

## Η Αναπαράσταση GNS

**Θεώρημα 1** (Gelfand, Naimark, Segal). *Για κάθε κατάσταση  $\phi$  σε μια  $C^*$  άλγεβρα  $\mathcal{A}$  υπάρχει μια τριάδα  $(\pi_\phi, H_\phi, \xi_\phi)$  όπου  $\pi_\phi$  είναι αναπαράσταση της  $\mathcal{A}$  στον χώρο Hilbert  $H_\phi$  και  $\xi_\phi \in H_\phi$  ένα κυκλικό<sup>1</sup> μοναδιαίο διάνυσμα ώστε*

$$\phi(a) = \langle \pi_\phi(a)\xi_\phi, \xi_\phi \rangle \quad \text{για κάθε } a \in \mathcal{A}.$$

Όπως θα δούμε, η τριάδα GNS  $(\pi_\phi, \mathcal{H}_\phi, \xi_\phi)$  καθορίζεται μοναδικά, modulo unitary ισοδυναμία, από την ισότητα αυτή.

Θα χρειασθεί ένα Λήμμα:

**Λήμμα 2.** *Αν  $\phi$  είναι θετική γραμμική μορφή στην  $\mathcal{A}$ ,*

$$\phi(b^*a^*ab) \leq \|a\|^2 \phi(b^*b), \quad \text{για κάθε } a, b \in \mathcal{A}.$$

*Απόδειξη.* Αρκεί να υποθέσουμε ότι  $\|a\| \leq 1$  και να δείξουμε ότι  $\phi(b^*a^*ab) \leq \phi(b^*b)$  (διαιρώντας εν ανάγκη με  $\|a\|^2$ ).

Αφού  $\|a^*a\| \leq 1$ , έχουμε  $\mathbf{1} - a^*a \geq 0$ . Πράγματι, το  $\mathbf{1} - a^*a$  είναι αυτοσυζυγές και  $\sigma(a^*a) \subseteq [0, 1]$  άρα  $\sigma(\mathbf{1} - a^*a) = \{1 - \lambda : \lambda \in \sigma(a^*a)\} \subseteq [0, 1]$ . Έπεται ότι για κάθε  $b \in \mathcal{A}$  ισχύει ότι  $b^*b - b^*a^*ab \geq 0$ . Πράγματι, αν  $x = (\mathbf{1} - a^*a)^{1/2}$  τότε

$$b^*b - b^*a^*ab = b^*(\mathbf{1} - a^*a)b = b^*x^*xb = (xb)^*(xb) \geq 0.$$

Συνεπώς αφού η  $\phi$  είναι θετική έπεται ότι  $\phi(b^*b - b^*a^*ab) \geq 0$  δηλαδή  $\phi(b^*a^*ab) \leq \phi(b^*b)$ . □

*Απόδειξη του Θεωρήματος*

1. Θεωρούμε τον γραμμικό χώρο  $\mathcal{A}$ .

2. Ορίζουμε  $\langle a, b \rangle_0 := \phi(b^*a)$ ,  $a, b \in \mathcal{A}$ .

Το  $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$  είναι προφανώς sesquilinear μορφή, και αφού η  $\phi$  είναι θετική, ικανοποιεί

$$\langle b, a \rangle_0 = \phi(a^*b) = \overline{\phi(b^*a)} = \overline{\langle a, b \rangle_0} \quad \text{και} \quad \langle a, a \rangle_0 := \phi(a^*a) \geq 0 \quad \text{για κάθε } a, b \in \mathcal{A}.$$

Είναι λοιπόν ημι-εσωτερικό γινόμενο στον γραμμικό χώρο  $\mathcal{A}$ .

Όταν  $\mathcal{A} = C(X)$  όπου  $X$  συμπαγής χώρος Hausdorff και  $\phi(a) = \int_X a(t)d\mu(t)$  όπου  $\mu$  κανονικό μέτρο Borel, έχουμε  $\langle a, b \rangle_0 = \int_X a(t)\overline{b(t)}d\mu(t)$ .

Παρατηρούμε ότι η ανισότητα Cauchy-Schwarz για την  $\phi$  γράφεται  $|\langle a, b \rangle_0|^2 \leq \langle a, a \rangle_0 \langle b, b \rangle_0$ .

3. Θέτουμε

$$\mathcal{N}_\phi = \mathcal{N} := \{u \in \mathcal{A} : \langle u, u \rangle_0 = 0\}.$$

Ισχύει η ισότητα

$$\mathcal{N} = \{u \in \mathcal{A} : \langle u, a \rangle_0 = 0 \text{ για κάθε } a \in \mathcal{A}\} \quad (*)$$

και συνεπώς το  $\mathcal{N}$  είναι γραμμικός υπόχωρος του  $\mathcal{A}$

---

<sup>1</sup>δηλ. τέτοιο ώστε το  $\pi_\phi(\mathcal{A})\xi_\phi$  να είναι πυκνό στον  $H_\phi$ .

Πράγματι, αν  $\langle u, a \rangle_0 = 0$  για κάθε  $a \in \mathcal{A}$ , τότε βέβαια  $\langle u, u \rangle_0 = 0$ . Αντίστροφα, αν  $\langle u, u \rangle_0 = 0$ , τότε λόγω της ανισότητας Cauchy-Schwarz για κάθε  $a \in \mathcal{A}$  έχουμε  $|\langle u, a \rangle_0|^2 \leq \langle u, u \rangle_0 \langle a, a \rangle_0 = 0$  άρα  $\langle u, a \rangle_0 = 0$ .

4. Θέτουμε  $H_{0\phi} := \mathcal{A}/\mathcal{N}$ . Παρατηρούμε ότι το ημι-εσωτερικό γινόμενο  $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$  επάγει ένα εσωτερικό γινόμενο στον  $H_{0\phi}$ :

$$\langle [a], [b] \rangle_\phi := \langle a, b \rangle_0, \quad \text{για κάθε } [a] = a + \mathcal{N}, [b] = b + \mathcal{N} \text{ στον } \mathcal{A}/\mathcal{N}.$$

Ονομάζουμε λοιπόν  $H_\phi$  την πλήρωση του  $H_{0\phi}$  ως προς την  $\|u\|_\phi := \sqrt{\langle [u], [u] \rangle_\phi}$ . Καταχρηστικά χρησιμοποιούμε το ίδιο σύμβολο για το εσωτερικό γινόμενο στον  $H_\phi$ .

Όταν  $\mathcal{A} = C(X)$  όπως πριν, τότε ο  $H_\phi$  δεν είναι άλλος από τον  $L^2(\mu)$ .

Πράγματι, η απεικόνιση αυτή είναι καλά ορισμένη: αν  $[a] = [a_1]$  και  $[b] = [b_1]$ , δηλαδή  $a_1 - a = u \in \mathcal{N}$  και  $b_1 - b = v \in \mathcal{N}$  τότε

$$\langle [a_1], [b_1] \rangle_\phi = \langle a + u, b + v \rangle_0 = \langle a, b \rangle_0 + \langle u, b \rangle_0 + \langle a + u, v \rangle_0 = \langle a, b \rangle_0$$

από το βήμα (3), εφόσον  $u, v \in \mathcal{N}$ . Το  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\phi$  είναι προφανώς ημι-εσωτερικό γινόμενο στον  $\mathcal{A}/\mathcal{N}$ . Επιπλέον, αν  $\langle [a], [a] \rangle_\phi = 0$  τότε  $\langle a, a \rangle_0 = 0$ , δηλαδή  $a \in \mathcal{N}$  άρα  $[a] = [0]$ . Συνεπώς το  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\phi$  είναι εσωτερικό γινόμενο στον  $\mathcal{A}/\mathcal{N}$  και άρα η επαγόμενη  $\|u\|_\phi := \sqrt{\langle [u], [u] \rangle_\phi}$  είναι νόρμα στον  $\mathcal{A}/\mathcal{N}$ .

Θα ορίσουμε τώρα δράση της  $\mathcal{A}$  στον  $H_\phi$ .

5. Η  $\mathcal{A}$  δρα στον γραμμικό χώρο  $\mathcal{A}$  με την λεγόμενη κανονική αριστερή αναπαράσταση  $\pi_0$  που ορίζεται ως εξής: για κάθε  $a \in \mathcal{A}$ , η απεικόνιση  $\pi_0(a) : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  είναι η  $\pi_0(a)(b) = ab, b \in \mathcal{A}$ .
6. Αν  $a \in \mathcal{A}$ , η απεικόνιση

$$\pi_1(a) : H_{0\phi} \rightarrow H_{0\phi} : [b] \rightarrow [ab]$$

είναι καλά ορισμένη γραμμική απεικόνιση  $H_{0\phi} = \mathcal{A}/\mathcal{N}$ , διότι  $\pi_0(a)(\mathcal{N}) \subseteq \mathcal{N}$  (δηλαδή το  $\mathcal{N}$  είναι αριστερό ιδεώδες της  $\mathcal{A}$ ).

Πράγματι, για κάθε  $u \in \mathcal{N}$ , έχουμε  $\pi_0(a)(u) = au \in \mathcal{N}$  διότι για κάθε  $b \in \mathcal{A}$  έχουμε  $\langle au, b \rangle_0 = \phi(b^* au) = \phi((a^* b)^* u) = \langle u, a^* b \rangle_0$  οπότε  $au \in \mathcal{N}$  από τη σχέση (\*) στο βήμα (3).

Επομένως αν  $[b] = [b_1]$ , δηλαδή  $b_1 - b = u \in \mathcal{N}$ , έχουμε  $ab_1 - ab = au \in \mathcal{N}$ , άρα  $[ab] = [ab_1]$ .

7. Για κάθε  $a \in \mathcal{A}$  και κάθε  $[b] \in H_{0\phi}$  έχουμε

$$\|\pi_1(a)([b])\|_\phi \leq \|a\| \|b\|_\phi.$$

από το Λήμμα 2 (διότι  $\|\pi_1(a)([b])\|_\phi^2 = \|[ab]\|_\phi^2 = \phi(b^* a^* ab)$ ).

(Η ανισότητα αυτή γίνεται  $\|ab\|_2 \leq \|a\|_\infty \|b\|_2$  όταν  $a, b \in C(X)$ .)

Έπεται ότι ο  $\pi_1(a)$  επεκτείνεται σε φραγμένο τελεστή  $\pi_\phi(a)$  στον  $H_\phi$ .

Είναι τώρα εύκολο να δείξει κανείς ότι η απεικόνιση

$$\pi_\phi : a \rightarrow \pi_\phi(a) : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}(H_\phi)$$

είναι \*-αναπαράσταση.

[Όταν  $\mathcal{A} = C(X)$ , τότε  $\pi_\phi(a) = M_a$ , δηλαδή  $(\pi_\phi(a)b)(t) = b(t)u(t)$  μ-σχεδόν για κάθε  $t \in X$ .]

*Απόδειξη* Αν  $a_1, a_2 \in \mathcal{A}$  και  $\lambda \in \mathbb{C}$ , για να δείξουμε ότι  $\pi_\phi(a_1 + \lambda a_2) = \pi_\phi(a_1) + \lambda \pi_\phi(a_2)$  και ότι  $\pi_\phi(a_1 a_2) = \pi_\phi(a_1) \pi_\phi(a_2)$ , επειδή είναι ισότητες φραγμένων τελεστών, αρκεί να τις ελέγξουμε σε κάθε σημείο  $[b]$  του πυκνού υποχώρου  $H_{0\phi}$ . Από τον ορισμό των πράξεων στον χώρο πηλίκου  $H_{0\phi} = \mathcal{A}/\mathcal{N}$ , έχουμε  $[a_1 b + \lambda a_2 b] = [a_1 b] + \lambda [a_2 b]$  και συνεπώς

$$\begin{aligned} \pi_\phi(a_1 + \lambda a_2)[b] &= \pi_1(a_1 + \lambda a_2)[b] = [(a_1 + \lambda a_2)b] = [a_1 b] + \lambda [a_2 b] \\ &= \pi_\phi(a_1)[b] + \lambda \pi_\phi(a_2)[b] = (\pi_\phi(a_1) + \lambda \pi_\phi(a_2))[b]. \end{aligned}$$

Επίσης

$$\begin{aligned} \pi_\phi(a_1 a_2)[b] &= \pi_1(a_1 a_2)[b] = [(a_1 a_2)b] = [a_1(a_2 b)] \\ &= \pi_\phi(a_1)[a_2 b] = \pi_\phi(a_1)(\pi_\phi(a_2)[b]) = (\pi_\phi(a_1) \pi_\phi(a_2))[b]. \end{aligned}$$

Τέλος, αν  $a \in \mathcal{A}$  και  $[b], [c] \in H_{0\phi}$ ,

$$\begin{aligned} \langle \pi_\phi(a)^*[b], [c] \rangle_\phi &= \langle [b], \pi_\phi(a)[c] \rangle_\phi = \langle [b], [ac] \rangle_\phi \\ &= \phi((ac)^*b) = \phi(c^*a^*b) = \langle [a^*b], [c] \rangle_\phi = \langle \pi_\phi(a^*)[b], [c] \rangle_\phi \end{aligned}$$

και συνεπώς  $\pi_\phi(a)^* = \pi_\phi(a^*)$ .

8. Θέτουμε  $\xi_\phi = [\mathbf{1}_\mathcal{A}]$ . Το  $\xi_\phi$  είναι κυκλικό διάνυσμα για την  $\pi_\phi$  γιατί

$$\pi_\phi(\mathcal{A})\xi_\phi = \{\pi_\phi(a)[\mathbf{1}] : a \in \mathcal{A}\} = \{[a] : a \in \mathcal{A}\} = H_{0\phi}$$

που είναι πυκνός υπόχωρος του  $H_\phi$ . Τέλος, για κάθε  $a \in \mathcal{A}$ ,

$$\begin{aligned} \langle \pi_\phi(a)\xi_\phi, \xi_\phi \rangle_\phi &= \langle \pi_\phi(a)[\mathbf{1}], [\mathbf{1}] \rangle_\phi \\ &= \langle a, \mathbf{1} \rangle_\phi = \phi(\mathbf{1}^*a) = \phi(a). \quad \square \end{aligned}$$

**Πρόταση 3** (“Μοναδικότητα”). Έστω  $\mathcal{A}$  μια  $C^*$  άλγεβρα με μονάδα και  $\phi$  κατάσταση στην  $\mathcal{A}$ . Αν  $(\pi, H, \xi)$  είναι αναπαράσταση με κυκλικό μοναδιαίο διάνυσμα  $\xi$  ώστε

$$\langle \pi(a)\xi, \xi \rangle = \phi(a) \quad \text{για κάθε } a \in \mathcal{A},$$

τότε η  $(\pi, H, \xi)$  είναι unitarily ισοδύναμη με την  $(\pi_\phi, \mathcal{H}_\phi, \xi_\phi)$  μέσω μιας επί ισομετρίας  $U : H_\phi \rightarrow H$  ώστε

$$\pi(a) = U\pi_\phi(a)U^* \quad \text{για κάθε } a \in \mathcal{A}.$$

*Απόδειξη.* Ορίζουμε την απεικόνιση

$$U_0 : \mathcal{A}\xi_\phi \rightarrow \mathcal{A}\xi : \pi_\phi(a)\xi_\phi \rightarrow \pi(a)\xi, \quad a \in \mathcal{A}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} \|\pi(a)\xi\|_H^2 &= \langle \pi(a)\xi, \pi(a)\xi \rangle = \langle \pi(a^*a)\xi, \xi \rangle = \phi(a^*a) = \langle \pi_\phi(a^*a)\xi_\phi, \xi_\phi \rangle = \\ &= \langle \pi_\phi(a)\xi, \pi_\phi(a)\xi \rangle = \|\pi_\phi(a)\xi_\phi\|_{H_\phi}^2. \end{aligned}$$

Επομένως η  $U_0$  είναι καλά ορισμένη απεικόνιση (αν  $\pi(a)\xi = \pi(b)\xi$  τότε  $\pi(a-b)\xi = 0$  άρα  $\pi_\phi(a-b)\xi_\phi = 0$  άρα  $\pi_\phi(a)\xi_\phi = \pi_\phi(b)\xi_\phi$ ) (προφανώς γραμμική και ισομετρική. Επεκτείνεται λοιπόν σε μια γραμμική ισομετρία  $U$  από την κλειστή θήκη  $H_\phi$  του  $(\mathcal{A}\xi_\phi, \|\cdot\|_{H_\phi})$  στην κλειστή θήκη  $H$  του  $(\mathcal{A}\xi, \|\cdot\|_H)$ . Το σύνολο τιμών της περιέχει τον πυκνό υπόχωρο  $\mathcal{A}\xi$  του  $H$  και επομένως η  $U$  είναι επί του  $H$ . Επομένως ο  $U$  είναι αντιστρέψιμος και  $U^{-1} = U^*$ .

Τέλος, για να δείξουμε ότι  $\pi(a) = U\pi_\phi(a)U^*$ , ισοδύναμα  $\pi(a)U = U\pi_\phi(a)$  για κάθε  $a \in \mathcal{A}$ , αρκεί να ελέγξουμε την ισότητα στον πυκνό υπόχωρο  $\mathcal{A}\xi_\phi$ . Έστω λοιπόν  $x = \pi_\phi(b)\xi_\phi \in \mathcal{A}\xi_\phi$ . Τότε

$$\begin{aligned} \pi(a)U(\pi_\phi(b)\xi_\phi) &= \pi(a)(\pi(b)\xi) = \pi(ab)\xi = U(\pi_\phi(ab)\xi_\phi) = U\pi_\phi(a)(\pi_\phi(b)\xi_\phi) \\ \text{δηλαδή } \pi(a)U(x) &= U\pi_\phi(a)(x). \end{aligned}$$

Αφού οι φραγμένοι τελεστές  $\pi(a)U$  και  $U\pi_\phi(a)$  ταυτίζονται στο πυκνό υποσύνολο  $\mathcal{A}\xi_\phi$ , είναι ίσοι:

$$\begin{array}{ccc} H_\phi & \xrightarrow{U} & H \\ \pi_\phi(a) \downarrow & & \downarrow \pi(a) \\ H_\phi & \xrightarrow{U} & H \end{array}$$

**Πόρισμα 4.** Έστω  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(H)$  μια  $C^*$  υπάλγεβρα με  $I \in \mathcal{A}$  και  $\xi \in H$  μοναδιαίο διάνυσμα. Θεωρούμε την κατάσταση  $\phi(A) := \langle A\xi, \xi \rangle$ ,  $A \in \mathcal{A}$ . Τότε η αναπαράσταση GNS  $(\pi_\phi, H_\phi, \xi_\phi)$  είναι unitarily ισοδύναμη με την  $A \rightarrow A|_K$ ,  $A \in \mathcal{A}$  όπου  $K := \overline{\text{span}\{A\xi : A \in \mathcal{A}\}}$ .

(... και μπορώ να επιλέξω τον τελεστή  $U$  που υλοποιεί την ισοδυναμία ώστε  $U\xi_\phi = \xi$ .)

*Απόδειξη.* Ο  $K_0 := \text{span}\{A\xi : A \in \mathcal{A}\}$  είναι προφανώς γραμμικός υπόχωρος του  $H$  και είναι  $\mathcal{A}$ -αναλλοίωτος, αφού  $B(A\xi) = (BA)\xi \in K_0$  για κάθε  $B, A \in \mathcal{A}$ . Συνεπώς και η κλειστή του θήκη  $K$  είναι  $\mathcal{A}$ -αναλλοίωτος υπόχωρος (αν  $x \in K$  και  $B \in \mathcal{A}$ , τότε  $Bx \in K$ : πράγματι για κάθε  $\epsilon > 0$  υπάρχει  $A \in \mathcal{A}$  ώστε  $\|x - A\xi\| < \epsilon$ , οπότε  $\|Bx - BA\xi\| < \epsilon\|B\|$ , άρα  $Bx \in K$  αφού  $BA\xi \in K_0 \subseteq K$ ).

Κατά συνέπεια για κάθε  $A \in \mathcal{A}$  ο τελεστής  $A|_K$  ανήκει στον  $\mathcal{B}(K)$ . Θέτοντας  $\pi(A) := A|_K$ , έχουμε μια  $*$ -αναπαράσταση  $\pi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}(K)$ . Πράγματι, είναι φανερό ότι

$$\begin{aligned} (A_1 + \lambda A_2)|_K &= A_1|_K + \lambda A_2|_K \\ \text{δηλαδή } \pi(A_1 + \lambda A_2) &= \pi(A_1) + \lambda \pi(A_2). \end{aligned}$$

Επίσης, αφού  $A_2(K) \subseteq K$ , αν  $x \in K$  έχουμε  $A_1(A_2x) = A_1|_K(A_2x)$ , δηλαδή  $(A_1A_2)|_K = A_1|_KA_2|_K$  και άρα

$$\pi(A_1A_2) = (A_1A_2)|_K = A_1|_KA_2|_K = \pi(A_1)\pi(A_2).$$

Για να δείξουμε ότι  $(\pi(A))^* = \pi(A^*)$  όταν  $A \in \mathcal{A}$  πρέπει να δείξουμε ότι για κάθε  $x, y \in K$  ισχύει η ισότητα

$$\langle (\pi(A))^*x, y \rangle = \langle \pi(A^*)x, y \rangle \quad \text{δηλαδή} \quad \langle x, \pi(A)y \rangle = \langle \pi(A^*)x, y \rangle.$$

Όμως  $\pi(A)y = Ay$ , άρα  $\langle x, \pi(A)y \rangle = \langle x, Ay \rangle = \langle A^*x, y \rangle$ . Επίσης, επειδή  $A^* \in \mathcal{A}$ , έχουμε  $\pi(A^*)x = A^*x$  οπότε  $\langle \pi(A^*)x, y \rangle = \langle A^*x, y \rangle$  και η ζητούμενη ισότητα αποδείχθηκε.

Η τριάδα  $(\pi, K, \xi)$  ικανοποιεί την σχέση  $\phi(A) = \langle A\xi, \xi \rangle$ ,  $A \in \mathcal{A}$ , οπότε το συμπέρασμα έπεται από την προηγούμενη Πρόταση.