυασμούς τέτοιων συναρτήσεων. Πράγματι, αν ονομάσω $\mathcal{A}$ την γραμμική θήκη όλων των συναρτήσεων της μορφής $h(t) = \lambda + t^n e^{-at^2}$ όπου $\lambda \in \mathbb{C}, n = 0, 1, 2, ...$ και $a > 0$, παρατηρώ ότι κάθε $h \in \mathcal{A}$ επεκτείνεται σε συνεχή συνάρτηση στην συμπαγοποίηση ενός σημείου $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ του $\mathbb{R}$ (θέτοντας $h(\infty) = \lambda$). Έτσι η $\mathcal{A}$ γίνεται υπάλγεβρα της $C(\mathbb{R} \cup \{\infty\})$ που περιέχει τις σταθερές, χωρίζει τα σημεία και περιέχει τον μιγαδικό συζυγή κάθε στοιχείου της. Από το Θεώρημα Stone - Weierstrass (μιγαδική μορφή) έπεται ότι η $\mathcal{A}$ είναι πυκνή στην $C(\mathbb{R} \cup \{\infty\})$. Άρα υπάρχει ακολουθία $(\psi_n)$ στην $\mathcal{A}$ που συγκλίνει στην $\psi$ ομοιόμορφα στο $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Επειδή $\psi(\infty) = 0$, η ακολουθία $(h_n)$ όπου $h_n(t) = \psi_n(t) - \psi_n(\infty)$ συγκλίνει στην $\psi$ ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$. Αλλά κάθε $h_n$ είναι γραμμικός συνδυασμός όρων της μορφής $t^k e^{-at^2}$, άρα $\int_{\mathbb{R}} fh_n = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Λόγω ομοιόμορφης σύγκλισης, έπεται ότι $\int_{\mathbb{R}} f\psi = 0$. Αφού αυτό ισχύει για κάθε $\psi \in C_o(\mathbb{R})$, συμπεραίνουμε ότι $f = 0$ σχεδόν παντού.

### 10.3.6 Μία μεταθετική άλγεβρα Banach που δεν είναι ημιαπλή

Το απλούστερο παράδειγμα είναι να ξεκινήσει κανείς απο ένα μηδενοδύναμο ή ψευδομηδενοδύναμο στοιχείο $x$ μιάς άλγεβρας Banach $\mathcal{B}$ με μονάδα, και να θεωρήσει την μικρότερη άλγεβρα Banach $\mathcal{A}$ που παράγει το $x$ και η μονάδα. Πρόκειται για την κλειστή θήκη της άλγεβρας των πολυωνύμων του $x$. Η $\mathcal{A}$ έχει έναν μόνο χαρακτήρα, εκείνον που μηδενίζει το $x$. Το ριζικό της είναι επομένως ο πυρήνας του χαρακτήρα αυτού, είναι δηλαδή το (μεγιστικό!) ιδεώδες που παράγει το $x$.

Για ένα συγκεκριμένο παράδειγμα, μπορεί κανείς να θεωρήσει την άλγεβρα $\mathcal{B} = M_n(\mathbb{C})$ και $x \in \mathcal{B}$ τον πίνακα που ικανοποιεί $x_{ij} = \delta_{i,j+1}$.

Ή ακόμα, μπορεί κανείς να πάρει $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\ell^2)$ και $x \in \mathcal{B}$ τον τελεστή που ικανοποιεί $xe_n = \frac{1}{n}e_{n+1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

## 10.4 Ιδεώδη και φασματική σύνθεση

Μια μεταθετική άλγεβρα Banach $\mathcal{A}$ με μονάδα, [20] *αν είναι ημιαπλή*, είναι ισομορφική, ως άλγεβρα, με μια άλγεβρα συνεχών συναρτήσεων, την άλγεβρα $\widehat{\mathcal{A}} \subseteq C(K)$ όπου $K = \mathcal{M}(\mathcal{A})$ ο συμπαγής και Hausdorff χώρος των χαρακτήρων της $\mathcal{A}$ με την ασθενή-* τοπολογία (Θεώρημα 10.15). Επιπλέον η ανισότητα

$$\|\hat{x}\|_\infty = \sup\{|\hat{x}(\omega)| : \omega \in K\} = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(x)\} = \rho(x) \leq \|x\|$$

δείχνει ότι η νόρμα $\|\cdot\|$ της $\mathcal{A}$ είναι μεγαλύτερη από τη νόρμα $\|\cdot\|_\infty$. Αυτό σημαίνει ότι η εμφύτευση

$$(\mathcal{A}, \|\cdot\|) \to (C(K), \|\cdot\|_\infty)$$

της $\mathcal{A}$ στην $C(K)$ μέσω του μετασχηματισμού Gelfand είναι συνεχής.

Παρατηρούμε ότι η εικόνα $\widehat{\mathcal{A}}$ της $\mathcal{A}$ *χωρίζει τα σημεία του* $K$: αν $\omega_1 \neq \omega_2$ υπάρχει $f = \hat{x} \in \widehat{\mathcal{A}}$ ώστε $f(\omega_1) = 0$ και $f(\omega_2) = 1$.

**Ορισμός 10.5** *Μια μεταθετική άλγεβρα Banach $\mathcal{A}$ με μονάδα λέγεται* **κανονική (regular)** *αν για κάθε κλειστό $E \subseteq K$ και κάθε $\omega \notin K$ υπάρχει $f = \hat{x} \in \widehat{\mathcal{A}}$ ώστε $f|_E = 0$ και $f(\omega) = 1$.*

Για παράδειγμα, η άλγεβρα $\mathcal{A} = C(K)$ είναι κανονική: αυτό είναι το περιεχόμενο του λήμματος Urysohn (εδώ $\widehat{\mathcal{A}} = C(K)$).

Η άλγεβρα του δίσκου δεν είναι κανονική. Πράγματι, ξέρουμε (Παράγραφος 10.3.2) ότι $\mathcal{M}(A(\mathbb{D})) = \overline{\mathbb{D}}$. Αν $E$ είναι άπειρο συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{D}$ και μια $\tilde{f}$ μηδενίζεται στο $E$, τότε μηδενίζεται παντού (από την αρχή της ταυτότητας).

Η άλγεβρα $\ell^1(\mathbb{Z})$, αλλά και η (μοναδοποίηση της) $L^1(\mathbb{R})$ είναι κανονικές άλγεβρες Banach. [21] Η απόδειξη αφήνεται ως άσκηση.

[20] περιοριζόμαστε για ευκολία στην περίπτωση άλγεβρας με μονάδα

[21] Μάλιστα αυτό αληθεύει για την άλγεβρα $L^1(G)$ για οποιαδήποτε τοπικά συμπαγή αβελιανή ομάδα $G$

Αν $\mathcal{A}$ είναι μια κανονική μεταθετική άλγεβρα Banach με μονάδα, σε κάθε κλειστό ιδεώδες $J \subseteq \mathcal{A}$ αντιστοιχεί ένα κλειστό υποσύνολο $Z(J) \subseteq K = \mathcal{M}(\mathcal{A})$, το *σύνολο μηδενισμού* του $J$:

$$Z(J) = \{\omega \in K : \hat{x}(\omega) = 0 \text{ για κάθε } x \in J\} .$$

Δυικά, σε κάθε κλειστό υποσύνολο $Z \subseteq K$ αντιστοιχεί ένα κλειστό ιδεώδες

$$I(Z) = \{x \in \mathcal{A} : \hat{x}(\omega) = 0 \text{ για κάθε } \omega \in Z\} .$$

Στην ειδική περίπτωση $\mathcal{A} = C(K)$, η αντιστοιχία αυτή είναι αμφιμονοσήμαντη: Αν $E \subseteq K$ είναι κλειστό, το μόνο κλειστό ιδεώδες $J \subseteq C(K)$ με σύνολο μηδενισμού $Z(J) = E$ είναι το $J = I(E)$. (Απόδειξη: άσκηση.)

Αυτό όμως δεν είναι αλήθεια σε όλες τις κανονικές μεταθετικές άλγεβρες Banach με μονάδα.

**Ορισμός 10.6** *Αν $\mathcal{A}$ είναι μια κανονική μεταθετική άλγεβρα Banach με μονάδα, ένα κλειστό υποσύνολο $E \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{A})$ λέγεται* **σύνολο σύνθεσης για την** *$\mathcal{A}$ αν το μόνο κλειστό ιδεώδες $J \subseteq \mathcal{A}$ με σύνολο μηδενισμού $Z(J) = E$ είναι το $J = I(E)$.*

Αν $E \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{A})$ είναι κλειστό, ορίζουμε

$$\begin{aligned} J_0(E) &= \{x \in \mathcal{A} : \text{ υπάρχει ανοικτό } V \supseteq E \text{ με } \hat{x}|_V = 0\} \\ \text{και} \quad J(E) &= \overline{J_0(E)} . \end{aligned}$$

Αποδεικνύεται ότι κάθε κλειστό ιδεώδες $J \subseteq \mathcal{A}$ με σύνολο μηδενισμού $Z(J) = E$ ικανοποιεί

$$J(E) \subseteq J \subseteq I(E) .$$

Επομένως, ένα κλειστό σύνολο $E \subseteq K$ είναι σύνολο σύνθεσης αν και μόνον αν $J(E) = I(E)$, ισοδύναμα αν κάθε συνάρτηση $x \in \mathcal{A}$ που η $\hat{x}$ μηδενίζεται στο $E$ προσεγγίζεται (ως προς τη νόρμα της $\mathcal{A}$) από ακολουθία $(x_n)$ της $\mathcal{A}$ που οι $\hat{x}_n$ μηδενίζονται σε περιοχές του $E$. Έτσι το πρόβλημα της σύνθεσης είναι ένα πρόβλημα προσέγγισης,

Για παράδειγμα, ένα κλειστό $E \subseteq \mathbb{T}$ είναι σύνολο σύνθεσης για την άλγεβρα Fourier ή Wiener $\mathcal{W}$ ανν για κάθε $f \in \mathcal{W}$ (δηλαδή της μορφής $f(t) = \sum_k \hat{f}(k)e^{ikt}$) που μηδενίζεται στο $E$, και κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $g \in \mathcal{W}$ (δηλαδή επίσης της μορφής $g(t) = \sum_k \hat{g}(k)e^{ikt}$) που μηδενίζεται *σε μια περιοχή του* $E$, τέτοια ώστε $\sum_k |\hat{f}(k) - \hat{g}(k)| < \epsilon$.

Το πρόβλημα της σύνθεσης είναι από τα δυσκολότερα της αρμονικής ανάλυσης. Μόλις το 1947 ο L. Schwartz έδωσε το πρώτο παράδειγμα συνόλου στον $\mathbb{R}^3$ που δεν είναι σύνολο σύνθεσης για την $L^1(\mathbb{R}^3)$ (το συγκεκριμένο παράδειγμα ήταν η μοναδιαία σφαίρα $S_2$ του $\mathbb{R}^3$). Το 1959 P. Malliavin έδειξε ότι για κάθε αβελιανή τοπικά συμπαγή ομάδα $G$ που δεν είναι συμπαγής, υπάρχει $E \subseteq \mathcal{M}(L^1(G))$ που δεν είναι σύνολο σύνθεσης για την $L^1(G)$.

Περισσότερα μπορεί κανείς να βρει στο [6, Κεφάλαιο 8].

# 11 $C^*$ άλγεβρες

## 11.1 Ενελίξεις

Στόχος αυτού του κεφαλαίου είναι ο αξιωματικός χαρακτηρισμός εκείνων των μεταθετικών αλγεβρών Banach για τις οποίες ο μετασχηματισμός Gelfand είναι ισομετρία και επί. Μια τέτοια άλγεβρα θα είναι κατ' ανάγκην ισομετρικά ισόμορφη, δηλαδή "ίδια" ως άλγεβρα Banach, με την $C(\mathcal{M}(\mathcal{A}), w^*)$. Ζητάμε δηλαδή να χαρακτηρίσουμε ως άλγεβρες Banach (και όχι απλώς ως χώρους Banach) τις άλγεβρες της μορφής $C(K)$, όπου K συμπαγής και Hausdorff τοπολογικός χώρος.

Παρατήρησε ότι κάθε $C(\mathrm{K})$ είναι εφοδιασμένη με μιαν ακόμη εσωτερική πράξη, την ενέλιξη $f \longrightarrow f^*$, όπου $f^*(t) := \overline{f(t)} \ \ (t \in \mathrm{K})$ . Η ύπαρξη της ενέλιξης μας επιτρέπει, μεταξύ άλλων, να απομονώσουμε τον πραγματικό υπόχωρο $C_R(\mathrm{K})$ που αποτελείται από τις $f \in C(\mathrm{K})$ ώστε $f = f^*$ (τις πραγματικές συναρτήσεις) και που έχει την ιδιότητα $C(\mathrm{K}) = C_R(\mathrm{K}) + iC_R(\mathrm{K})$ (κάθε μιγαδική συνάρτηση $f$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο $f = f_1 + if_2$, όπου οι $f_1 = (f + f^*)/2$ και $f_2 = (f - f^*)/2i$ ανήκουν στον $C_R(\mathrm{K})$. Επιτρέπει επίσης να απομονώσουμε το σύνολο $C^+(\mathrm{K})$ των *μη αρνητικών* συναρτήσεων: είναι ακριβώς εκείνες οι $f \in C(\mathrm{K})$ για τις οποίες υπάρχει $g \in C(\mathrm{K})$ με $g^*g = f$.

Υπάρχουν όμως και άλλες άλγεβρες (Banach) που εφοδιάζονται κατά φυσιολογικό τρόπο με μια ενέλιξη, και που τα στοιχεία τους δεν "μοιάζουν" καθόλου με μιγαδικές συναρτήσεις, οπως η άλγεβρα $\mathcal{B}(\mathrm{H})$ όλων των τελεστών σ' έναν χώρο Hilbert H (βλ. παράδειγμα 5 πιό κάτω).

Οι κοινές ιδιότητες τέτοιων αλγεβρών οδηγούν στους επόμενους ορισμούς:

**Ορισμός 11.1** **Ενέλιξη** *(involution) σε μια (μιγαδική) άλγεβρα $\mathcal{A}$ είναι μια απεικόνιση $x \longrightarrow x^* : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ με τις ιδιότητες*

$$\begin{aligned} (x+y)^* &= x^* + y^* \\ (\lambda x)^* &= \bar{\lambda} x^* \\ (xy)^* &= y^* x^* \\ (x^*)^* &= x \end{aligned}$$

*για κάθε $x, y \in \mathcal{A}$ και $\lambda \in \mathbb{C}$.*

**Ορισμός 11.2** *Μια* **C$^*$ άλγεβρα** *$\mathcal{A}$ είναι μια άλγεβρα Banach με ενέλιξη που έχει την ιδιότητα*

$$C^* : \quad \|x^* x\| = \|x\|^2 \ \ (x \in \mathcal{A}).$$

Παρατήρησε ότι αν μια άλγεβρα $\mathcal{A}$ με ενέλιξη έχει μονάδα 1, τότε κατ' ανάγκην $1^* = 1$ (γιατί;). Αν επί πλέον η $\mathcal{A}$ είναι $C^*$ άλγεβρα, τότε $\|1\| = 1$ (γιατί;).

**Παρατήρηση 11.1** **(i)** Σε μια $C^*$ άλγεβρα $\mathcal{A}$, η ενέλιξη είναι αυτομάτως συνεχής, μάλιστα είναι ισομετρία. Πράγματι, για κάθε $x \in \mathcal{A}$ έχουμε $\|x\|^2 \leq \|x^*x\| \leq \|x^*\|.\|x\|$, άρα $\|x\| \leq \|x^*\|$. Εφαρμόζοντας την ανισότητα αυτή στο $x^*$ προκύπτει $\|x^*\| \leq \|x^{**}\| = \|x\|$. Συνεπώς $\|x^*\| = \|x\|$.

**(ii)** Η ανισότητα $\|x\|^2 \leq \|x^*x\| \ \ (x \in \mathcal{A})$ αρκεί για να εξασφαλίσει την ισχύ της ισότητας $C^*$, όταν η νόρμα της άλγεβρας είναι υποπολλαπλασιαστική. Πράγματι, από την ανισότητα αυτή έπεται, όπως μόλις παρατηρήσαμε, ότι $\|x^*\| = \|x\|$ για κάθε $x \in \mathcal{A}$, οπότε

$$\|x\|^2 \leq \|x^*x\| \leq \|x^*\|.\|x\| = \|x\|^2$$

άρα ισχύει ισότητα.

### 11.1.1 Παραδείγματα

**1.** Η άλγεβρα Banach $\mathbb{C}$ είναι $C^*$ άλγεβρα ως προς την ενέλιξη $\lambda \longrightarrow \bar{\lambda}$.

Έχουμε δείξει (Θεώρημα Gelfand-Mazur) ότι κάθε διαιρετική $C^*$ άλγεβρα είναι ισομετρικά ισόμορφη με την $\mathbb{C}$.

**2.** Η άλγεβρα Banach $C(K)$ είναι $C^*$ άλγεβρα ως προς την ενέλιξη $f \longrightarrow f^*$, όπου $f^*(t) := \overline{f(t)} \ \ (t \in K)$. Πράγματι, οι αλγεβρικές ιδιότητες είναι προφανείς, και

$$\|f^*f\|_\infty = \sup\{|f^*(t)f(t)| : t \in K\} = \sup\{|f(t)|^2 : t \in K\} = \|f\|_\infty^2.$$

Θα δείξουμε (Θεώρημα Gelfand-Naimark) ότι κάθε μεταθετική $C^*$ άλγεβρα με μονάδα είναι ισομετρικά *-ισόμορφη (δηλαδή ο ισομορφισμός διατηρεί και την ενέλιξη) με κάποιον $C(\mathrm{K})$.

**3.** Η απεικόνιση $f \longrightarrow f^*$ που ορίσαμε στο (2) δεν είναι εσωτερική πράξη στην $\mathrm{A}(\mathbb{D})$ (αν $f \in \mathrm{A}(\mathbb{D})$, η $f^*$ δεν είναι ολόμορφη, εκτός αν είναι σταθερή). Δηλαδή η $\mathrm{A}(\mathbb{D})$ είναι Banach υπάλγεβρα της $C(\overline{\mathbb{D}})$, όχι όμως $C^*$- υπάλγεβρα. Η απεικόνιση $f \longrightarrow f^\#$ όπου $f^\#(z) = f^*(\bar{z}) \ \ (z \in \overline{\mathbb{D}})$ είναι ενέλιξη στην $\mathrm{A}(\mathbb{D})$, και μάλιστα ισομετρική (γιατί;). Δεν ικανοποιεί ομως την ιδιότητα $C^*$. Παραδείγματος χάριν, αν $f(z) = \exp(iz)$, έχουμε $f^\#(z) = \exp(-iz)$, άρα $\|ff^\#\| = \|1\| = 1$, αλλά $\|f\| \geq |f(-i)| = e$, άρα $\|ff^\#\| \neq \|f\|^2$.

**4.** Αν X είναι τοπικά συμπαγής χώρος Hausdorff, η άλγεβρα Banach $C_o(X)$ είναι $C^*$ -άλγεβρα ως προς την ενέλιξη $f \longrightarrow \bar{f}$.

Το ίδιο ισχύει και για τις άλγεβρες Banach $\ell^\infty(\Gamma)$ και $L^\infty(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$.

**5.** Έστω H *μιγαδικός* χώρος Hilbert. Ξέρουμε ήδη ότι ο χώρος $\mathcal{B}(\mathrm{H})$ όλων των γραμμικών και φραγμένων τελεστών $\mathrm{T} : \mathrm{H} \longrightarrow \mathrm{H}$ αποτελεί άλγεβρα Banach με πολλαπλασιασμό την σύνθεση απεικονίσεων, μονάδα τον ταυτοτικό τελεστή I και νόρμα

$$\|\mathrm{T}\| := \sup\{\|Tx\| : x \in H, \|x\| \leq 1\}.$$

Εκμεταλλευόμενοι την δομή του χώρου Hilbert, μπορούμε να ορίσουμε μια ενέλιξη στον $\mathcal{B}(\mathrm{H})$ ως εξής:

Για κάθε $\mathrm{T} \in \mathcal{B}(\mathrm{H})$ υπάρχει μοναδικός $\mathrm{T}^* \in \mathcal{B}(\mathrm{H})$ (ο **συζυγής του** T) ώστε

$$\langle T^*x, y\rangle = \langle x, Ty\rangle \quad (x, y \in H).$$

Πράγματι, για κάθε $x \in \mathrm{H}$ η απεικόνιση

$$f_x : y \longrightarrow \overline{\langle x, Ty\rangle} : H \longrightarrow \mathbb{C}$$

είναι προφανώς γραμμική, και είναι φραγμένη γιατί

$$|f_x(y)| = |\overline{\langle x, Ty\rangle}| \leq \|x\|.\|Ty\| \leq \|x\|.\|T\|.\|y\|.$$

Απο το θεώρημα αναπαράστασης του Riesz, υπάρχει μοναδικό $z_x \in \mathrm{H}$ ώστε

$$\langle y, z_x\rangle = f_x(y) = \overline{\langle x, Ty\rangle}$$

δηλαδή $\langle z_x, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$ για κάθε $y \in \mathrm{H}$. Ελέγχεται εύκολα ότι η απεικόνιση $\mathrm{T}^* : \mathrm{H} \longrightarrow \mathrm{H} : x \longrightarrow z_x$ είναι γραμμική, και η ανισότητα $\|z_x\| = \|f_x\| \leq \|\mathrm{T}\|.\|x\|$ δείχνει ότι είναι φραγμένη, δηλαδή $\mathrm{T}^* \in \mathcal{B}(\mathrm{H})$. Η μοναδικότητα του $\mathrm{T}^*$ είναι εύκολη άσκηση.

[ Σημειώνουμε ότι η έννοια του συζυγούς τελεστή συνδέεται, αλλά δεν ταυτίζεται με την έννοια του δυικού τελεστή που ορίζεται σε κάθε χώρο Banach. Αν $\mathrm{T} \in \mathcal{B}(\mathrm{E})$, όπου E χώρος Banach, ο δυικός τελεστής ανήκει στον $\mathcal{B}(\mathrm{E}^*)$ και όχι στον $\mathcal{B}(\mathrm{E})$. ]

Είναι εύκολο να ελεγχθεί ότι η απεικόνιση $\mathrm{T} \longrightarrow \mathrm{T}^*$ είναι ενέλιξη στον $\mathcal{B}(\mathrm{H})$. Ελέγχουμε ότι ικανοποιεί την ιδιότητα $C^*$: Για κάθε $x \in \mathrm{H}$,

$$\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx\rangle = \langle T^*Tx, x\rangle \leq \|T^*Tx\|.\|x\| \leq \|T^*T\|.\|x\|^2,$$

επομένως $\|T\|^2 \leq \|T^*T\|$ για κάθε $\mathrm{T} \in \mathcal{B}(\mathrm{H})$. Οπως έχουμε ήδη παρατηρήσει, η ανισότητα αυτή συνεπάγεται την ισότητα $\|T\|^2 = \|T^*T\|$ για κάθε $\mathrm{T} \in \mathcal{B}(\mathrm{H})$.

**Συμπέρασμα:** Η άλγεβρα $\mathcal{B}(\mathrm{H})$ είναι (εν γένει μη μεταθετική) $C^*$ άλγεβρα με μονάδα.

Κάθε $\|.\|$-κλειστή *-υπάλγεβρα $\mathcal{A}$ του $\mathcal{B}(\mathrm{H})$ (δηλαδή τέτοια ώστε $\mathrm{T} \in \mathcal{A} \implies \mathrm{T}^* \in \mathcal{A}$) είναι, φυσικά, $C^*$ άλγεβρα. Το αξιοσημείωτο (που δεν θα αποδείξουμε εδώ) είναι ότι ισχύει το αντίστροφο:

**Θεώρημα 11.2 (Gelfand - Naimark)** *Κάθε $C^*$ άλγεβρα (μεταθετική ή όχι) είναι ισομετρικά *-ισόμορφη με μια $\|\cdot\|$-κλειστή *-υπάλγεβρα κάποιου $\mathcal{B}(\mathrm{H})$.*

### 11.1.2 Η Μοναδοποίηση

Θα δείξουμε ότι κάθε $C^*$ άλγεβρα χωρίς μονάδα εμφυτεύεται ισομετρικά ως μεγιστικό ιδεώδες σε μια $C^*$ άλγεβρα με μονάδα.

Έστω $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$ μια $C^*$ -άλγεβρα χωρίς μονάδα (δεν υποθέτω ότι η $\mathcal{A}$ είναι μεταθετική). Είναι εύκολο να ελέγξει κανείς ότι η μοναδοποιημένη άλγεβρα $\mathcal{A}_1 := \mathcal{A} \oplus \mathbb{C}$ εφοδιάζεται με την ενέλιξη $(x, \lambda)^* = x^* + \bar{\lambda} \quad ((x, \lambda) \in \mathcal{A}_1)$.

Ξέρουμε ότι η $\mathcal{A}_1$ γίνεται άλγεβρα Banach αν εφοδιασθεί με την νόρμα $\|\cdot\|_1$ όπου $\|(x, \lambda)\|_1 = \|x\| + |\lambda| \quad (x \in \mathcal{A}, \lambda \in \mathbb{C})$. Η $\|\cdot\|_1$ δεν ικανοποιεί[22] την ιδιότητα $C^*$. Υπάρχει όμως μία (ισοδύναμη) νόρμα στην $\mathcal{A}_1$ ως προς την οποία γίνεται $C^*$ άλγεβρα. Η νόρμα αυτή είναι η $\|\cdot\|_\pi$ όπου $\pi$ είναι η κανονική αριστερή παράσταση της $\mathcal{A}$ στον χώρο Banach $\mathcal{A}$, δηλαδή $\pi(x)y = xy$ (βλ. Πρόταση 3.3). Επειδή η $\mathcal{A}$ είναι $C^*$ άλγεβρα, η $\pi$ είναι ισομετρική: πράγματι, για κάθε $x \in \mathcal{A}$,

$$\|x\|^2 = \|xx^*\| = \|\pi(x)(x^*)\| \le \|\pi(x)\|.\|x^*\| = \|\pi(x)\|.\|x\| \le \|x\|.\|x\|$$

άρα $\|\pi(x)\| = \|x\|$. Επομένως, όπως παρατηρήσαμε στην παράγραφο 3.2, αν ορίσουμε τη νόρμα

$$\|(x, \lambda)\|_\pi := \|\pi(x) + \lambda \mathrm{I}\| = \sup\{\|xy + \lambda y\| : y \in \mathcal{A}, \|y\| \le 1\}$$

η $(\mathcal{A}, \|\cdot\|_\pi)$ γίνεται άλγεβρα Banach με μονάδα.

**Ισχυρισμός** Με τον ορισμό $(x, \lambda)^* = x^* + \bar{\lambda}$, η $(\mathcal{A}_1, \|\cdot\|_\pi)$ είναι $C^*$-άλγεβρα.

**Απόδειξη** Το μόνο που μένει να ελεγχθεί είναι η ιδιότητα $C^*$:

Έστω $a = (x, \lambda) \in \mathcal{A}_1$. Για κάθε $y \in \mathcal{A}$ με $\|y\| \le 1$ θεωρούμε το στοιχείο

$$\begin{aligned}(y, 0)^*(x, \lambda)^*(x, \lambda)(y, 0) &= ((x, \lambda)(y, 0))^*((x, \lambda)(y, 0)) \\ &= ((xy + \lambda y)^*(xy + \lambda y), 0) = (z^* z, 0) \in \mathcal{A}_1\end{aligned}$$

[22] Αν παραδείγματος χάριν $x = x^* \in \mathcal{A}$ τότε $\|(x, i)^*(x, i)\|_1 = \|x\|^2 + 1$ ενώ $\|(x, i)\|_1^2 = (\|x\| + 1)^2$.

όπου το $z = xy + \lambda y$ ανήκει στην $\mathcal{A}$ (που ικανοποιεί την ιδιότητα $C^*$), άρα $\|z\|^2 = \|z^*z\|$. Αλλά $\|z^*z\| = \|\pi(z^*z)\| = \|(z^*z, 0)\|_\pi$. Έχω λοιπόν

$$\begin{aligned} \|xy + \lambda y\|^2 &= \|z\|^2 = \|z^*z\| = \|(z^*z, 0)\|_\pi = \|(y, 0)^*(x, \lambda)^*(x, \lambda)(y, 0)\|_\pi \\ &\leq \|(y, 0)\|_\pi \|a^*a\|_\pi \|(y, 0)\|_\pi \leq \|a^*a\|_\pi . \end{aligned}$$

Επομένως

$$\|a\|_\pi^2 = \sup\{\|xy + \lambda y\|^2 : y \in \mathcal{A}, \|y\| \leq 1\} \leq \|a^*a\|_\pi$$

και επομένως ισχύει ισότητα (Παρατήρηση 11.1). $\square$

## 11.2 Το Θεώρημα Gelfand-Naimark

**Θεώρημα 11.3** *Αν $\mathcal{A}$ είναι μεταθετική $C^*$-άλγεβρα με μονάδα, τότε ο μετασχηματισμός Gelfand $\mathcal{G} : \mathcal{A} \longrightarrow C(\mathcal{M}(\mathcal{A}), w^*)$ είναι ισομετρία επί και διατηρεί την ενέλιξη, δηλαδή $(\mathcal{G}x)^* = \mathcal{G}(x^*)$ για κάθε $x \in \mathcal{A}$.*

Χωρίζουμε την απόδειξη σε μερικά λήμματα:

**Λήμμα 11.4** **(i)** *Αν $x \in \mathcal{A}$ και $x = x^*$, τότε $\phi(x) \in \mathbb{R}$ για κάθε $\phi \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$.*

**(ii)** *Για κάθε $y \in \mathcal{A}$ και $\phi \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$, ισχύει $\phi(y^*) = \overline{\phi(y)}$.*

**Απόδειξη (i)** Θυμίζω ότι $\|\phi\| = \phi(1) = 1$. Έστω $n \in \mathbb{Z}$ και $y = x + in1$. Θέτω $\phi(x) = \alpha + i\beta$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Τότε $\phi(y) = \phi(x) + in\phi(\mathbf{1}) = \alpha + i(\beta + n)$, οπότε

$$\begin{aligned} \alpha^2 + (\beta + n)^2 &= |\phi(y)|^2 \leq \|y\|^2 = \|y^*y\| = \|(x - in1)(x + in1)\| \\ &= \|x^2 + n^2 1\| \leq \|x\|^2 + n^2 \end{aligned}$$

άρα $\alpha^2 + \beta^2 + 2\beta n \leq \|x\|^2$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, πράγμα που δεν μπορεί να συμβεί παρά μόνον αν $\beta = 0$, δηλαδή $\phi(x) \in \mathbb{R}$.

**(ii)** Κάθε $y \in \mathcal{A}$ γράφεται μοναδικά $y = y_1 + iy_2$ με $y_i^* = y_i$ (όπου $y_1 = (y + y^*)/2$, $y_2 = (y - y^*)/2i$). Από το (i) έχουμε $\phi(y_i) \in \mathbb{R}$. Συνεπώς

$$\phi(y^*) = \phi(y_1 - iy_2) = \phi(y_1) - i\phi(y_2) = \overline{\phi(y_1) + i\phi(y_2)} = \overline{\phi(y)}. \quad \square$$

**Παρατήρηση** Στην απόδειξη του Λήμματος, οι μόνες ιδιότητες του $\phi$ που χρησιμοποιήθηκαν είναι ότι $\phi(1) = 1$ και ότι $\|\phi\| = 1$. Επομένως το συμπέρασμα του Λήμματος ισχύει για κάθε γραμμική απεικόνιση $\phi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{C}$ που έχει αυτές τις δύο ιδιότητες. Μάλιστα, είναι φανερό ότι αρκεί η ιδιότητα $\|\phi\| = \phi(1)$. Παρατήρησε επίσης ότι η μεταθετικότητα της $C^*$ άλγεβρας $\mathcal{A}$ δεν χρησιμοποιήθηκε.

**Λήμμα 11.5** *Για κάθε $x \in \mathcal{A}$ ισχύει $\|x\| = \rho(x)$.*

**Απόδειξη** Από την ιδιότητα $C^*$ έχουμε

$$\|x\|^4 = \|x^*x\|^2 = \|(x^*x)^*(x^*x)\| = \|(x^*x)^2\|.$$

Αλλά η $\mathcal{A}$ είναι μεταθετική, άρα $(x^*x)^2 = x^*xx^*x = x^*x^*xx = (x^2)^*x^2$, επομένως

$$\|x\|^4 = \|(x^2)^*x^2\| = \|x^2\|^2.$$

Με επαγωγή βρίσκουμε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $\|x\|^{2^n} = \|x^{2^n}\|$. Άρα

$$\rho(x) = \lim_m \|x^m\|^{1/m} = \lim_n \|x^{2^n}\|^{1/2^n} = \|x\|. \qquad \square$$

**Απόδειξη του Θεωρήματος 11.3** Από το Λήμμα 11.4 προκύπτει ότι ο μετασχηματισμός Gelfand διατηρεί την ενέλιξη: Πράγματι, αν $x \in \mathcal{A}$ έχουμε

$$\mathcal{G}(x^*)(\varphi) = \varphi(x^*) = \overline{\varphi(x)} = \overline{\mathcal{G}(x)(\varphi)} = (\mathcal{G}x)^*(\varphi)$$

για κάθε $\varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$, άρα $\mathcal{G}(x^*) = (\mathcal{G}x)^*$.

Από το Λήμμα 11.5 έχουμε ότι

$$\|\hat{x}\|_\infty = \rho(x) = \|x\|$$

για κάθε $x \in \mathcal{A}$. Επομένως ο μετασχηματισμός Gelfand είναι ισομετρία της $\mathcal{A}$ επί της εικόνας του $\widehat{\mathcal{A}}$, η οποία, συνεπώς, είναι $\|\cdot\|_\infty$-κλειστή υπάλγεβρα της $C(\mathcal{M}(\mathcal{A}), w^*)$. Η $\mathcal{A}$ περιέχει τις σταθερές συναρτήσεις. Επίσης, χωρίζει τα σημεία του $\mathcal{M}(\mathcal{A})$: πράγματι αν $\varphi, \psi \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ και $\hat{x}(\varphi) = \hat{x}(\psi)$, δηλαδή $\varphi(x) = \psi(x)$, για κάθε $x \in \mathcal{A}$, τότε $\varphi = \psi$. Τέλος, αν $f = \hat{x} \in \widehat{\mathcal{A}}$, τότε η $f^* = \mathcal{G}(x^*)$ ανήκει επίσης στην $\widehat{\mathcal{A}}$.

Δηλαδή η $\widehat{\mathcal{A}}$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος Stone - Weierstrass (*μιγαδική* μορφή) και επομένως ισούται με την $C(\mathcal{M}(\mathcal{A}), w^*)$. $\square$

**Παρατήρηση 11.6** *Από το θεώρημα μπορούμε να συμπεράνουμε ότι οι άλγεβρες Banach $A(\mathbb{D})$ και $\ell^1(\mathbb{Z})$ δεν είναι C*-άλγεβρες. Για την ακρίβεια, δεν υπάρχουν ενελίξεις στις άλγεβρες αυτές με τις οποίες να γίνονται C*-άλγεβρες. Γιατί αν πχ. η $A(\mathbb{D})$ ήταν C*-άλγεβρα, τότε ο μετασχηματισμός Gelfand θα ήταν ισομορφισμός επί της άλγεβρας $C(K)$, όπου $K$ ο χώρος των χαρακτήρων της $A(\mathbb{D})$. Όμως έχουμε δείξει (Παράγραφος 10.3) ότι ο μετασχηματισμός Gelfand για την $A(\mathbb{D})$ δεν είναι επί. Το ίδιο και για την άλγεβρα $\ell^1(\mathbb{Z})$.*

**Πρόταση 11.7** *Αν $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ είναι μεταθετικές C*-άλγεβρες με μονάδα, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα*

1. *Οι C*-άλγεβρες $\mathcal{A}_1$ και $\mathcal{A}_2$ είναι ισομετρικά *-ισόμορφες.*
2. *Οι άλγεβρες $\mathcal{A}_1$ και $\mathcal{A}_2$ είναι αλγεβρικά ισόμορφες.*
3. *Οι τοπολογικοί χώροι $\mathcal{M}(\mathcal{A}_1)$ και $\mathcal{M}(\mathcal{A}_2)$ είναι ομοιομορφικοί.*

**Απόδειξη** *(1) ⇒ (2)* Προφανές.

*(2) ⇒ (3)* Έστω $T : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ αλγεβρικός ισομορφισμός.
Για κάθε $\psi \in \mathcal{M}(\mathcal{A}_2)$, θεωρούμε την απεικόνιση

$$\psi \circ T : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2 \to \mathbb{C}.$$

Είναι σύνθεση μορφισμών, άρα μορφισμός, και δεν μηδενίζεται, γιατί $\psi(T(\mathbf{1})) = \psi(\mathbf{1}) = 1$. Δηλαδή $\psi \circ T \in \mathcal{M}(\mathcal{A}_2)$. Ορίζεται λοιπόν μια απεικόνιση

$$\omega : \mathcal{M}(\mathcal{A}_2) \to \mathcal{M}(\mathcal{A}_1) : \psi \to \psi \circ T\,.$$

Η $\omega$ είναι 1-1, γιατί αν $\psi \circ T = \psi_1 \circ T$ τότε $\psi = \psi_1$ αφού η $T$ είναι 1-1.
Η $\omega$ είναι επί, γιατί για κάθε $\phi \in \mathcal{M}(\mathcal{A}_1)$, αν $\psi = \phi \circ T^{-1}$, ο $\psi$ είναι χαρακτήρας της $\mathcal{A}_2$ και $\omega(\psi) = \phi$ .

Τέλος η $\omega$ είναι συνεχής ως προς τις ασθενείς-* τοπολογίες, γιατί αν $\psi_i, \psi \in \mathcal{M}(\mathcal{A}_2)$ και $\psi_i \overset{w*}{\to} \psi$, δηλαδή $\psi_i(b) \to \psi(b)$ για κάθε $b \in \mathcal{A}_2$, τότε για κάθε $a \in \mathcal{A}_1$ έχουμε

$$\omega(\psi_i)(a) = \psi_i(T(a)) \to \psi(T(a)) = \omega(\psi)(a)\,,$$

δηλαδή $\omega(\psi_i) \overset{w*}{\to} \omega(\psi)$. Με τον ίδο τρόπο φαίνεται ότι και η $\omega^{-1}$ είναι συνεχής.

*(3) ⇒ (1)* Υποθέτουμε ότι υπάρχει ομοιομορφισμός

$$\gamma : K_2 := \mathcal{M}(\mathcal{A}_2) \to \mathcal{M}(\mathcal{A}_1) := K_1\,.$$

Τότε για κάθε $f \in C(K_1)$ η συνάρτηση $f \circ \gamma : K_2 \to \mathbb{C}$ είναι συνεχής (σύνθεση συνεχών συναρτήσεων). Έτσι ορίζεται μια απεικόνιση

$$T_1 : C(K_1) \to C(K_2) : f \to f \circ \gamma\,.$$

Ελέγχεται εύκολα ότι η απεικόνιση αυτή είναι 1-1 και επί, με αντίστροφη την $g \to g \circ \gamma^{-1}$.

Είναι επίσης άμεσο ότι η $T_1$ διατηρεί το άθροισμα το γινόμενο και την ενέλιξη: $(f_1+f_2)\circ\gamma = f_1\circ\gamma + f_2\circ\gamma, \quad (f_1\cdot f_2)\circ\gamma = (f_1\circ\gamma)\cdot(f_2\circ\gamma), \quad \overline{f\circ\gamma} = \overline{f}\circ\gamma$.

Τέλος, η $T_1$ διατηρεί και τη νόρμα:

$$\|T_1(f)\| = \sup\{f(\gamma(t)) : t\in K_2\} = \sup\{f(s) : s\in K_1\} = \|f\|$$

όπου χρησιμοποιήσαμε ότι η $\gamma$ απεικονίζει τον $K_2$ επί του $K_1$.

Δηλαδή, η $T_1$ είναι ένας ισομετρικός *-ισομορφισμός από την $C(K_1)$ επί της $C(K_2)$.

Όμως, από το θεώρημα Gelfand-Naimark ξέρουμε ότι, για $i=1,2$, ο μετασχηματισμός Gelfand $\mathcal{G}_i$ απεικονίζει την μεταθετική C*-άλγεβρα $\mathcal{A}_i$ ισομετρικά και *-ισομορφικά επί της $C(K_i)$. Επομένως η σύνθεση

$$T : \mathcal{A}_1 \overset{\mathcal{G}_1}{\to} C(K_1) \overset{T_1}{\to} C(K_2) \overset{\mathcal{G}_2^{-1}}{\to} \mathcal{A}_2$$

είναι ένας ισομετρικός *-ισομορφισμός από την $\mathcal{A}_1$ επί της $\mathcal{A}_2$.

## 11.3 Μεταθετικές $C^*$-άλγεβρες χωρίς μονάδα

Αν $\mathcal{A}$ είναι μεταθετική $C^*$-άλγεβρα χωρίς μονάδα, η μοναδοποίηση της, $\mathcal{A}_1$, με την νόρμα που ορίσθηκε στην 11.1.2, είναι μεταθετική $C^*$ -άλγεβρα με μονάδα, επομένως ο μετασχηματισμός Gelfand $a \longrightarrow \hat{a}$ είναι ισομετρικός *-ισομορφισμός της $\mathcal{A}_1$ επί της $C(\mathrm{K}_1)$, όπου $\mathrm{K}_1$ το σύνολο $\mathcal{M}(\mathcal{A}_1)$ των χαρακτήρων της $\mathcal{A}_1$ με την ασθενή-* τοπολογία.

Παρατήρησε ότι η $\mathcal{A}$ είναι μεγιστικό ιδεώδες της $\mathcal{A}_1$, επομένως (Θεώρημα 10.7) υπάρχει μοναδικό $\phi_\infty \in \mathrm{K}_1$ ώστε $\ker\phi_\infty = \mathcal{A}$. Κάθε άλλος χαρακτήρας της $\mathcal{A}_1$, περιοριζόμενος στην $\mathcal{A}$, ορίζει έναν χαρακτήρα της $\mathcal{A}$. Αντίστροφα κάθε χαρακτήρας $\phi$ της $\mathcal{A}$ επεκτείνεται μοναδικά σε έναν χαρακτήρα $\tilde{\phi}$ της $\mathcal{A}_1$ θέτοντας $\tilde{\phi}(x,\lambda) := \phi(x)+\lambda$. Δηλαδή αν ονομάσουμε $K_o \subseteq K_1$ το σύνολο των χαρακτήρων της $\mathcal{A}_1$ που δεν μηδενίζουν την $\mathcal{A}$, έχουμε $K_1 = K_o \cup \{\phi_\infty\}$ και $K_o = \{\tilde{\phi} : \phi \in \mathcal{M}(\mathcal{A})\}$.

**Ισχυρισμός** *Αν $K$ είναι ο τοπολογικός χώρος $(\mathcal{M}(\mathcal{A}), w^*)$, τότε ο $K$ είναι ομοιομορφικός με τον $K_o$.*

Πράγματι, αν $\phi_i, \phi \in K$ τότε $\phi_i(x) \longrightarrow \phi(x)$ για κάθε $x\in\mathcal{A}$ αν και μόνον αν $\tilde{\phi}_i(x,\lambda) \longrightarrow \tilde{\phi}(x,\lambda)$ για κάθε $(x,\lambda)\in\mathcal{A}_1$. Άρα η απεικόνιση $\phi \to \tilde{\phi} : K \to K_o$ είναι ομοιομορφισμός.

Παρατήρησε ότι για κάθε $x \in \mathcal{A}$ και $\phi \in K$ ισχύει $\tilde{\phi}(x,0) = \phi(x)$. Επομένως, αν ταυτίσουμε τους χώρους $K$ και $K_o$ (μέσω της απεικόνισης $\phi \to \tilde{\phi}$), ο μετασχηματισμός Gelfand $x \to \hat{x}$ του $x$ (ως προς την $\mathcal{A}$) δεν είναι παρά ο περιορισμός του μετασχηματισμού Gelfand $(x,0) \to \widehat{(x,0)}$ (ως προς την $\mathcal{A}_1$) στον $K_o$, δηλαδή

$$\widehat{(x,0)}(\tilde{\phi}) = \hat{x}(\phi) \quad \phi \in K.$$

Είναι φανερό ότι οι συναρτήσεις $\widehat{(x,0)}$ με $x \in \mathcal{A}$ είναι ακριβώς εκείνες οι συναρτήσεις $f \in C(\mathrm{K}_1)$ με την ιδιότητα $f(\phi_\infty) = 0$. Πράγματι κάθε $f \in C(\mathrm{K}_1)$ είναι της μορφής $f = \hat{a}$ για ένα (μοναδικό) $a \in \mathcal{A}_1$, και ισχύει $\hat{a}(\phi_\infty) = 0$ αν και μόνον αν $\phi_\infty(a) = 0$, δηλαδή αν και μόνον $a \in \mathcal{A}$.

Επομένως η $\mathcal{A}$ είναι ισομετρική και *-ισομορφική με την $C^*$-άλγεβρα
$\{f \in C(\mathrm{K}_1) : f(\phi_\infty) = 0\}$.

Αλλά η απεικόνιση $f \to f|_{K_o}$ είναι ισομετρικός ισομορφισμός της
$\{f \in C(K_1) : f(\phi_\infty) = 0\}$ επί της $C_o(K_o)$.

Πράγματι: αν μία $f \in C(K_1)$ μηδενίζεται στο σημείο $\phi_\infty$ τότε (αφού είναι συνεχής στο $\phi_\infty$) για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ανοικτή περιοχή $U \subseteq K_1$ του $\phi_\infty$ ώστε $|f(\psi)| < \varepsilon$ για κάθε $\psi \in U$. Θέτοντας $\Omega = U^c$, που είναι συμπαγές υποσύνολο του $K_o$, βλέπουμε ότι $f|_{K_o} \in C_o(K_o)$ (και φυσικά $\|f\|_\infty = \|f|_{K_o}\|_\infty$).

Αντίστροφα, κάθε $g \in C_o(K_o)$ επεκτείνεται στο $K_1$ θέτοντας $g(\varphi_\infty) = 0$, και η επέκταση είναι συνεχής στο $\varphi_\infty$, γιατί για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $K_\varepsilon \subseteq K_o$ συμπαγές ώστε $|g(\psi)| < \varepsilon$ για κάθε $\psi \notin K_\varepsilon$ (αφού $g \in C_o(K_o)$), δηλαδή υπάρχει ανοικτή περιοχή $U = (K_\varepsilon)^c$ του $\varphi_\infty$ όπου $|g(\psi)| < \varepsilon$.

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε το

**Θεώρημα 11.8** *Αν $\mathcal{A}$ μεταθετική $C^*$-άλγεβρα, ο μετασχηματισμός Gelfand είναι ισομετρικός *-ισομορφισμός της $\mathcal{A}$ επί της $C_o(\mathcal{M}(\mathcal{A}), w^*)$. Η $\mathcal{A}$ έχει μονάδα αν και μόνον αν ο $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ είναι $w^*$-συμπαγής.*

**Απόδειξη** Αν η $\mathcal{A}$ δεν έχει μονάδα, τότε, οπως δείξαμε παραπάνω, είναι ισομετρικά *-ισόμορφη με την $C_o(\mathcal{M}(\mathcal{A}), w^*)$. Επεται ότι ο $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ δεν είναι $w^*$-συμπαγής γιατί αν ήταν, η σταθερή συνάρτηση 1 θα ανήκε στην $C_o(\mathcal{M}(\mathcal{A}), w^*)$, άρα η $\mathcal{A}$ θα είχε μονάδα. Αν πάλι η $\mathcal{A}$ έχει μονάδα, τότε ο $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ είναι συμπαγής, άρα $C_o(\mathcal{M}(\mathcal{A})) = C(\mathcal{M}(\mathcal{A}))$ και το αποτέλεσμα έπεται από το 11.3. $\square$

## 11.4 Ο συναρτησιακός λογισμός για συνεχείς συναρτήσεις

Εγκαταλείπουμε τώρα τις μεταθετικές $C^*$ άλγεβρες, και ενδιαφερόμαστε να εφαρμόσουμε τα προηγούμενα αποτελέσματα σε τυχαίες $C^*$ άλγεβρες.

Έστω $\mathcal{A}$ μια $C^*$ άλγεβρα με μονάδα και $x \in \mathcal{A}$. Αν $p$ είναι πολυώνυμο, η απεικόνιση $p \longrightarrow p(x)$ είναι μορφισμός από την άλγεβρα των πολυωνύμων στην $\mathcal{A}$. Με άλλα λόγια (δοθέντος του $x \in \mathcal{A}$) είναι ένας "κανόνας υπολογισμού" (calculus) του στοιχείου $p(x) \in \mathcal{A}$ συναρτήσει του $p$. Η Θεωρία Gelfand επιτρέπει, οπως θα δούμε, να επεκτείνουμε αυτόν τον κανόνα υπολογισμού από τα πολυώνυμα σε κάποιες συνεχείς συναρτήσεις που προσεγγίζονται από πολυώνυμα[23]. Οι συναρτήσεις αυτές θα έχουν πεδίο ορισμού το φάσμα του στοιχείου $x$. Για να εφαρμόσουμε εδώ την μεταθετική θεωρία, είναι αναγκαίο να δείξουμε ότι, σε $C^*$ άλγεβρες, το φάσμα δεν εξαρτάται από την άλγεβρα:

**Λήμμα 11.9** *Αν $\mathcal{A}$ είναι $C^*$ άλγεβρα με μονάδα $1$ και $\mathcal{B}$ είναι $C^*$-υπάλγεβρα της $\mathcal{A}$ με $1 \in \mathcal{B}$, τότε για κάθε $x \in \mathcal{B}$ ισχύει $\sigma_{\mathcal{A}}(x) = \sigma_{\mathcal{B}}(x)$.*

**Απόδειξη** Αρκεί (γιατί;) να δείξουμε ότι αν το $x \in \mathcal{B}$ έχει αντίστροφο $x^{-1}$ *στην* $\mathcal{A}$, τότε το $x^{-1}$ είναι στοιχείο της $\mathcal{B}$.

Υποθέτουμε πρώτα ότι $x = x^*$, και ονομάζουμε $C = C^*(x)$ την μικρότερη $C^*$ υπάλγεβρα της $\mathcal{A}$ που περιέχει το $x$ και την $1$ (είναι η κλειστή θήκη του συνόλου των πολυωνύμων του $x$). Είναι φανερό ότι $C \subseteq \mathcal{B}$, και ότι η $C$ είναι μεταθετική $C^*$ άλγεβρα. Θα δείξω ότι το $x$ είναι αντιστρέψιμο στοιχείο της $C$. Από το Λήμμα 11.4 γνωρίζουμε ότι $\varphi(x) \in \mathbb{R}$ για κάθε $\varphi \in \mathcal{M}(C)$, άρα $\sigma_C(x) = \{\varphi(x) : \varphi \in \mathcal{M}(C)\} \subseteq \mathbb{R}$. Συνεπώς, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, το στοιχείο $x_n := x - \frac{i}{n}1$ είναι αντιστρέψιμο στην $C$, άρα και στην $\mathcal{A}$. Επειδή $\lim_n x_n = x$ και η πράξη $y \to y^{-1}$ είναι συνεχής στο σύνολο $\text{Inv}(\mathcal{A})$, η ακολουθία $((x_n)^{-1})_n$ είναι βασική και αποτελείται από στοιχεία της $C$. Επομένως και το όριό της, $x^{-1}$, θα ανήκει στην $C$ και άρα στην $\mathcal{B}$.

Για την γενική περίπτωση θέτω $y = x^*x$ και παρατηρώ ότι, αφού το $x$ είναι αντιστρέψιμο στην $\mathcal{A}$, το ίδιο ισχύει για το $y$ (γιατί $x^{-1}(x^{-1})^*.y = y.x^{-1}(x^{-1})^* = 1$). Από την προηγούμενη παράγραφο, το $y^{-1}$ ανήκει στην $\mathcal{B}$. Επειδή $1 = y^{-1}(x^*x) = (y^{-1}x^*)x$, η μοναδικότητα του αντιστρόφου δείχνει τώρα ότι $x^{-1} = y^{-1}x^*$, που ανήκει στην $\mathcal{B}$. $\square$

**Πόρισμα 11.10** *Έστω $\mathcal{A}$ μια $C^*$-άλγεβρα.*

[23]Η επέκταση αυτή δεν προϋποθέτει τον συναρτησιακό λογισμό για ολόμορφες συναρτήσεις. Θα συγκρίνουμε τους δύο λογισμούς στο τέλος της παραγράφου.

*(i) Αν $x \in \mathcal{A}$ είναι φυσιολογικό (normal) (δηλ. αν $x^*x = xx^*$) τότε $\|x\| = \rho(x)$.*

*(ii) Αν $x \in \mathcal{A}$ είναι αυτοσυζυγές (δηλαδή αν $x = x^*$), τότε $\sigma(x) \subseteq \mathbb{R}$.*

**Απόδειξη** Περνώντας εν ανάγκη στην μοναδοποίηση, μπορώ να υποθέσω ότι η $\mathcal{A}$ έχει μονάδα. Αν $x \in \mathcal{A}$ είναι φυσιολογικό, η $C^*$-υπάλγεβρα $C = C^*(x)$ που παράγεται από το $x$ είναι μεταθετική, άρα $\|x\| = \rho(x)$ από το Λήμμα 11.5.

Το (ii) είναι άμεσο από το προηγούμενο Λήμμα και την απόδειξή του. $\square$

**Παρατήρηση** Η σχέση $\|x\| = \rho(x)$ δεν ισχύει βέβαια εν γένει για τυχαία στοιχεία μιάς (μη μεταθετικής) $C^*$ άλγεβρας (π.χ. μπορεί $x^2 = 0$). Παρόλα αυτά, από το Λήμμα έπεται ότι σε μια $C^*$ άλγεβρα $\mathcal{A}$ η νόρμα καθορίζεται μοναδικά από την αλγεβρική δομή της $\mathcal{A}$. Πράγματι, για κάθε $x \in \mathcal{A}$ έχουμε $\|x\|^2 = \|x^*x\| = \rho(x^*x)$:

$$\|x\|^2 = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(x^*x)\}\,.$$

Δηλαδή η $\|x\|^2$ ισούται με το supremum των απολύτων τιμών των στοιχείων του φάσματος $\sigma(x^*x)$, που είναι ένα καθαρά αλγεβρικό αντικείμενο. Από την παρατήρηση αυτή συμπεραίνουμε ότι οι απεικονίσεις μεταξύ $C^*$ αλγεβρών που διατηρούν την αλγεβρική δομή είναι αυτομάτως συνεχείς. Συγκεκριμένα

**Πρόταση 11.11 (Αυτόματη συνέχεια μορφισμών)** *Αν $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ είναι $C^*$ άλγεβρες με μονάδα[24] και $\phi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ είναι *-μορφισμός, τότε ο $\phi$ είναι συνεχής και μάλιστα $\|\phi\| \leq 1$. Αν ο $\phi$ είναι *-ισομορφισμός (δηλ. 1-1 και επί), τότε είναι ισομετρία.*

**Απόδειξη** Παρατηρώ ότι το $\phi(1)$ είναι μονάδα της *-άλγεβρας $\phi(\mathcal{A})$, άρα και της κλειστής της θήκης, έστω $\mathcal{C}$. Επομένως, περιοριζόμενος εν ανάγκη στην $C^*$ άλγεβρα $\mathcal{C}$, μπορώ να υποθέσω ότι $\phi(1) = 1$. Παρατήρησε ότι $\sigma(\phi(y)) \subseteq \sigma(y)$ (αν $\lambda 1 - y \in \text{Inv}(\mathcal{A})$, τότε $\lambda 1 - \phi(y) = \phi(\lambda 1 - y) \in \text{Inv}(\mathcal{C})$) για κάθε $y \in \mathcal{A}$. Επομένως για κάθε $x \in \mathcal{A}$ έχουμε $\rho(\phi(x^*x)) \leq \rho(x^*x)$, άρα

$$\|\phi(x)\|^2 = \|\phi(x)^*\phi(x)\| = \rho(\phi(x)^*\phi(x)) = \rho(\phi(x^*x)) \leq \rho(x^*x) = \|x^*x\| = \|x\|^2\,,$$

δηλαδή $\|\phi(x)\| \leq \|x\|$. Αν ο $\phi$ είναι *-ισομορφισμός, τότε εφαρμόζοντας τα προηγούμενα στον $\phi$ και στον $\phi^{-1}$, βρίσκουμε

$$\|\phi(x)\| \leq \|x\| = \|\phi^{-1}(\phi(x))\| \leq \|\phi(x)\|$$

άρα $\|\phi(x)\| = \|x\|$. $\square$

[24] το ίδιο αποτέλεσμα ισχύει και για $C^*$ άλγεβρες χωρίς μονάδα

**Πρόταση 11.12 (Μοναδικότητα της νόρμας)** *Αν $\mathcal{A}$ είναι μία άλγεβρα με ενέλιξη, τότε ορίζεται το πολύ μία νόρμα στην $\mathcal{A}$ ως προς την οποία είναι $C^*$ άλγεβρα.*

Προχωρούμε τώρα στην κατασκευή του συναρτησιακού λογισμού. Θα χρειασθεί ένα Λήμμα.

**Λήμμα 11.13** *Έστω $\mathcal{A}$ μια $C^*$ άλγεβρα με μονάδα $1$ και $x \in \mathcal{A}$ με $x^*x = xx^*$. Αν $\mathcal{C} = C^*(x)$ είναι η $C^*$-υπάλγεβρα της $\mathcal{A}$ που παράγεται από το $x$ και την $1$, τότε ο χώρος $\mathcal{M}(\mathcal{C})$ των χαρακτήρων της $\mathcal{C}$ είναι ομοιομορφικός με το φάσμα $\sigma(x)$ του $x$.*

**Απόδειξη** Η απεικόνιση

$$\hat{x} : \mathcal{M}(\mathcal{C}) \to \mathbb{C} : \phi \to \phi(x)$$

είναι συνεχής (από τον ορισμό της τοπολογίας του χώρου $\mathcal{M}(\mathcal{C})$. Επειδή $\sigma(x) = \sigma_{\mathcal{C}}(a) = \{\phi(x) : \phi \in \mathcal{M}(\mathcal{C})\}$, η $\hat{x}$ απεικονίζει τον (συμπαγή Hausdorff) χώρο $\mathcal{M}(\mathcal{C})$ επί του $\sigma(x)$.

Αρκεί λοιπόν να δειχθεί ότι είναι 1-1. Έστω $\phi, \psi \in \mathcal{M}(\mathcal{C})$ με $\hat{x}(\phi) = \hat{x}(\psi)$, δηλαδή $\phi(x) = \psi(x)$. Τότε $\phi(x^n) = \psi(x^n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αλλά από το Λήμμα 11.4 έχουμε $\phi(x^*) = \overline{\phi(x)} = \overline{\psi(x)} = \psi(x^*)$. Επομένως $\phi(x^{*m}) = \psi(x^{*m})$ για κάθε $m \in \mathbb{N}$ και άρα $\phi(x^n x^{*m}) = \psi(x^n x^{*m})$ για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$. Όμως η $\mathcal{C}$ είναι η κλειστή γραμμική θήκη του συνόλου $\{x^n x^{*m} : n, m = 0, 1, 2, ...\}$ και οι $\phi$ και $\psi$ είναι συνεχείς. Έπεται λοιπόν ότι $\phi = \psi$. □

**Θεώρημα 11.14 (Συναρτησιακός λογισμός)** *Έστω $\mathcal{A}$ μια $C^*$ άλγεβρα με μονάδα $1$ και $x \in \mathcal{A}$. Ο συναρτησιακός λογισμός για πολυώνυμα*

$$\Phi_\pi : \mathcal{P} \to \mathcal{A} : p \to p(x)$$

*επεκτείνεται σε *-μορφισμό*

$$\Phi_c : C(\sigma(x)) \to \mathcal{A}$$

*αν και μόνον αν $x^*x = xx^*$. Η επέκταση αυτή (αν υπάρχει) είναι μοναδική και ισομετρική, και το πεδίο τιμών της είναι ακριβώς η $C^*$-υπάλγεβρα $C^*(x)$ της $\mathcal{A}$ που παράγεται από το $x$ και την $1$.*

*Αν $f \in C(\sigma(x))$, γράφουμε συνήθως $f(x)$ αντί για $\Phi_c(f)$.*

**Απόδειξη (α)** Η συνθήκη $x^*x = xx^*$ είναι αναγκαία για την ύπαρξη του $\Phi_c$. Πράγματι, αν $f_o : \sigma(x) \to \mathbb{C}$ είναι η συνάρτηση $f_o(z) = z$, τότε (αφού η $f_o$ είναι πολυώνυμο) $\Phi_c(f_o) = \Phi_\pi(f_o) = x$. Επομένως $x^* = (\Phi_c(f_o))^* = \Phi_c(f_o^*)$ αφού η $\Phi_c$ είναι *-μορφισμός. Αλλά οι συναρτήσεις $f_o$ και $f_o^*$ μετατίθενται, συνεπώς και οι εικόνες τους $x$ και $x^*$ πρέπει να μετατίθενται.

**(β)** Υποθέτουμε τώρα ότι η συνθήκη $x^*x = xx^*$ ικανοποιείται. Από το Λήμμα, η απεικόνιση $\hat{x} : \mathcal{M}(\mathcal{C}) \to \sigma(x)$ είναι ομοιομορφισμός. Είναι εύκολο να ελέγξεις ότι η απεικόνιση

$$\Psi : C(\sigma(x)) \to C(\mathcal{M}(\mathcal{C})) : f \to f \circ \hat{x}$$

είναι ισομετρικός *-ισομορφισμός. Αλλά από το Θεώρημα Gelfand - Naimark (11.3) η απεικόνιση

$$\mathcal{G}^{-1} : C(\mathcal{M}(\mathcal{C})) \to \mathcal{C} : \hat{y} \to y$$

είναι ισομετρικός *-ισομορφισμός. Αν ονομάσω $\Phi_c$ την σύνθεση $\mathcal{G}^{-1} \circ \Psi$, τότε η $\Phi_c$ είναι ισομετρικός *-ισομορφισμός της $C(\sigma(x))$ επί της $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$.

Μένει να ελεγχθεί ότι η $\Phi_c$ επεκτείνει τον συναρτησιακό λογισμό για πολυώνυμα. Αρκεί γι'αυτό να ελέγξουμε ότι $\Phi_c(1) = 1$ και ότι $\Phi_c(f_o) = x$. Η πρώτη σχέση αληθεύει γιατί $\Psi(1) = 1$ και $\mathcal{G}^{-1}(1) = 1$. Η δεύτερη επίσης αληθεύει γιατί $\Psi(f_o) = \hat{x}$ και $\mathcal{G}^{-1}(\hat{x}) = x$.

**(γ)** *(Μοναδικότητα)* Έστω $\Phi : C(\sigma(x)) \to \mathcal{A}$ *-μορφισμός με $\Phi(1) = 1$ και $\Phi(f_o) = x$. Επειδή οι $C(\sigma(x))$ και $\mathcal{A}$ είναι $C^*$ άλγεβρες με μονάδα, έπεται από την Πρόταση 11.11 ότι ο $\Phi$ είναι συνεχής. Εφόσον όμως ο $\Phi$ είναι *-μορφισμός, για κάθε $n, m = 0, 1, ...$ θα έχουμε

$$\Phi(f_o^n f_o^{*m}) = \Phi(f_o)^n \Phi(f_o)^{*m} = x^n x^{*m} = \Phi_c(f_o)^n \Phi_c(f_o)^{*m} = \Phi_c(f_o^n f_o^{*m}) .$$

Επομένως οι $\Phi$ και $\Phi_c$ ταυτίζονται στην γραμμική θήκη του συνόλου $\{f_o^n f_o^{*m} : n, m = 0, 1, ...\}$. Αλλά η γραμμική αυτή θήκη είναι αυτοσυζυγής υπάλγεβρα της $C(\sigma(x))$ που περιέχει τις σταθερές συναρτήσεις και χωρίζει τα σημεία του $\sigma(x)$. Επομένως, από το Θεώρημα Stone - Weierstrass, είναι πυκνή στην $C(\sigma(x))$. Αφού οι $\Phi$ και $\Phi_c$ είναι συνεχείς, έπεται ότι θα ταυτίζονται. $\square$

Είναι άμεσο πόρισμα του συναρτησιακού λογισμού ότι το Λήμμα 7.1 (φασματικής απεικόνισης) επεκτείνεται από τα πολυώνυμα σε όλην την $C(\sigma(x))$:

**Θεώρημα 11.15 (φασματικής απεικόνισης)** *Έστω $\mathcal{A}$ μια $C^*$-άλγεβρα με μονάδα. Αν $x \in \mathcal{A}$ φυσιολογικό και $f \in C(\sigma(x))$ τότε*

$$\sigma(f(x)) = f(\sigma(x)) = \{f(z) : z \in \sigma(x)\}.$$

**Απόδειξη** Αν $C^*(x)$ είναι η μικρότερη $C^*$-υπάλγεβρα της $\mathcal{A}$ που περιέχει το $x$ και την $1$, η απεικόνιση

$$\Phi_c : C(\sigma(x)) \longrightarrow C^*(x) : f \longrightarrow f(x)$$

είναι ισομορφισμός αλγεβρών. Επομένως, $\lambda 1 - f(x) \in \text{Inv}(C^*(x))$ αν και μόνον αν $\lambda 1 - f \in \text{Inv}(C(\sigma(x))$. Αυτό όμως συμβαίνει αν και μόνον αν $\lambda \notin f(\sigma(x))$. Συνεπώς $\sigma_{C^*(x)}(f(x)) = f(\sigma(x)))$. Ξέρουμε όμως τώρα (Λήμμα 11.4) ότι $\sigma_{C^*(x)}(f(x)) = \sigma_{\mathcal{A}}(f(x))$. $\square$

**Σύγκριση των συναρτησιακών λογισμών**
Ο συναρτησιακός λογισμός $\Phi_c : C(\sigma(x)) \to \mathcal{A}$ που κατασκευάσαμε επεκτείνει, όταν η $\mathcal{A}$ είναι $C^*$-άλγεβρα *και* το $x$ είναι φυσιολογικό, τον συναρτησιακό λογισμό $f \longrightarrow f(x) : Hol(x) \longrightarrow \mathcal{A}$ που εφαρμόζεται σε οποιαδήποτε άλγεβρα Banach.

Πράγματι, αν $p$ είναι πολυώνυμο (μιάς μεταβλητής), τότε $p \in Hol(x)$ και $p(x) = \Phi_c(p)$. Εφόσον οι $f \longrightarrow f(x)$ και $\Phi_c$ είναι μορφισμοί που στέλνουν την μονάδα στην μονάδα, έπεται ότι θα ταυτίζονται και σε κάθε ρητή συνάρτηση. Αν τώρα $f \in Hol(x)$ με πεδίο ορισμού $U \supseteq \sigma(x)$, υπάρχει ακολουθία $r_n \in Hol(x)$ από ρητές συναρτήσεις που συγκλίνει στην $f$ ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του $U$, άρα $r_n(x) \to f(x)$. Από την άλλη μεριά όμως η ακολουθία $(r_n)$ συγκλίνει στην $f$ ομοιόμορφα στο $\sigma(x)$, άρα $\Phi_c(r_n) \to \Phi_c(f)$. Επομένως $f(x) = \Phi_c(f)$.

Ο λογισμός $f \longrightarrow f(x) : Hol(x) \longrightarrow \mathcal{A}$ έχει βέβαια πολύ ευρύτερη εφαρμογή: ορίζεται για κάθε στοιχείο κάθε άλγεβρας Banach, ενώ ο $\Phi_c$ ορίζεται μόνον γαι $C^*$-άλγεβρες, και μάλιστα μόνον για φυσιολογικά στοιχεία. Από την άλλη μεριά, όταν ορίζεται, ο $\Phi_c$ έχει σημαντικότατα πλεονεκτήματα:

(α) Ορίζεται σε κάθε συνεχή συνάρτηση, όχι μόνον στην $Hol(x)$.

(β) Διατηρεί την ενέλιξη, δηλαδή

$$f(x)^* = (\Phi_c(f))^* = \Phi_c(f^*) = f^*(x) \quad \text{και}$$

(γ) είναι ισομετρικός, δηλαδή

$$\|f(x)\| = \sup\{|f(z)| : z \in \sigma(x)\}.$$

**Παρατήρηση** Το Θεώρημα 11.14 λέει ότι, αν $x$ είναι ένα φυσιολογικό στοιχείο μιας $C^*$-άλγεβρας $\mathcal{A}$, "μπορούμε να θεωρούμε το $x$ ως συνάρτηση ορισμένη στο $\sigma(x)$" και, παίρνοντας σύνθεση, να κατασκευάζουμε "συναρτήσεις του $x$". Μπορούμε, για παράδειγμα, να κατασκευάσουμε τα εξής χρησιμότατα στοιχεία μιας $C^*$ άλγεβρας $\mathcal{A}$ (μεταθετικής ή όχι):

Έστω $x \in \mathcal{A}$ με $x = x^*$ (τέτοια στοιχεία λέγονται **αυτοσυζυγή (selfadjoint)** ή καμμιά φορά ερμιτιανά (hermitian)). Ξέρουμε τώρα ότι $\sigma(x) \subseteq \mathbb{R}$. Θεωρούμε τις εξής συναρτήσεις, ορισμένες στο $\sigma(x)$:

$$f_1(t) = |t|, \ \ f_+(t) = (|t| + t)/2, \ \ f_-(t) = (|t| - t)/2, \ \ f_4(t) = \sqrt{t}$$

(η τελευταία ορίζεται μόνον όταν επιπλέον $\sigma(x) \subseteq [0, +\infty)$). Ονομάζουμε τα αντίστοιχα στοιχεία της $\mathcal{A}$

$$f_1(x) = |x|, \ \ f_+(x) = x_+, \ \ f_-(x) = x_-, \ \ f_4(x) = x^{1/2}$$

Από τις αντίστοιχες ιδιότητες των συναρτήσεων συμπεραίνουμε αμέσως ότι $x = x_+ - x_-, \ |x| = x_+ + x_-, \ x_+x_- = 0 = x_-x_+$. Ετσι, κάθε αυτοσυζυγές στοιχείο μιας $C^*$-άλγεβρας έχει "θετικό και αρνητικό μέρος", "απόλυτη τιμή", και, όταν $\sigma(x) \subseteq [0, +\infty)$, "τετραγωνική ρίζα". Ας σημειώσουμε όμως ότι η απόλυτη τιμή δεν ικανοποιεί μερικές από τις αναμενόμενες ιδιότητες: για παράδειγμα, δεν είναι εν γένει αλήθεια ότι $|x + y| \leq |x| + |y|$.

**Ασκηση** Αν $\mathcal{A}$ είναι $C^*$-άλγεβρα με μονάδα και $x = x^* \in \mathcal{A}$ με $\sigma(x) \subseteq [0, +\infty)$, να αποδειχθεί ότι η τετραγωνική ρίζα $x^{1/2}$ είναι το μοναδικό *θετικό* στοιχείο $y$ της $\mathcal{A}$ που ικανοποιεί $y^2 = x$ (λέμε ότι ένα στοιχείο $y$ μιάς $C^*$-άλγεβρας $\mathcal{A}$ είναι *θετικό* όταν είναι αυτοσυζυγές και $\sigma(y) \subseteq [0, +\infty)$).

**Παρατήρηση** Αν το $x$ είναι φυσιολογικό στοιχείο μιας $C^*$ άλγεβρας $\mathcal{A}$ χωρίς μονάδα, μπορούμε να χρησιμοποιούμε τον συναρτησιακό λογισμό θεωρώντας το $x$ ως στοιχείο της μοναδοποίησης $\mathcal{A}_1$, με την παρατήρηση ότι, αν η $f$ είναι συνεχής στο $\sigma(x)$, το στοιχείο $f(x)$ της $\mathcal{A}_1$ ανήκει στην $\mathcal{A}$ αν και μόνον αν $f(0) = 0$ (γιατί;).

# 12 Το φασματικό Θεώρημα

## 12.1 Εισαγωγή: Διαγωνοποίηση πινάκων

Το Φασματικό Θεώρημα, που είναι ίσως το βασικότερο αποτέλεσμα στην Θεωρία Τελεστών, αποτελεί γενίκευση του αντίστοιχου θεωρήματος από την Γραμμική Αλγεβρα:

“ Κάθε *αυτοσυζυγής* τελεστής $T : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ διαγωνοποιείται ως προς κάποια *ορθοκανονική* βάση.”

Μπορούμε να δώσουμε μία απόδειξη του θεωρήματος αυτού εφαρμόζοντας το Θεώρημα 11.14 στην $C^*$-άλγεβρα $\mathcal{B}(\mathrm{H})$ των φραγμένων τελεστών σ' έναν χώρο Hilbert $H$. Αν $\mathrm{T} \in \mathcal{B}(\mathrm{H})$ είναι φυσιολογικός τελεστής και $f \in C(\sigma(\mathrm{T}))$, μπορούμε να ορίσουμε τον (φυσιολογικό) τελεστή $f(\mathrm{T}) \in \mathcal{B}(\mathrm{H})$. Αν ο H έχει πεπερασμένη διάσταση, οπότε το $\sigma(\mathrm{T}) = \{\lambda_1, ...\lambda_n\}$ είναι ακριβώς το σύνολο των ιδιοτιμών του T, θεωρούμε τις (συνεχείς) συναρτήσεις $e_i : \sigma(\mathrm{T}) \longrightarrow \mathbb{C}$ που ορίζονται από την σχέση $e_i(\lambda_j) = \delta_{ij}$. Τότε έχουμε $e_i e_j = e_i \delta_{ij}$,

$$z = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i(z) \;\; \text{και} \;\; 1 = \sum_{i=1}^{n} e_i(z)$$

για κάθε $z \in \sigma(T)$.

Αν θέσουμε $\mathrm{E}_i \equiv e_i(\mathrm{T}) \in \mathcal{B}(\mathrm{H})$, από το Θεώρημα 11.14 προκύπτει ότι $\mathrm{E}_i = E_i^*$ (επειδή $\bar{e}_i = e_i$), $\mathrm{E}_i\mathrm{E}_j = \mathrm{E}_i\delta_{ij}$,

$$T = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i E_i \;\; \text{και} \;\; I = \sum_{i=1}^{n} E_i.$$

Διαπιστώνουμε λοιπόν ότι η $\mathrm{E}_i$ είναι η *ορθή* (δηλαδή $\ker(E_i) = (E_i(H))^{\perp}$) [25] προβολή πάνω στον ιδιόχωρο του T που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_i$. Πράγματι, αν $x \in \mathrm{H}$ και $\mathrm{E}_i x = x$ τότε $\mathrm{E}_j x = 0$ για κάθε $j \neq i$ (επειδή $\mathrm{E}_i\mathrm{E}_j = 0$) και

$$Tx = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k E_k x = \lambda_i x.$$

Αν αντίστροφα $\mathrm{T}x = \lambda_i x$ τότε

$$Tx = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k E_k x = \lambda_i x = \lambda_i \sum_{k=1}^{n} E_k x$$

[25] πράγματι, $x \perp E_i(H) \iff \langle x, E_i y \rangle = 0 \; \forall y \in H \iff \langle E_i x, y \rangle = 0 \; \forall y \iff E_i x = 0$

άρα
$$\sum_{k=1}^{n}(\lambda_k - \lambda_i)E_k x = 0.$$

Επειδή $\lambda_k - \lambda_i \neq 0$ για $k \neq i$ και οι $\mathrm{E}_k$ είναι ανά δύο κάθετες, έπεται ότι $\mathrm{E}_k x = 0$ για $k \neq i$ (γιατί τα διανύσματα $\mathrm{E}_k x$, αν δεν ήταν μηδενικά, θα ήταν γραμμικά ανεξάρτητα λόγω καθετότητας). Η σχέση $x = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}_i x$ τώρα συνεπάγεται $x = \mathrm{E}_i x$.

Αποδείξαμε λοιπόν το

**Θεώρημα 12.1** *Αν* $\mathrm{H}$ *είναι χώρος Hilbert πεπερασμένης διάστασης και* $\mathrm{T} \in \mathcal{B}(\mathrm{H})$ *φυσιολογικός, οι ιδιόχωροι που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι ανά δύο κάθετοι και παράγουν τον* $\mathrm{H}$. *Αν* $\mathrm{E}_i$ *είναι η ορθή προβολή στον ιδιόχωρο που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή* $\lambda_i$, *τότε*
$$T = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i E_i.$$

*ισοδύναμα*

*Κάθε φυσιολογικός τελεστής σε χώρο πεπερασμένης διάστασης έχει πίνακα διαγώνιο ως προς μία ορθοκανονική βάση του χώρου (την ένωση οποίωνδήποτε ορθοκανονικών βάσεων των ιδιοχώρων του).*

**Σημείωση** Ισχύει βέβαια και το αντίστροφο: αν ένας τελεστής $\mathrm{T}$ έχει πίνακα διαγώνιο ως προς μία ορθοκανονική βάση του χώρου, τότε και ο $\mathrm{T}^*$ είναι διαγώνιος ως προς την *ίδια βάση*, άρα μετατίθεται με τον $\mathrm{T}$, δηλαδή ο $\mathrm{T}$ είναι φυσιολογικός.

Αν ο $\mathrm{H}$ είναι απειροδιάστατος, υπάρχουν δύο προβλήματα: πρώτα-πρώτα, το $\sigma(\mathrm{T})$ δεν είναι εν γένει πεπερασμένο, πρέπει λοιπόν να ορίσουμε τι εννοούμε με το άθροισμα $T = \sum_i \lambda_i E_i$. Αλλά το σοβαρότερο πρόβλημα είναι ότι, μολονότι ξέρουμε ότι το $\sigma(\mathrm{T})$ δεν είναι κενό, ο $\mathrm{T}$ μπορεί να μην έχει καθόλου ιδιοτιμές! (Παράδειγμα: ο τελεστής του πολλαπλασιασμού επί $t$ στον $L^2([0,1],\lambda)$). Επομένως, ούτε οι προσθετέοι του αθροίσματος δεν ορίζονται. Θα δείξουμε ότι στην γενική περίπτωση το άθροισμα αντικαθίσταται με ένα ολοκλήρωμα $\mathrm{T} = \int \lambda dE_\lambda$ όπου η ολοκλήρωση γίνεται πάνω στο συμπαγές υποσύνολο $\sigma(\mathrm{T})$ του $\mathbb{C}$, ως προς ένα "μέτρο" ορισμένο στα Borel υποσύνολα του $\sigma(\mathrm{T})$, με τιμές (οχι αριθμούς αλλά) προβολές στον $\mathrm{H}$.

Το πρόγραμμά μας είναι το εξής: Θα ορίσουμε πρώτα την κατάλληλη έννοια “μέτρου”, το *φασματικό μέτρο*, καθώς και την ολοκλήρωση, ως προς το μέτρο αυτό, συναρτήσεων με μιγαδικές τιμές. Θα δούμε ότι το ολοκλήρωμα ως προς ένα φασματικό μέτρο ορίζει μία αναπαράσταση μιάς $C^*$-άλγεβρας συναρτήσεων. Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι κάθε αναπαράσταση της $C^*$-άλγεβρας $C(K)$ (όπου $K$ συμπαγής Hausdorff χώρος) που διατηρεί την ενέλιξη ορίζει ένα φασματικό μέτρο. Τέλος, αφού κάθε φυσιολογικός τελεστής $T \in \mathcal{B}(H)$ ορίζει την αναπαράσταση $f \longrightarrow f(T)$ της $C(\sigma(T))$, θα οδηγηθούμε στην απόδειξη του Φασματικού Θεωρήματος.

## 12.2 Ολοκλήρωση ως προς φασματικό μέτρο

### 12.2.1 Φασματικά μέτρα

**Ορισμός 12.1** *Εστω* $(\mathrm{K}, \mathcal{S})$ *μετρήσιμος χώρος. Μια οικογένεια* $\{\mathrm{E}(\Omega) : \Omega \in \mathcal{S}\}$ *τελεστών σ' έναν χώρο Hilbert* $H$ *λέγεται* **φασματικό μέτρο (spectral measure)** *αν ικανοποιεί τις ιδιότητες*

1. $\mathrm{E}(\Omega)^* = \mathrm{E}(\Omega)$
2. $\mathrm{E}(\Omega_1 \cap \Omega_2) = \mathrm{E}(\Omega_1).\mathrm{E}(\Omega_2)$
3. $\mathrm{E}(\emptyset) = 0$ *και* $\mathrm{E}(K) = \mathrm{I}$
4. *Για κάθε* $x, y \in \mathrm{H}$, *η απεικόνιση* $\mu_{xy} : \Omega \longrightarrow \langle \mathrm{E}(\Omega)x, y\rangle$ *είναι μιγαδικό μέτρο Borel στο* $K$.

**Παρατηρήσεις (α)** Από τις (1) και (2) έπεται ότι κάθε $\mathrm{E}(\Omega)$ είναι ορθή προβολή, δηλαδή $\mathrm{E}(\Omega)^* = \mathrm{E}(\Omega)$ και $\mathrm{E}(\Omega)^2 = \mathrm{E}(\Omega)$.

**(β)** Όταν ο K είναι (τοπικά) συμπαγής χώρος και $\mathcal{S}$ η σ-άλγεβρα των Borel υποσυνόλων του, συνήθως απαιτούμε ένα φασματικό μέτρο να είναι *κανονικό*, δηλαδή όλα τα $\mu_{xx}$ να είναι κανονικά μέτρα.

**Παρατήρηση 12.2** Τα φασματικά μέτρα δεν είναι (πλην τετριμμένων περιπτώσεων) σ- προσθετικά στην τοπολογία της νόρμας του $\mathcal{B}(H)$, δηλαδή αν $\{\Omega_n\} \in \mathcal{S}$ είναι ακολουθία ξένων ανά δύο υποσυνόλων και $\Omega$ είναι η ένωσή τους, η σειρά $\sum_n \mathrm{E}(\Omega_n)$ δεν συγκλίνει, γιατί τα μερικά της αθροίσματα, όταν δεν είναι ίσα, έχουν διαφορά νόρμας 1 (γιατί είναι ορθές προβολές).

Ισχύει όμως μια ασθενέστερη μορφή σ-προσθετικότητας:

> *Για κάθε* $x \in \mathrm{H}$, *η σειρά* $\sum_n \mathrm{E}(\Omega_n)x$ *συγκλίνει στο* $\mathrm{E}(\Omega)x$ *(στην τοπολογία του* $\mathrm{H}$*).*

**Απόδειξη** Εχουμε

$$\begin{aligned}
&\left\|\mathrm{E}(\Omega)x - \sum_{i=1}^{n} E(\Omega_i)x\right\|^2 = \\
&= \langle \mathrm{E}(\Omega)x, E(\Omega)x\rangle - \sum_{i=1}^{n}\langle E(\Omega)x, E(\Omega_i)x\rangle - \sum_{i=1}^{n}\langle E(\Omega_i)x, E(\Omega)x\rangle \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\langle E(\Omega_j)x, E(\Omega_i)x\rangle \\
&= \langle \mathrm{E}(\Omega)x, x\rangle - \sum_{i=1}^{n}\langle E(\Omega_i)E(\Omega)x, x\rangle - \sum_{i=1}^{n}\langle E(\Omega)E(\Omega_i)x, x\rangle \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\langle E(\Omega_i)E(\Omega_j)x, x\rangle
\end{aligned}$$

(χρησιμοποίησα ότι $\mathrm{E}(\Omega)^* = \mathrm{E}(\Omega)$ και ότι $\mathrm{E}(\Omega)^2 = \mathrm{E}(\Omega)$). Αλλά $\Omega \supseteq \Omega_i$, άρα $E(\Omega)E(\Omega_i) = E(\Omega\cap\Omega_i) = E(\Omega_i)$ και $E(\Omega_i)E(\Omega_j) = E(\Omega_i\cap\Omega_j) = \delta_{ij}E(\Omega_i)$, αφού τα $\{\Omega_i\}$ είναι ξένα ανά δύο. Αρα το προηγούμενο άθροισμα δίνει

$$\left\|\mathrm{E}(\Omega)x - \sum_{i=1}^{n} E(\Omega_i)x\right\|^2 = \langle \mathrm{E}(\Omega)x, x\rangle - \sum_{i=1}^{n}\langle E(\Omega_i)x, x\rangle$$

το οποίο τείνει στο μηδέν καθως $n \longrightarrow \infty$, από την σ-προσθετικότητα του μέτρου $\Omega \longrightarrow \langle \mathrm{E}(\Omega)x, x\rangle$. $\square$

**Παραδείγματα (a)** Η οικογένεια των προβολών στους ιδιοχώρους ενος φυσιολογικού τελεστή σε χώρο πεπερασμένης διάστασης.

**(b)** Εστω $(K, \mathcal{S}, \mu)$ χώρος μέτρου και $H = L^2(K, \mu)$. Για κάθε $\Omega \in \mathcal{S}$ ορίζω $\mathrm{E}(\Omega) \in \mathcal{B}(H)$ από την σχέση

$$\mathrm{E}(\Omega)g = \chi_\Omega g, \quad g \in H.$$

Ελέγχω ότι ικανοποιούνται οι απαιτήσεις του ορισμού:

**(1)** Αν $g, h \in H$ έχουμε

$$\langle E(\Omega)g, h\rangle = \int_K \chi_\Omega g\bar{h}d\mu = \int_K g\overline{\chi_\Omega h}d\mu = \langle g, \mathrm{E}(\Omega)h\rangle$$

δηλαδή $E(\Omega)^* = E(\Omega)$.

**(2)** Επειδή $\chi_{\Omega_1\cap\Omega_2} = \chi_{\Omega_1}.\chi_{\Omega_2}$ έχουμε

$$E(\Omega_1 \cap \Omega_2)g = \chi_{\Omega_1\cap\Omega_2} g = \chi_{\Omega_1}.\chi_{\Omega_2} g = \mathrm{E}(\Omega_1)(\mathrm{E}(\Omega_2)g).$$

Η ιδιότητα (3) είναι τετριμμένη.

Για την (4), επειδή το $\langle \mathrm{E}(\Omega)x, y\rangle$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός τεσσάρων παραστάσεων της μορφής $\langle \mathrm{E}(\Omega)x, x\rangle$, αρκεί να δείξω ότι για κάθε $x \in \mathrm{H}$ η απεικόνιση $\Omega \longrightarrow \langle \mathrm{E}(\Omega)x, x\rangle$ είναι (θετικό) μέτρο στον $K$ (Παρατήρησε ότι ο αριθμός $\langle \mathrm{E}(\Omega)x, x\rangle$ είναι μη αρνητικός, γιατί

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{E}(\Omega)x, x\rangle &= \langle \mathrm{E}(\Omega)^2x, x\rangle = \langle \mathrm{E}(\Omega)x, E(\Omega)^*x\rangle = \langle \mathrm{E}(\Omega)x, E(\Omega)x\rangle \\ &= \|\mathrm{E}(\Omega)x\|^2).\end{aligned}$$

Πρώτα-πρώτα, αν $\Psi, \Omega \in \mathcal{S}$ είναι ξένα, τότε $\chi_{\Omega\cup\Psi} = \chi_\Omega + \chi_\Psi$, επομενως

$$\mathrm{E}(\Omega \cup \Psi)x = \chi_{\Omega\cup\Psi}x = \chi_\Omega x + \chi_\Psi x = (\mathrm{E}(\Omega) + E(\Psi))x.$$

δηλαδή το $\Omega \longrightarrow \langle \mathrm{E}(\Omega)x, x\rangle$ είναι πεπερασμένα προσθετικό. Αν τώρα $(\Omega_n) \subseteq \mathcal{S}$ είναι μια φθίνουσα προς το $\emptyset$ ακολουθία, τότε η αντίστοιχη ακολουθία $(\chi_n)_n$ των χαρακτηριστικών τους φθίνει προς το μηδέν σε κάθε σημείο του $K$, άρα η ακολουθία $(\chi_n(t)|x(t)|^2)_n$ φθίνει προς το μηδέν (μ-σχεδόν) σε κάθε σημείο $t \in K$. Συνεπώς το Θεώρημα μονότονης σύγκλισης δείχνει ότι τα ολοκληρώματα φθίνουν προς το μηδέν, δηλαδή ότι

$$\langle \mathrm{E}(\Omega_n)x, x\rangle = \int_K \chi_n(t)|x(t)|^2 d\mu(t) \longrightarrow 0.$$

Επεται ότι το $\Omega \longrightarrow \langle \mathrm{E}(\Omega)x, x\rangle$ είναι αριθμήσιμα προσθετικό.

### 12.2.2 Ολοκλήρωση

Προχωρούμε τώρα στον ορισμό ολοκληρώματος ως προς φασματικό μέτρο. Αν

$$f = \sum_i \lambda_i \chi_{\Omega_i}$$

είναι απλή μετρήσιμη συνάρτηση (όπου $\lambda_i \in \mathbb{C}$ και $\Omega_i \in \mathcal{S}$, τα οποία μπορώ να υποθέτω ξένα ανά δύο και $\cup\Omega_i = \mathrm{K}$), ορίζω

$$\int_K f(\lambda) dE_\lambda = \sum_i \lambda_i E(\Omega_i) \in \mathcal{B}(\mathrm{H}).$$

Παρατηρούμε ότι
$$\langle (\int_K f(\lambda) dE_\lambda) x, y \rangle = \int_K f d\mu_{x,y}$$
για κάθε $x, y \in \mathrm{H}$.

Είναι φανερό ότι η απεικόνιση θ που ορίζεται από την σχέση
$$\theta(f) = \int_K f(\lambda) dE_\lambda$$
είναι γραμμική από τον γραμμικό χώρο των απλών συναρτήσεων με τιμές στον $\mathcal{B}(\mathrm{H})$. Παρατήρησε επίσης ότι αν $\Omega = \Omega_1 \cap \Omega_2$, έχουμε
$$\theta(\chi_{\Omega_1}\chi_{\Omega_2}) = \theta(\chi_\Omega) = \mathrm{E}(\Omega) = \mathrm{E}(\Omega_1).\mathrm{E}(\Omega_2) = \theta(\chi_{\Omega_1}).\theta(\chi_{\Omega_2})$$
επομένως, λογω γραμμικότητας της $\theta$, αν $f_1, f_2$ είναι απλές, έχουμε
$$\theta(f_1 f_2) = \theta(f_1)\theta(f_2)$$
δηλαδή
$$\int f_1 f_2 d\mathrm{E} = (\int f_1 d\mathrm{E})(\int f_2 d\mathrm{E}).$$
Ομοια, από το γεγονός ότι $\mathrm{E}(\Omega)^* = \mathrm{E}(\Omega)$ βρίσκουμε ότι
$$\theta(\bar{f}) = (\theta(f))^*$$
δηλαδή
$$\int \bar{f} d\mathrm{E} = (\int f d\mathrm{E})^*$$
όταν η $f$ είναι απλή.

Ισχυρίζομαι τώρα ότι $\|\theta(f)\| \leq \sup |f|$. Πράγματι: Για κάθε $x \in \mathrm{H}$, έχουμε
$$\begin{aligned}
\left\| (\int f dE) x \right\|^2 &= \left\| \sum_i \lambda_i \mathrm{E}(\Omega_i) x \right\|^2 = \sum_i |\lambda_i|^2 \|\mathrm{E}(\Omega_i) x\|^2 \\
&\leq (\max |\lambda_i|)^2 \sum_i \|\mathrm{E}(\Omega_i) x\|^2 = (\sup |f|)^2 \| \sum_i \mathrm{E}(\Omega_i) x\|^2 \\
&= (\sup |f|)^2 \|x\|^2
\end{aligned}$$
όπου χρησιμοποίησα (δύο φορές) το Πυθαγόρειο Θεώρημα, μια και οι $\{\mathrm{E}(\Omega_i)\}$ είναι κάθετες ανά δύο και $\sum_i \mathrm{E}(\Omega_i) = \mathrm{E}(\cup \Omega_i) = \mathrm{E}(\mathrm{K}) = \mathrm{I}$.

Εδειξα λοιπόν ότι

$$\left\|\int fdE\right\| \leq \sup|f|$$

δηλαδή $\|\theta(f)\| \leq \sup|f|$. Επομένως η $\theta$ επεκτείνεται *μοναδικά* σε μια συνεχή γραμμική απεικόνιση, που την συμβολίζω επίσης $\theta$, από την $C^*$-άλγεβρα $\mathcal{L}^\infty(\mathrm{K}) = \{f : K \to \mathbb{C}$ φραγμένη, μετρήσιμη$\}$ στον $\mathcal{B}(\mathrm{H})$. Και επειδή η $\theta$ είναι *-μορφισμός στις απλές συναρτήσεις, η επέκτασή της θα είναι επίσης *-μορφισμός (γιατί ο πολλαπλασιασμός και η ενέλιξη είναι συνεχείς στην $\mathcal{L}^\infty(\mathrm{K})$ και στον $\mathcal{B}(\mathrm{H})$).

Ετσι έχω ορίσει το ολοκλήρωμα $\int fdE \in \mathcal{B}(\mathrm{H})$ για κάθε $f \in \mathcal{L}^\infty(\mathrm{K})$, και έχω δείξει ότι η απεικόνιση $f \longrightarrow \int fdE$ είναι συνεχής *-μορφισμός.

**Παρατήρηση** Η απεικόνιση αυτή δεν είναι εν γένει 1-1 (επομένως δεν είναι ισομετρία) πράγματι, αν το σύνολο $\Omega = \{t \in \mathrm{K} : f(t) \neq 0\}$ είναι μέτρου μηδέν, αν δηλαδή $\mathrm{E}(\Omega) = 0$, τότε $\int fdE = 0$.

Συνοψίζουμε τα παραπάνω με την

**Πρόταση 12.3** *Αν* $\{\mathrm{E}(\Omega) : \Omega \in \mathcal{S}\}$ *είναι ένα φασματικό μέτρο ορισμένο σ'έναν μετρήσιμο χώρο* $(\mathrm{K}, \mathcal{S})$ *με τιμές προβολές σ'έναν χώρο Hilbert* $H$*, τότε η απεικόνιση* $\varphi \longrightarrow \int \varphi d\mathrm{E}$ *είναι *-μορφισμός από την *-άλγεβρα* $\mathcal{L}^\infty(\mathrm{K})$ *των φραγμένων μετρήσιμων συναρτήσεων* $\varphi : \mathrm{K} \longrightarrow \mathbb{C}$ *με τιμές στον* $\mathcal{B}(\mathrm{H})$ *που ικανοποιεί*

$$\left\|\int fd\mathrm{E}\right\| \leq \sup|f|$$

*και*

$$\langle(\int fdE)x, y\rangle = \int fd\mu_{xy} \quad (x, y \in \mathrm{H})$$

*όπου* $\mu_{xy}(\Omega) = \langle \mathrm{E}(\Omega)x, y\rangle$.

(Η τελευταία ισότητα έπεται προσεγγίζοντας την $f \in \mathcal{L}^\infty(K)$ ομοιόμορφα από απλές συναρτήσεις.)

## 12.3 Μέτρα και Αναπαραστάσεις

Εστω $A$ μία C*-άλγεβρα. Μία ***-αναπαράσταση** της $A$ σ' έναν χώρο Hilbert $H$ είναι ένας μορφισμός $\pi : A \longrightarrow \mathcal{B}(H)$ που διατηρεί την ενέλιξη (δηλαδή η απεικόνιση $\pi$ είναι γραμμική, πολλαπλασιαστική και $\pi(x^*) = (\pi(x))^*$). Μία αναπαράσταση λέγεται **μη-εκφυλισμένη** (non-degenerate) ή **ουσιώδης** (essential) αν ο χώρος $\pi(A)H$ είναι πυκνός στον $H$. Όταν η $A$ έχει μονάδα, αυτό ισοδυναμεί με την απαίτηση $\pi(1) = I$. Η $\pi$ λέγεται **πιστή** όταν είναι 1-1.

Επειδή μια *-αναπαράσταση είναι *-μορφισμός μεταξύ $C^*$-αλγεβρών, από το θεώρημα 11.11 έχουμε την

**Πρόταση 12.4** *Μία *-αναπαράσταση $\pi$ μιάς $C^*$ άλγεβρας $\mathcal{A}$ είναι αυτομάτως συνεχής, μάλιστα $\|\pi\| \le 1$. Είναι ισομετρική αν και μόνον αν είναι πιστή.*

**Παράδειγμα (i)** Εστω $B \subseteq \mathcal{B}(H)$ μία μεταθετική C*-άλγεβρα τελεστών σ' έναν χώρο Hilbert $H$ με $I \in \mathcal{B}$ και $K = M(B)$ ο χώρος των χαρακτήρων της. Αν $A \longrightarrow \widehat{A} : B \longrightarrow C(K)$ είναι ο μετασχηματισμός Gelfand, τότε ο αντίστροφός του είναι μία πιστή *-αναπαράσταση της C*-άλγεβρας $C(K)$ στον $H$.

**(ii)** Εστω $T \in \mathcal{B}(H)$ φυσιολογικός τελεστής. Τότε η απεικόνιση $f \longrightarrow f(T) : C(\sigma(T)) \longrightarrow \mathcal{B}(H)$ είναι μία πιστή *-αναπαράσταση της C*-άλγεβρας $C(\sigma(\mathrm{T}))$ στον $H$.

Εστω K συμπαγής Hausdorff χώρος. Από την Πρόταση 12.3 έπεται ότι κάθε φασματικό μέτρο $\{E(\Omega) : \Omega \subseteq K \text{ Borel}\} \subseteq \mathcal{B}(H)$ ορίζει μία *αναπαράσταση $\pi$ της (μεταθετικής) C*-άλγεβρας $C(K)$ στον $H$ από την σχέση

$$\pi(f) = \int_K f dE \qquad (f \in C(K)).$$

Αντίστροφα,

**Θεώρημα 12.5** *Εστω $\pi$ μία *-αναπαράσταση της C*- άλγεβρας $C(K)$ στον χώρο Hilbert $H$. Τότε υπάρχει* μοναδικό *κανονικό φασματικό μέτρο $E(.)$ που φέρεται από το $K$ ώστε*

$$\int_K f dE = \pi(f) \qquad (f \in C(K)).$$

Η απόδειξη στηρίζεται σε δύο θεμελιώδη θεωρήματα, που ονομάζονται και τα δύο “Θεωρήματα Αναπαράστασης του Riesz”:

**Θεώρημα 12.6** *Για κάθε συνεχή γραμμική μορφή $\phi : C(K) \longrightarrow \mathbb{C}$ υπάρχει* μοναδικό *κανονικό μιγαδικό μέτρο Borel $\mu$ στο $K$ ώστε*

$$\int_K f d\mu = \phi(f) \qquad (f \in C(K))$$

*και*

$$\|\phi\| = \|\mu\|,$$

*η ολική κύμανση του* $\mu$.

Για την απόδειξη, βλέπε π.χ. [8], Θεώρημα 12.38.

Μία *sesquilinear μορφή* σ' έναν χώρο Hilbert $H$ είναι μία απεικόνιση $\psi : H \times H \longrightarrow \mathbb{C}$ η οποία είναι γραμμική ως προς την πρώτη μεταβλητή και αντιγραμική ως προς την δεύτερη μεταβλητή. Λέγεται φραγμένη όταν το $\sup\{|\psi(x,y)| : \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1\}$ είναι πεπερασμένο. Παραδείγματος χάριν το εσωτερικό γινόμενο είναι μία φραγμένη sesquilinear μορφή.

Το επόμενο Θεώρημα έπεται εύκολα από το γεγονός ότι ο δυικός του $H$ είναι *αντι*γραμμικά ισόμορφος με τον $H$ (βλ. π.χ. [5]).

**Θεώρημα 12.7** *Για κάθε φραγμένη sesquilinear μορφή* $\psi : H \times H \longrightarrow \mathbb{C}$ *υπάρχει* μοναδικός $T \in \mathcal{B}(H)$ *ώστε*

$$\psi(x,y) = \langle Tx, y\rangle \quad (x, y \in H)$$

*και*

$$\|T\| = \sup\{|\psi(x,y)| : \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1\}.$$

**Απόδειξη του Θεωρήματος 12.5**

**Μοναδικότητα** Αν E(.) και $F(.)$ είναι δύο *κανονικά* φασματικά μέτρα ώστε

$$\int_K f dE = \pi(f) = \int_K f dF$$

για κάθε $f \in C(K)$, τότε θέτοντας $\mu_{x,y}(\Omega) = \langle E(\Omega)x, y\rangle$ και $\nu_{x,y}(\Omega) = \langle F(\Omega)x, y\rangle$, έχουμε

$$\int_K f d\mu_{x,y} = \int_K f d\nu_{x,y}$$

για κάθε $f \in C(K)$. Από την μοναδικότητα στο Θεώρημα 12.6 έπεται ότι $\mu_{x,y}(\Omega) = \nu_{x,y}(\Omega)$, δηλαδή $\langle E(\Omega)x, y\rangle = \langle F(\Omega)x, y\rangle$. Αφού η ισότητα αυτή ισχύει για κάθε $x, y \in H$, συμπεραίνουμε ότι $E(\Omega) = F(\Omega)$.

**Υπαρξη (i)** Αν σταθεροποιήσουμε δύο διανύσματα $x, y \in H$, η απεικόνιση

$$C(K) \longrightarrow \mathbb{C} : \; f \longrightarrow \langle \pi(f)x, y\rangle$$

είναι γραμμική μορφή, και φράσσεται από $\|x\|.\|y\|$, διότι

$$|\langle \pi(f)x, y\rangle| \leq \|\pi(f)\|.\|x\|.\|y\| \leq \|f\|_\infty.\|x\|.\|y\|$$

από την Πρόταση 12.4. Από το Θεώρημα 12.6, υπάρχει **μοναδικό** κανονικό μιγαδικό μέτρο Borel $\mu_{x,y}$ στο $K$ ώστε

$$\int_K f d\mu_{x,y} = \langle \pi(f)x, y\rangle \qquad \forall f \in C(K) \tag{12}$$

και τέτοιο ώστε

$$\|\mu_{x,y}\| \leq \|x\|.\|y\|.$$

**(ii)** Σταθεροποιούμε τώρα ένα Borel υποσύνολο $\Omega \subseteq K$ και θεωρούμε την απεικόνιση

$$H \times H \longrightarrow \mathbb{C}: \ (x,y) \longrightarrow \mu_{x,y}(\Omega).$$

Παρατηρούμε ότι είναι sesquilinear και φράσσεται από 1, δηλαδή

$$\begin{gathered}\mu_{x_1+\lambda x_2,y}(\Omega) = \mu_{x_1,y}(\Omega) + \lambda\mu_{x_2,y}(\Omega)\\ \mu_{x,y_1+\lambda y_2}(\Omega) = \mu_{x,y_1}(\Omega) + \overline{\lambda}\mu_{x,y_2}(\Omega)\\ |\mu_{x,y}(\Omega)| \leq \|\mu_{x,y}\| \leq \|x\|.\|y\|.\end{gathered}$$

Πράγματι, για κάθε $f \in C(K)$,

$$\begin{aligned}\textstyle\int f d\mu_{x,y_1+\lambda y_2} &= \langle \pi(f)x, y_1+\lambda y_2\rangle = \langle \pi(f)x, y_1\rangle + \overline{\lambda}\langle \pi(f)x, y_2\rangle\\ &= \textstyle\int f d\mu_{x,y_1} + \overline{\lambda}\int f d\mu_{x,y_2}\end{aligned}$$

συνεπώς τα μέτρα $\Omega \longrightarrow \mu_{x,y_1+\lambda y_2}(\Omega)$ και $\Omega \longrightarrow \mu_{x,y_1}(\Omega) + \overline{\lambda}\mu_{xy_2}(\Omega)$ ορίζουν την ίδια γραμμική μορφή στον $C(K)$ άρα, από την μοναδικότητα στον Θεώρημα 12.6, είναι ίσα. Ομοίως αποδεικνύεται η πρώτη ισότητα.

Από το Θεώρημα 12.7, υπάρχει **μοναδικός** τελεστής $E(\Omega) \in \mathcal{B}(H)$ ώστε

$$\langle E(\Omega)x, y\rangle = \mu_{x,y}(\Omega) \qquad \forall x, y \in H \tag{13}$$

και

$$\|E(\Omega)\| \leq \sup\{|\mu_{x,y}(\Omega)| : \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1\} \leq 1.$$

**(iii)** Πρέπει να δειχθεί ότι το $E(.)$ είναι φασματικό μέτρο. Είναι φανερό από τον ορισμό ότι $E(\emptyset) = 0, E(K) = I$ και, φυσικά, ότι το $\Omega \longrightarrow \langle E(\Omega)x, y\rangle$ $(= \mu_{x,y}(\Omega))$ είναι σ-προσθετικό μέτρο για κάθε $x, y$.

**(a) Ισχυρισμός** $\mathrm{E}(\Omega)^* = \mathrm{E}(\Omega)$.

*Απόδειξη* Για κάθε $f \in C(K)$ έχουμε $\pi(\bar{f}) = \pi(f)^*$, άρα

$$\int f d\mu_{x,y} = \langle \pi(f)x, y\rangle = \overline{\langle \pi(f)^* y, x\rangle} = \overline{\int \bar{f} d\mu_{y,x}} = \int f d\overline{\mu_{y,x}},$$

πράγμα που δείχνει ότι τα μέτρα $\mu_{x,y}$ και $\overline{\mu_{y,x}}$ ταυτίζονται[26], δηλαδή ότι

$$\langle E(\Omega)x, y\rangle = \overline{\langle E(\Omega)y, x\rangle} = \langle x, E(\Omega)y\rangle. \quad \square$$

**(b) Ισχυρισμός** $E(\Omega_1 \cap \Omega_2) = E((\Omega_1).E(\Omega_2)$ για κάθε ζεύγος Borel υποσυνόλων $\Omega_1, \Omega_2$ του $K$.

*Απόδειξη* Για κάθε $f, g \in C(K)$ έχουμε

$$\langle \pi(fg)x, y\rangle = \langle \pi(f)(\pi(g)x), y\rangle$$

και συνεπώς, χρησιμοποιώντας την (12) για τα διανύσματα $\pi(g)x$ και $y$,

$$\int fg d\mu_{x,y} = \int f d\mu_{\pi(g)x,y}.$$

Αφού η σχέση αυτή ισχύει για κάθε $f \in C(K)$, τα αντίστοιχα μέτρα ταυτίζονται, δηλαδή

$$\int_{\Omega_1} g d\mu_{x,y} = \int_{\Omega_1} d\mu_{\pi(g)x,y} = \mu_{\pi(g)x,y}(\Omega_1)$$

για κάθε Borel $\Omega_1 \subseteq K$. Από την (13), η σχέση αυτή γράφεται

$$\int_{\Omega_1} g d\mu_{x,y} = \langle E(\Omega_1)\pi(g)x, y\rangle.$$

Αλλά

$$\langle E(\Omega_1)\pi(g)x, y\rangle = \langle \pi(g)x, E(\Omega_1)^* y\rangle$$

και λόγω της (12), το δεξί μέλος της ισότητας είναι

$$\langle \pi(g)x, E(\Omega_1)^* y\rangle = \int g d\mu_{x,E(\Omega_1)^* y}$$

οπότε

$$\int_{\Omega_1} g d\mu_{x,y} = \int g d\mu_{x,E(\Omega_1)^* y}.$$

Αφού η τελευταία ισότητα ισχύει για κάθε $g \in C(K)$, τα αντίστοιχα μέτρα ταυτίζονται, δηλαδή

$$\int_{\Omega_1} \chi_{\Omega_2} d\mu_{x,y} = \int \chi_{\Omega_2} d\mu_{x,E(\Omega_1)^* y}$$

[26]εδώ $\overline{\mu_{y,x}}(\Omega) = \overline{\mu_{y,x}(\Omega)}$

για κάθε Borel $\Omega_2 \subseteq K$. Δηλαδή

$$\int_{\Omega_1 \cap \Omega_2} d\mu_{x,y} = \int_{\Omega_2} d\mu_{x,E(\Omega_1)^* y}$$

και συνεπώς από την (13)

$$\langle E(\Omega_1 \cap \Omega_2)x, y\rangle = \langle E(\Omega_2)x, E(\Omega_1)^* y\rangle = \langle E(\Omega_1)E(\Omega_2)x, y\rangle.$$

Αφού αυτή η σχέση ισχύει για κάθε $x, y \in H$, δείξαμε ότι $E(\Omega_1 \cap \Omega_2) = E((\Omega_1).E(\Omega_2)$, πράγμα που ολοκληρώνει την απόδειξη. $\square$

## 12.4 Το Φασματικό Θεώρημα

**Θεώρημα 12.8 (Το Φασματικό Θεώρημα )** *Αν $T \in \mathcal{B}(H)$ είναι φυσιολογικός τελεστής, τότε υπάρχει μοναδικό φασματικό μέτρο $\{E(\Omega) : \Omega \subseteq \mathbb{C}$ Borel$\}$ που φέρεται από το $\sigma(T)$ ώστε*

$$T = \int \lambda dE_\lambda.$$

*Τέλος, ένας $S \in \mathcal{B}(H)$ μετατίθεται με τον $T$ αν και μόνον αν μετατίθεται με κάθε $E(\Omega)$.*

**Απόδειξη** Η απεικόνιση

$$\pi : C(\sigma(T)) \longrightarrow \mathcal{B}(H) : f \longrightarrow f(T)$$

είναι ισομετρικός *-μορφισμός, είναι δηλαδή μία πιστή *-αναπαράσταση της $C(\sigma(T))$ στον $H$. Εφαρμόζεται λοιπόν το Θεώρημα 12.5, σύμφωνα με το οποίο υπάρχει μοναδικό κανονικό φασματικό μέτρο Borel $\mathrm{E}_o$ στο συμπαγές $\sigma(\mathrm{T})$, που επάγει την $\pi$. Επεκτείνω το μέτρο αυτό στα Borel υποσύνολα του $\mathbb{C}$ θέτοντας

$$\mathrm{E}(\Omega) = \mathrm{E}_o(\Omega \cap \sigma(T)) \quad (\Omega \subseteq \mathbb{C} \text{ Borel}).$$

Το μέτρο αυτό *φέρεται από το* $\sigma(\mathrm{T})$ με την έννοια ότι κάθε ανοικτό $U \subseteq \mathbb{C}$ με $U \cap \sigma(\mathrm{T}) = \emptyset$ ικανοποιεί $E(U) = 0$.

Έχουμε

$$\pi(f) = \int f(\lambda) dE_\lambda$$

για κάθε $f \in C(\sigma(T))$ και επομένως

$$\mathrm{T} = \pi(id) = \int \lambda dE_\lambda.$$

Μένει να αποδειχθεί ο τελευταίος ισχυρισμός.

Υποθέτουμε πρώτα ότι ο Τ είναι αυτοσυζυγής. Παρατήρησε ότι ένας τελεστής Χ μετατίθεται με τον Τ αν και μόνον αν μετατίθεται με κάθε πολυώνυμο του Τ, επομενως αν και μόνον αν μετατίθεται με την κλειστη θηκη του συνολου των πολυωνύμων του Τ. Αλλά επειδή $\sigma(\mathrm{T}) \subseteq \mathbb{R}$, από το Θεώρημα Weierstrass συμπεραίνουμε ότι η θήκη αυτή είναι το σύνολο $\{f(T) : f \in C(\sigma(T))\}$. Εχουμε λοιπόν

$$\mathrm{XT} = \mathrm{TX} \iff \mathrm{X}f(\mathrm{T}) = f(\mathrm{T})\mathrm{X} \quad \forall f \in C(\sigma(T)).$$

Για κάθε $x, y \in \mathrm{H}$ έχω

$$\begin{aligned}
\langle \mathrm{X}f(\mathrm{T})x, y\rangle = \langle f(\mathrm{T})\mathrm{X}x, y\rangle &\iff \langle f(\mathrm{T})x, X^*y\rangle = \langle f(\mathrm{T})\mathrm{X}x, y\rangle \\
&\iff \langle f(\mathrm{T})x, u\rangle = \langle f(\mathrm{T})v, y\rangle \\
&\iff \int f(\lambda)d\mu_{xu}(\lambda) = \int f(\lambda)d\mu_{vy}(\lambda)
\end{aligned}$$

(όπου $u = X^*y, v = Xx$). Η σχέση αυτη ισχύει για κάθε $f \in C(\sigma(\mathrm{T}))$, αν και μόνον αν τα μέτρα $\mu_{xu}$ και $\mu_{vy}$ είναι ίσα, δηλαδή αν και μόνον αν

$$\langle \mathrm{E}(\Omega)x, u\rangle = \langle \mathrm{E}(\Omega)v, y\rangle$$

για κάθε $\Omega \subseteq \sigma(\mathrm{T})$ Borel δηλαδή

$$\langle \mathrm{XE}(\Omega)x, y\rangle = \langle \mathrm{E}(\Omega)\mathrm{X}x, y\rangle$$

για κάθε $\Omega \subseteq \sigma(\mathrm{T})$ Borel.

Δείξαμε λοιπόν ότι $\mathrm{XT} = \mathrm{TX}$ αν και μόνον αν $\mathrm{XE}(\Omega) = \mathrm{E}(\Omega)\mathrm{X}$ για κάθε $\Omega \subseteq \sigma(\mathrm{T})$ Borel.

Στην γενική περίπτωση, που ο Τ είναι απλώς φυσιολογικός, η κλειστή θήκη των πολυωνύμων του Τ δεν περιέχει εν γένει όλους τους $f(\mathrm{T})$ όπου $f \in C(\sigma(\mathrm{T}))$ (μπορεί να μην περιέχει τον $\mathrm{T}^*$!). Η προηγούμενη απόδειξη θα είναι πλήρης, αν δείξω ότι $\mathrm{XT} = \mathrm{TX} \Longrightarrow Xp(T, T^*) = p(T, T^*)X$ για κάθε πολυώνυμο $p(.,.)$ *δύο μεταβλητών*. Αρκεί γι'αυτό να αποδείξω το

**Θεώρημα 12.9 (Fuglede)** *Αν ο* Τ *είναι φυσιολογικός, τότε ο* Χ *μετατίθεται με τον* Τ *αν και μόνον αν μετατίθεται με τον* $\mathrm{T}^*$.

**Απόδειξη** Εστω ΧΤ = ΤΧ. Τότε, για κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$, η συνάρτηση $f(z) = exp(\bar{\lambda}z)$ είναι συνεχής στο $\sigma(\mathrm{T})$ άρα ορίζεται ο φυσιολογικός τελεστής $f(\mathrm{T}) = exp(\bar{\lambda}\mathrm{T})$. Επειδή ο $f(\mathrm{T})$ είναι όριο πολυωνύμων του Τ έχω

$$X.(exp(\bar{\lambda}\mathrm{T}) = (exp(\bar{\lambda}T).X$$

Αφού $(f(z))^{-1} = exp(-\bar{\lambda}z)$, ο τελεστής $exp(\bar{\lambda}\mathrm{T})$ είναι αντιστρέψιμος με αντίστροφο τον $exp(-\bar{\lambda}\mathrm{T})$. Εχω λοιπόν

$$\mathrm{X} = (exp(-\bar{\lambda}\mathrm{T}))\mathrm{X}(exp(\bar{\lambda}\mathrm{T}))$$

άρα

$$(exp(\lambda\mathrm{T}^*))\mathrm{X}(exp(-\lambda\mathrm{T}^*)) = (exp(\lambda\mathrm{T}^*))(exp(-\bar{\lambda}\mathrm{T}))\mathrm{X}(exp(\bar{\lambda}\mathrm{T}))(exp(-\lambda\mathrm{T}^*). \tag{14}$$

Παρατηρώ ότι $f(T)^* = \bar{f}(T) = exp(\lambda T^*)$. Τώρα *επειδή* ο Τ είναι φυσιολογικός έχουμε από τον συναρτησιακό λογισμό για συνεχείς συναρτήσεις (11.14)

$$(exp(\lambda\mathrm{T}^*))(exp(-\bar{\lambda}\mathrm{T}) = \bar{f}(T)f(T) = (\bar{f}f)(T) = exp(\lambda\mathrm{T}^* - \bar{\lambda}\mathrm{T}).$$

Θέτω $S = \lambda\mathrm{T}^* - \bar{\lambda}\mathrm{T}$ και παρατηρώ ότι $S^* = -S$. Επεται ότι $(expS)^* = exp(S^*) = exp(-S) = (expS)^{-1}$, άρα $\|expS\|^2 = \|(expS)^*(espS)\| = 1$. Τότε όμως, από την ισότητα (14) έχω ότι

$$\|(exp(\lambda\mathrm{T}^*))\mathrm{X}(exp(-\lambda\mathrm{T}^*))\| = \|(expS)X(expS^*)\| \leq \|X\|$$

για κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$. Δηλαδή η συνάρτηση

$$\varphi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathcal{B}(H) : \lambda \longrightarrow (exp(\lambda\mathrm{T}^*))\mathrm{X}(exp(-\lambda\mathrm{T}^*))$$

που είναι προφανώς ακέραια (ως γινόμενο δυναμοσειρών), είναι φραγμένη. Επομένως, από το Θεώρημα Liouville (6.8), είναι σταθερή, άρα $\varphi(\lambda) = \varphi(0)$, δηλαδή

$$(exp(\lambda\mathrm{T}^*))\mathrm{X}(exp(-\lambda\mathrm{T}^*)) = \mathrm{X}$$

για κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$. Αναπτύσσσοντας το αριστερά μέλος σε δυναμοσειρές και εξισώνοντας τους συντελεστές του $\lambda$, βρίσκουμε $\mathrm{T}^*\mathrm{X} = \mathrm{X}\mathrm{T}^*$. $\square$

**Επέκταση του συναρτησιακού λογισμού**

Εστω $\mathrm{T} \in \mathcal{B}(\mathrm{H})$ φυσιολογικός τελεστής και $\{\mathrm{E}(\Omega) : \Omega \subseteq \mathbb{C} \text{ Borel}\}$ το φασματικό του μέτρο. Αν $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ είναι τέτοια ώστε η $f|\sigma(T)$ να είναι φραγμένη και μετρήσιμη, ορίζουμε

$$f(\mathrm{T}) = \int f(\lambda)dE_\lambda\,.$$

Ειδικότερα έχουμε $\chi_\Omega(T) = E(\Omega)$ για κάθε Borel $\Omega \subseteq \mathbb{C}$.

Παρατήρησε ότι $f(T) \in \{\mathrm{T}\}''$. Πράγματι, αν ένας φραγμένος τελεστής $X$ ανήκει στον μεταθέτη του $T$ τότε μετατίθεται με το σύνολο $\{\mathrm{E}(\Omega) : \Omega \subseteq \mathbb{C} \text{ Borel}\}$ (από το φασματικό θεώρημα) άρα και με τον $f(T)$, που είναι όριο γραμμικών συνδυασμών φασματικών προβολών.

Από την Πρόταση 12.3 συμπεραίνουμε ότι:

**Πρόταση 12.10** *Η απεικόνιση $f \longrightarrow f(\mathrm{T})$ είναι *-μορφισμός από την *-άλγεβρα $\mathcal{L}^\infty(\sigma(T))$ στον δεύτερο μεταθέτη $\{\mathrm{T}\}''$ που επεκτείνει τον συναρτησιακό λογισμό για πολυώνυμα, και ισχύει*

$$\|f(T)\| \leq \sup\{|f(\lambda)| : \lambda \in \sigma(\mathrm{T})\} \quad (f \in \mathcal{L}^\infty(\sigma(T))).$$

**Πόρισμα 12.11** *Αν $\mathrm{T} \in \mathcal{B}(\mathrm{H})$ είναι φυσιολογικός τελεστής και $\{\mathrm{E}(\Omega) : \Omega \subseteq \mathbb{C} \text{ Borel}\}$ το φασματικό του μέτρο, τότε*

- *(ι) $\lambda \in \sigma(\mathrm{T})$ αν και μόνον αν $\mathrm{E}(U) \neq 0$ για κάθε $U \ni \lambda$ ανοικτό.*
- *(ιι) το $\lambda$ είναι ιδιοτιμή του $\mathrm{T}$ αν και μόνον αν $\mathrm{E}(\{\lambda\}) \neq 0$. Ο αντίστοιχος ιδιόχωρος είναι ο $\mathrm{E}(\{\lambda\})(\mathrm{H})$.*
- *(ιιι) κάθε μεμονωμένο σημείο του $\sigma(\mathrm{T})$ είναι ιδιοτιμή του $\mathrm{T}$.*

**Απόδειξη (ι)** Εστω $\lambda \in \mathbb{C}$. Αν $\lambda \notin \sigma(T)$, τότε υπάρχει ανοικτή περιοχή $U$ του $\lambda$ ώστε $U \cap \sigma(T) = \emptyset$, οπότε $E(U) = 0$ αφού το $E$ φέρεται από το $\sigma(T)$.

Αν αντίστροφα υπάρχει ανοικτή περιοχή $U$ του $\lambda$ ώστε $E(U) = 0$, τότε η συνάρτηση

$$f(z) = \begin{cases} \frac{1-\chi_U(z)}{z-\lambda} & z \neq \lambda \\ 0 & z = \lambda \end{cases}$$

ορίζεται και είναι φραγμένη, και $(z-\lambda)f(z) = 1 - \chi_U(z)$. Συνεπώς από τον συναρτησιακό λογισμό (Πρόταση 12.10) έχουμε

$$(T - \lambda I)f(T) = f(T)(T - \lambda I) = I - E(U) = I$$

πράγμα που δείχνει ότι ο $T - \lambda I$ είναι αντιστρέψιμος, δηλαδή ότι $\lambda \notin \sigma(T)$. $\square$

**(ιι)** Εστω $\Omega = \{\lambda\}$ και $f(z) = z - \lambda$. Τότε $f\chi_\Omega = 0$ άρα $f(T)E(\Omega) = 0$, δηλαδή $(T - \lambda I)E(\Omega) = 0$.

Αν λοιπόν ονομάσω $F$ τον κλειστό (ενδεχομένως μηδενικό) ιδιόχωρο του $T$ που αντιστοιχεί στο $\lambda$, δηλαδή

$$F = \{x \in H : (T - \lambda I)x = 0\}$$

τότε κάθε $x \in E(\Omega)(H)$ ανήκει στον $F$ και ειδικότερα, αν $E(\Omega) \neq 0$, τότε το $\lambda$ είναι ιδιοτιμή του $T$.

Αντίστροφα, αν $x \in F$, $x \neq 0$, θα δείξω ότι $x \in E(\Omega)(H)$ (άρα $E(\Omega) \neq 0$). Πράγματι, αν $V_n$ είναι ακολουθία ανοικτών συνόλων που φθίνει προς το $\{\lambda\}$, τότε, όπως δείξαμε στην Παρατήρηση 12.2, $\|E(V_n)x - E(\Omega)x\| \to 0$.

Αν θέσω $f_n(z) = (z-\lambda)^{-1}(1-\chi_{V_n}(z))$ για $z \neq \lambda$ και $f(\lambda) = 0$ τότε $f_n(z)(z-\lambda) = 1 - \chi_{V_n}$ άρα $f_n(T)(T-\lambda I) = I - E(V_n)$ και συνεπώς $x - E(V_n)x = f_n(T)(T-\lambda I)x = 0$ δηλαδή $E(V_n)x = x$ για κάθε $n$ άρα $E(\Omega)x = x$.

Το (ιιι) είναι άμεση συνέπεια του (ιι). $\square$

Η **αριθμητική ακτίνα (numerical radius)** ενός τελεστή $T \in \mathcal{B}(H)$ είναι ο αριθμός

$$w(T) = \sup\{|\langle Tx, x\rangle| : x \in H, \|x\| = 1\}\,.$$

Δεν είναι δύσκολο να δειχθεί ότι $\|T\|/2 \leq w(T) \leq \|T\|$ και ότι οι ανισότητες αυτές είναι εν γένει οι καλύτερες δυνατές. Όταν ο $T$ είναι φυσιολογικός, τα πράγματα είναι πολύ καλύτερα:

**Πόρισμα 12.12** *Η αριθμητική ακτίνα ενός φυσιολογικού τελεστή $T \in \mathcal{B}(H)$ ισούται με την νόρμα του.*

**Απόδειξη** Εφόσον $\|T\| = \rho(T)$, (Λήμμα 11.9) υπάρχει $\lambda \in \sigma(T)$ ώστε $|\lambda| = \|T\|$. Εστω $\varepsilon > 0$. Θα βρώ $x \in H$ με $\|x\| = 1$ ώστε $|\langle Tx, x\rangle - \lambda| < \varepsilon$. Αν $\Omega = \{z \in \sigma(T) : |z-\lambda| < \varepsilon\}$ τότε $\mathrm{E}(\Omega) \neq 0$ από το προηγούμενο Πόρισμα. Εστω $x \in \mathrm{E}(\Omega)(H)$ με $\|x\| = 1$. Αν $f(z) = (z-\lambda)\chi_\Omega(z)$, τότε έχουμε $f(T) = (T-\lambda I)E(\Omega)$, άρα $f(T)x = Tx - \lambda x$, οπότε

$$|\langle Tx, x\rangle - \lambda| = |\langle f(T)x, x\rangle| \leq \|f(T)\|\,.$$

Ομως $\|f(T)\| \leq \varepsilon$ αφού $|f(z)| \leq \varepsilon$ για κάθε $z \in \sigma(T)$. $\square$

# Αναφορές


[1] J.B. Conway, A course in Functional Analysis, Springer, 1985.

[2] P. Enflo, A counterexample to the approximation problem in Banach spaces. *Acta Math.*, 130, 1973.

[3] P.R. Halmos, A Hilbert Space Problem Book, 2nd. Edition, Springer, 1982.

[4] H.Heuser, Functional Analysis, Wiley, 1982.

[5] Α. Κατάβολος, Εισαγωγή στην Θεωρία Τελεστών, Εκδ. Συμμετρία, 2008.

[6] Yitzhak Katznelson, An introduction to harmonic analysis, Cambridge Mathematical Library, Cambridge University Press, Cambridge, third edition, 2004.

[7] Γ. Κουμουλλής, Σ. Νεγρεπόντης, Θεωρία Μέτρου, Εκδ. Συμμετρία, 1988.

[8] Σ. Νεγρεπόντης, Θεωρία Μιγαδικών Συναρτήσεων Μιας Μεταβλητής, Αθήνα 1982.

[9] Σ. Νεγρεπόντης, Θ. Ζαχαριάδης, Ν. Καλαμίδας, Β. Φαρμάκη, Γενική Τοπολογία και Συναρτησιακή Ανάλυση, Εκδ. Συμμετρία, 1988.

[10] W. Rudin, Real and Complex Analysis, 2nd Edition, Tata McGraw-Hill, New Delhi 1977.

[11] W. Rudin, Functional Analysis, Tata McGraw-Hill, New Delhi 1974.