

Άσκηση: Η C^* άλγεβρα $M_n(\mathcal{B}(H))$

Έστω H χώρος Hilbert, $n \in \mathbb{N}$ και $H^n = H \oplus H \oplus \cdots \oplus H$.¹ Για κάθε $n \times n$ πίνακα $[a_{ij}] \in M_n(\mathcal{B}(H))$ ορίζουμε $A : H^n \rightarrow H^n$ από τη σχέση

$$A \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix} = [a_{ij}] \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j} \xi_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{nj} \xi_j \end{bmatrix}.$$

Εύκολα φαίνεται ότι ο A είναι καλά ορισμένος (απεικονίζει τον H^n στον H^n) και ότι $A \in \mathcal{B}(H^n)$. Π.χ. $\|A\|_{\mathcal{B}(H^n)}^2 \leq \sum_{i,j} \|a_{ij}\|_{\mathcal{B}(H)}^2$ (άσκηση).

Για κάθε $j = 1, \dots, n$, και $\xi \in H$, θεωρούμε το διάνυσμα $[\xi_1, \dots, \xi_n]^T \in H^n$ όπου $\xi_i = 0$ για $i \neq j$ και $\xi_j = \xi$ (συμβολίζουμε το διάνυσμα αυτό με $\xi \otimes e_j$). Ορίζουμε την απεικόνιση $V_j : H \rightarrow H^n$ από την σχέση

$$V_j : \xi \rightarrow \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \xi \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} := \xi \otimes e_j$$

Δείξτε ότι

$$V_j^* : H^n \rightarrow H : \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix} \rightarrow \xi_j.$$

Δείξτε ότι η απεικόνιση $V_j V_j^* : H^n \rightarrow H^n$ είναι η προβολή P_j στην j συντεταγμένη, και ότι η $V_j^* V_j : H \rightarrow H$ είναι ο ταυτοτικός τελεστής (η V_j είναι ισομετρία).

Δείξτε ότι $a_{ij} = V_i^* A V_j$.

Αντίστροφα, αν δοθεί $A \in \mathcal{B}(H^n)$ ορίζουμε έναν $n \times n$ πίνακα $[a_{ij}] \in M_n(\mathcal{B}(H))$ από τη σχέση

$$a_{ij} = V_i^* A V_j.$$

Εναλλακτικά, θεωρούμε την απεικόνιση $H \times H \rightarrow \mathbb{C}$ που ορίζεται από την

$$\langle\langle \xi, \eta \rangle\rangle := \langle A(\xi \otimes e_j), (\eta \otimes e_i) \rangle_{H^n}, \quad \xi, \eta \in H$$

και παρατηρούμε ότι είναι sesquilinear μορφή στον $H \times H$, και φράσσεται από την $\|A\|$ γιατί

$$|\langle\langle \xi, \eta \rangle\rangle| \leq \|A(\xi \otimes e_j)\|_{H^n} \|\eta \otimes e_i\|_{H^n} \leq \|A\|_{\mathcal{B}(H^n)} \|\xi \otimes e_j\|_{H^n} \|\eta \otimes e_i\|_{H^n} = \|A\|_{\mathcal{B}(H^n)} \|\xi\|_H \|\eta\|_H.$$

Επομένως από το Θεώρημα BLT υπάρχει μοναδικός τελεστής $b_{ij} \in \mathcal{B}(H)$ που ικανοποιεί τη σχέση:

$$\langle b_{ij} \xi, \eta \rangle_H = \langle\langle \xi, \eta \rangle\rangle := \langle A(\xi \otimes e_j), (\eta \otimes e_i) \rangle, \quad \xi, \eta \in H.$$

Πρόκειται βεβαίως για τον ίδιο τελεστή: $b_{ij} = a_{ij}$ για κάθε i, j (γιατί;)

Η απεικόνιση

$$\Phi : M_n(\mathcal{B}(H)) \rightarrow \mathcal{B}(H^n) : [a_{ij}] \rightarrow A$$

που ορίσαμε είναι ισομορφισμός $*$ -άλγεβρων. Αλλά η $\mathcal{B}(H^n)$, με τη νόρμα τελεστή, είναι C^* άλγεβρα. Επομένως, αν μεταφέρουμε τη νόρμα στην $M_n(\mathcal{B}(H))$ ορίζοντας

$$\|[a_{ij}]\| := \|\Phi([a_{ij}])\|_{\mathcal{B}(H^n)},$$

η $M_n(\mathcal{B}(H))$ γίνεται C^* άλγεβρα.

¹ με το εσωτερικό γινόμενο $\langle [\xi_1, \dots, \xi_n]^T, [\eta_1, \dots, \eta_n]^T \rangle_{H^n} := \sum_j \langle \xi_j, \eta_j \rangle_H$