

Συναρτήσεις Borel φυσιολογικού τελεστή

Έστω $A \in \mathcal{B}(H)$ φυσιολογικός τελεστής, $D_A := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \|A\|\}$. Για κάθε φραγμένη μετρήσιμη συνάρτηση $g : D_A \rightarrow \mathbb{C}$ θα ορίσουμε έναν φυσιολογικό τελεστή $g(A) \in \mathcal{B}(H)$. Η απεικόνιση $g \rightarrow g(A)$ θα διατηρεί άθροισμα, γινόμενο και ενέλιξη, θα επεκτείνει τον συναρτησιακό λογισμό για συνεχείς συναρτήσεις, και θα ικανοποιεί

$$\|g(A)\| \leq \sup\{|g(z)| : z \in D_A\}.$$

Θα χρησιμοποιήσουμε δύο βασικά θεωρήματα:

Θεώρημα 1 (Συναρτησιακός λογισμός (functional calculus)).

Έστω \mathcal{A} μια C^* άλγεβρα με μονάδα και $a \in \mathcal{A}$ με $aa^* = a^*a$. Υπάρχει μοναδικός ισομετρικός αλγεβρικός *-μορφισμός

$$\Phi_c : (C(\sigma(a)), \|\cdot\|_{\sigma(a)}) \rightarrow (\mathcal{A}, \|\cdot\|) : f \rightarrow f(a)$$

που απεικονίζει τη σταθερή συνάρτηση $f_0(t) = 1$ στη μονάδα της \mathcal{A} και την ταυτοτική συνάρτηση $f_1(t) = t$ στο $a \in \mathcal{A}$.

Επίσης, ισχύει η ισότητα $\Phi_c(f_p) = p(a, a^*)$ για κάθε πολώνυμο δύο μεταβλητών, όπου $f_p(z) = p(z, \bar{z})$.

Θεώρημα 2 (Φασματικό Θεώρημα για φυσιολογικούς τελεστές). Έστω $A \in \mathcal{B}(H)$ φυσιολογικός τελεστής. Υπάρχει χώρος μέτρου (X, μ) , συνάρτηση $h \in L^\infty(X, \mu)$ και ορθομοναδιαίος τελεστής $U : L^2(X, \mu) \rightarrow H$ ώστε $A = UM_hU^{-1}$.

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση h παίρνει τιμές (μ -σχεδόν πάντα) στο D_A , διότι $\text{esssup}|h| = \|M_h\| = \|A\|$, άρα το σύνολο $\{t \in X : h(t) \notin D_A\} = \{t \in X : |h(t)| > \|A\|\}$ έχει μ -μέτρο 0.

Παρατήρηση 3. Για κάθε $f \in C(D_A)$, ισχύει η σχέση

$$f(A) = UM_{f \circ h}U^{-1}.$$

Απόδειξη. Από τη σχέση $A = UM_hU^{-1}$ έχουμε $A^2 = UM_hU^{-1}UM_hU^{-1} = UM_{h^2}U^{-1}$ και επαγωγικά $A^n = UM_{h^n}U^{-1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Επίσης $A^* = (UM_hU^{-1})^* = UM_{\bar{h}}U^{-1}$ διότι $U^* = U^{-1}$ και $M_h^* = M_{\bar{h}}$. Επομένως, αν

$$p(z, \bar{z}) = \sum_{n,k=0}^N c_{n,k} z^n \bar{z}^k \text{ τότε}$$

$$p(A, A^*) = \sum_{n,k=0}^N c_{n,k} UM_{h^n \bar{h}^k}U^{-1}$$

$$\text{δηλαδή } \Phi_c(f_p) = UM_{f_p \circ h}U^{-1}$$

$$\text{αφού } (f_p \circ h)(x) = \sum_{n,k=0}^N c_{n,k} h(x)^n \bar{h}(x)^k \text{ για κάθε } x \in X.$$

Αν $f \in C(D_A)$, από το Θεώρημα Stone-Weierstrass υπάρχει ακολουθία (p_n) πολωνύμων δύο μεταβλητών ώστε $\lim_n p_n(z, \bar{z}) = f(z)$ ομοιόμορφα ως προς $z \in D_A$, δηλαδή $\|f - f_{p_n}\|_{D_A} \rightarrow 0$. Αλλά η συνάρτηση h παίρνει τιμές (μ -σχεδόν πάντα) στο D_A . Έπεται ότι $\|f \circ h - f_{p_n} \circ h\|_\infty \rightarrow 0$, άρα $\|M_{f \circ h} - M_{f_{p_n} \circ h}\| \rightarrow 0$. Από

την άλλη μεριά, αφού ο συναρτησιακός λογισμός Φ_c είναι ισομετρία (και $\lim_n p_n(z, \bar{z}) = f(z)$ ομοιόμορφα ως προς $z \in \sigma(A) \subseteq D_A$), έχουμε $\|\Phi_c(f) - \Phi_c(f_{p_n})\| \rightarrow 0$. Κατά συνέπεια

$$f(A) := \Phi_c(f) = \lim_n \Phi_c(f_{p_n}) = \lim_n U M_{f_{p_n} \circ h} U^{-1} = U M_{f \circ h} U^{-1} \quad f \in C(D_A).$$

□

Συμβολισμός: Ονομάζουμε $\mathcal{L}^\infty(D_A)$ το σύνολο όλων των συναρτήσεων $g : D_A \rightarrow \mathbb{C}$ που είναι φραγμένες και Borel μετρήσιμες.

Η $\mathcal{L}^\infty(D_A)$, εφοδιασμένη με πράξεις και ενέλιξη κατά σημείο και τη νόρμα supremum, είναι μεταθετική C^* -άλγεβρα με μονάδα.

Αν $g \in \mathcal{L}^\infty(D_A)$, εφόσον η συνάρτηση h παίρνει τιμές (μ -σχεδόν πάντα) στο D_A , η συνάρτηση

$$g \circ h : (X, \mu) \rightarrow D_A \rightarrow \mathbb{C}$$

είναι μετρήσιμη και ουσιωδώς φραγμένη, μάλιστα

$$\|g \circ h\|_\infty = \text{esssup} |g \circ h| \leq \sup\{|g(z)| : z \in D_A\} = \|g\|_\infty.$$

Επομένως ορίζεται ο φραγμένος τελεστής $M_{g \circ h} : L^2(X, \mu) \rightarrow L^2(X, \mu) : \xi \rightarrow (g \circ h) \cdot \xi$ και $\|M_{g \circ h}\| = \|g \circ h\|_\infty \leq \|g\|_\infty$.

Ορισμός 1. Για κάθε $g \in \mathcal{L}^\infty(D_A)$ ορίζουμε τον τελεστή

$$g(A) := U M_{g \circ h} U^{-1} \in \mathcal{B}(H).$$

Ο συναρτησιακός λογισμός για συναρτήσεις Borel (the Borel functional calculus) είναι η απεικόνιση

$$\Phi_b : g \rightarrow g(A) := U M_{g \circ h} U^{-1} : \mathcal{L}^\infty(D_A) \rightarrow \mathcal{B}(H).$$

Θεώρημα 4. Έστω $A \in \mathcal{B}(H)$ φυσιολογικός τελεστής, $D_A := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \|A\|\}$. Η απεικόνιση $\Phi_b : g \rightarrow g(A)$ είναι μορφισμός $*$ -αλγεβρών (δηλ. διατηρεί άθροισμα, γινόμενο και ενέλιξη), που επεκτείνει τον συναρτησιακό λογισμό Φ_c για συνεχείς συναρτήσεις, και ικανοποιεί

$$\|g(A)\| \leq \sup\{|g(z)| : z \in D_A\}.$$

Απόδειξη. Έχουμε $\|g(A)\| = \|U M_{g \circ h} U^{-1}\| = \|M_{g \circ h}\| \leq \|g\|_\infty$. Επειδή οι απεικονίσεις $g \rightarrow g \circ h$, $f \rightarrow M_f$ και $T \rightarrow U T U^{-1} = U T U^*$ διατηρούν το άθροισμα, το γινόμενο και την ενέλιξη, έπεται ότι η $\Phi_b : \mathcal{L}^\infty(D_A) \rightarrow \mathcal{B}(H)$ είναι μορφισμός $*$ -αλγεβρών. Από την Παρατήρηση 3, η Φ_b επεκτείνει την Φ_c . □

Πρόταση 5. Έστω $g_n, g \in \mathcal{L}^\infty(D_A)$. Αν $\lim_n g_n = g$ κατά σημείο στο D_A και $\sup_n \|g_n\|_\infty < \infty$, τότε η ακολουθία τελεστών $(g_n(A))$ ικανοποιεί

$$\lim_n \langle g_n(A)x, y \rangle = \langle g(A)x, y \rangle \quad \forall x, y \in H.$$

(Λέμε ότι $g_n(A) \rightarrow g(A)$ ως προς την WOT (Weak Operator Topology - ορισμός αργότερα).)

Απόδειξη. Έχουμε $g(A) = UM_{g \circ h}U^*$ όπου $U : L^2(X, \mu) \rightarrow H$ unitary. Σταθεροποιούμε $x, y \in H$ και θέτουμε $\xi = U^*x, \eta = U^*y \in L^2(X, \mu)$, οπότε

$$\begin{aligned}\langle g(A)x, y \rangle &= \langle UM_{g \circ h}U^*x, y \rangle = \langle M_{g \circ h}U^*x, U^*y \rangle = \langle M_{g \circ h}\xi, \eta \rangle = \langle (g \circ h)\xi, \eta \rangle \\ &= \int_X (g \circ h)\xi\bar{\eta}d\mu\end{aligned}$$

$$\text{άρα } \langle g_n(A)x, y \rangle - \langle g(A)x, y \rangle = \int_X ((g_n \circ h) - (g \circ h))\xi\bar{\eta}d\mu.$$

Η συναρτήσεις $f_n := ((g_n \circ h) - (g \circ h))\xi\bar{\eta}$ είναι μετρήσιμες και $|f_n| = |(g_n \circ h) - (g \circ h)| \cdot |\xi\bar{\eta}| \leq 2C|\xi\bar{\eta}|$ (όπου $C = \sup_n \|g_n\|_\infty$). Αλλά η συνάρτηση $2C|\xi\bar{\eta}|$ ανήκει στον $L^1(X, \mu)$ (αφού $\xi, \bar{\eta} \in L^2(X, \mu)$). Συνεπώς από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης έχουμε $\lim_n \int f_n d\mu = \int \lim_n f_n d\mu = 0$, δηλαδή $\langle g_n(A)x, y \rangle - \langle g(A)x, y \rangle \rightarrow 0$, όπως θέλαμε. \square

Πόρισμα 6. Με τις υποθέσεις της προηγούμενης Πρότασης, αν ένας $T \in \mathcal{B}(H)$ ικανοποιεί $g_n(A)T = Tg_n(A)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ τότε ο T ικανοποιεί και $g(A)T = Tg(A)$.

Απόδειξη. Για κάθε $x, y \in H$ έχουμε $\lim_n \langle g_n(A)x, y \rangle = \langle g(A)x, y \rangle$ και συνεπώς

$$\begin{aligned}\langle Tg(A)x, y \rangle &= \langle g(A)x, T^*y \rangle = \lim_n \langle g_n(A)x, (T^*y) \rangle = \lim_n \langle Tg_n(A)x, y \rangle = \lim_n \langle g_n(A)(Tx), y \rangle \\ &= \langle g(A)(Tx), y \rangle.\end{aligned}$$

\square

Ορισμός 2 (Φασματικές προβολές του A). Για κάθε Borel υποσύνολο $\Omega \subseteq D_A$ ονομάζουμε $E_A(\Omega) \in \mathcal{B}(H)$ τον τελεστή

$$E_A(\Omega) := \chi_\Omega(A).$$

Πρόταση 7. Η οικογένεια $\{E_A(\Omega) : \Omega \subseteq D_A \text{ Borel}\} \subseteq \mathcal{B}(H)$ ικανοποιεί

1. $E_A(\Omega)^* = E_A(\Omega)$.
2. $E_A(\Omega_1)E_A(\Omega_2) = E_A(\Omega_1 \cap \Omega_2)$.
Επομένως κάθε $E_A(\Omega)$ είναι ορθή προβολή.
3. $E_A(\emptyset) = 0, E_A(D_A) = I$.¹
4. Για κάθε $x \in H$, η απεικόνιση $\mu_x : \Omega \longrightarrow \langle E_A(\Omega)x, x \rangle$ είναι θετικό μέτρο Borel.

Απόδειξη. (1) $(E_A(\Omega))^* = \Phi_b(\chi_\Omega)^* = \Phi_b(\bar{\chi}_\Omega) = \Phi_b(\chi_\Omega) = E_A(\Omega)$.

(2) $E_A(\Omega_1)E_A(\Omega_2) = \Phi_b(\chi_{\Omega_1})\Phi_b(\chi_{\Omega_2}) = \Phi_b(\chi_{\Omega_1}\chi_{\Omega_2}) = \Phi_b(\chi_{\Omega_1 \cap \Omega_2}) = E_A(\Omega_1 \cap \Omega_2)$.

Επομένως $E_A(\Omega)^2 = E_A(\Omega \cap \Omega) = E_A(\Omega)$ άρα ο τελεστής $E_A(\Omega)$ είναι ταυτοδύναμος και αυτοσυζυγής από το (1), δηλαδή ορθή προβολή.

(3) Αφού $\chi_\emptyset = 0$, έχουμε $E_A(\emptyset) = 0$. Επίσης, εφόσον η συνάρτηση h παίρνει τιμές (μ -σχεδόν πάντα) στο D_A , η σύνθεση $(\chi_{D_A} \circ h)(t) = 1$, μ -σχεδόν για κάθε $t \in X$. Επομένως

$$E_A(D_A) = UM_{\chi_{D_A} \circ h}U^* = UM_IU^* = I.$$

¹ Μάλιστα αποδεικνύεται ότι $E_A(\sigma(A)) = I$, οπότε $E_A(\Omega) = E_A(\Omega \cap \sigma(A))$ για κάθε Ω .

(4) Για κάθε $x \in H$ θέτοντας $\xi = U^*x \in L^2(X, \mu)$ έχουμε

$$\mu_x(\Omega) = \langle E(\Omega)x, x \rangle = \langle UM_{\chi_\Omega \circ h}U^*x, x \rangle = \langle M_{\chi_\Omega \circ h}\xi, \xi \rangle = \int_X (\chi_\Omega \circ h)|\xi|^2 d\mu.$$

Αν $\Omega_n, n \in \mathbb{N}$ είναι ξένα ανά δύο σύνολα Borel και $\Omega = \cup_n \Omega_n$, έχουμε

$$\begin{aligned} \chi_\Omega &= \sum_{k=1}^{\infty} \chi_{\Omega_k} \\ \text{άρα } 0 &\leq (\chi_\Omega \circ h)|\xi|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (\chi_{\Omega_k} \circ h)|\xi|^2 \\ \text{άρα } \int_X (\chi_\Omega \circ h)|\xi|^2 d\mu &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_X (\chi_{\Omega_k} \circ h)|\xi|^2 d\mu \quad (\Theta. \text{ μονότονης σύγκλισης}) \\ \text{άρα } \mu_x(\Omega) &= \sum_{k=1}^{\infty} \mu_x(\Omega_k). \end{aligned}$$

Παρατήρηση 8. Κάθε φασματικό μέτρο είναι βεβαίως πεπερασμένα προσθετικό (αφού κάθε μ_x ($x \in H$) είναι πεπερασμένα προσθετικό), δηλαδή $E(\Omega_1 \cup \Omega_2) = E(\Omega_1) + E(\Omega_2)$ όταν τα Ω_1, Ω_2 είναι Borel και ξένα. Δεν είναι όμως (πλην τετριμμένων περιπτώσεων) σ -προσθετικό στην τοπολογία της νόρμας του $\mathcal{B}(H)$. Δηλαδή αν $\{\Omega_n\}$ είναι ακολουθία ξένων ανά δύο Borel υποσυνόλων και Ω είναι η ένωσή τους, η σειρά $\sum_n E(\Omega_n)$ δεν συγκλίνει, γιατί τα μερικά της αθροίσματα, όταν δεν είναι ίσα, έχουν διαφορά νόρμας 1 (γιατί είναι ορθές προβολές²).

Ισχύει όμως μια ασθενέστερη μορφή σ -προσθετικότητας:

Πόρισμα 9. Αν $\Omega_n, n \in \mathbb{N}$ είναι ξένα ανά δύο σύνολα Borel, τότε για κάθε $x \in H$,

$$\lim_n \left\| \sum_{k=1}^n E_A(\Omega_k)x - E_A(\cup_n \Omega_n)x \right\|_H = 0.$$

Απόδειξη. Επειδή η απεικόνιση $\Omega \rightarrow E(\Omega)$ είναι πεπερασμένα προσθετική, αν θέσουμε $V_n = \cup\{\Omega_k : k \leq n\}$ τότε

$$E(\Omega) = E(V_n) + E(\Omega \setminus V_n) = \sum_{k=1}^n E(\Omega_k) + E(\Omega \setminus V_n).$$

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι $\lim_n \|E(\Omega \setminus V_n)x\| = 0$ για κάθε $x \in H$. Αλλά η $E(\Omega \setminus V_n)$ είναι ορθή προβολή, άρα $\|E(\Omega \setminus V_n)x\|^2 = \langle E(\Omega \setminus V_n)x, x \rangle = \mu_x(\Omega \setminus V_n)$ που τείνει στο 0 αφού το μ_x είναι σ -προσθετικό μέτρο.

Βιβλιογραφία Orr Shalit, *Introduction to von Neumann algebras*

A. Κατάβολος, *Θεωρία Τελεστών. Σημειώσεις*

²Πράγματι, $\sum_{k=n}^m E(\Omega_k) = E(\bigcup_{k=n}^m \Omega_k)$