

## Καθαρές καταστάσεις και ανάγωγες αναπαραστάσεις

Μια αναπαράσταση  $(\pi, H)$  μιας  $C^*$  άλγεβρας  $\mathcal{A}$  λέγεται **(τοπολογικά) ανάγωγη (topologically irreducible)** αν οι μόνοι κλειστοί αναλλοίωτοι υπόχωροι της  $\pi(\mathcal{A})$  είναι οι τετριμμένοι:  $\{0\}$  και  $H$ .

Θα αποδείξουμε τον ακόλουθο χαρακτηρισμό για τις ανάγωγες αναπαραστάσεις GNS:

**Θεώρημα 1.** Έστω  $\mathcal{A}$  μια  $C^*$  άλγεβρα με μονάδα και  $\phi \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$ .

$H$  αναπαράσταση GNS  $\pi_\phi$  είναι ανάγωγη αν και μόνον αν η  $\phi$  είναι **καθαρή κατάσταση**, δηλαδή ακραίο σημείο του κυρτού συνόλου  $\mathcal{S}(\mathcal{A})$  των καταστάσεων της  $\mathcal{A}$ .

Το Θεώρημα αυτό είναι συνέπεια του κλασικού χαρακτηρισμού των ανάγωγων αναπαραστάσεων:

**Πρόταση 1** (Λήμμα Schur). Μια αναπαράσταση  $(\pi, H)$  μιας  $C^*$  άλγεβρας  $\mathcal{A}$  είναι ανάγωγη αν και μόνον αν οι μόνοι τελεστές που μετατίθενται με την  $\pi(\mathcal{A})$  είναι οι τετριμμένοι: τα πολλαπλάσια του ταυτοτικού τελεστή.

Θα χρειασθεί ένα Λήμμα:

**Λήμμα 1.** Αν  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}(H)$  είναι αυτοσυζυγής αλγεβρα τελεστών και  $P \in \mathcal{B}(H)$  προβολή, ο υπόχωρος  $K := P(H)$  είναι  $\mathcal{B}$ -αναλλοίωτος αν και μόνον αν η  $P$  μετατίθεται με κάθε στοιχείο της  $\mathcal{B}$ .

*Απόδειξη.* Ο υπόχωρος  $K = P(H)$  είναι  $\mathcal{B}$ -αναλλοίωτος αν και μόνον αν  $BP(\xi) \in K$  για κάθε  $B \in \mathcal{B}$  και  $\xi \in H$ , ισοδύναμα αν και μόνον αν  $P(BP(\xi)) = BP(\xi)$  για κάθε  $B \in \mathcal{B}$  και  $\xi \in H$ . Δηλαδή ο  $K$  είναι  $\mathcal{B}$ -αναλλοίωτος αν και μόνον αν  $PBP = BP$  για κάθε  $B \in \mathcal{B}$ .

Αν ο  $K$  είναι  $\mathcal{B}$ -αναλλοίωτος, η σχέση  $PBP = BP$  δίνει (εφαρμόζοντάς την για το  $B^* \in \mathcal{B}$ )  $PB^*P = B^*P$  για κάθε  $B \in \mathcal{B}$ , άρα  $PBP = PB$ , οπότε προκύπτει ότι  $PB = PBP = BP$  για κάθε  $B \in \mathcal{B}$ .

Αν αντίστροφα ισχύει ότι  $PB = BP$  για κάθε  $B \in \mathcal{B}$ , τότε  $PB = P^2B = PBP$ , οπότε ο  $K := P(H)$  είναι  $\mathcal{B}$ -αναλλοίωτος.  $\square$

*Απόδειξη της Πρότασης 1.* Αν η  $\pi$  δεν είναι ανάγωγη, και  $K \subseteq H$  ένας μη τετριμμένος κλειστός  $\pi$ -αναλλοίωτος υπόχωρος, τότε η προβολή  $P$  στον  $K$  μετατίθεται, όπως είδαμε, με την  $\pi(\mathcal{A})$ , και δεν είναι πολλαπλάσιο του ταυτοτικού (αφού  $\{0\} \neq K \neq H$ ).

Αν αντίστροφα υπάρχει τελεστής  $B \in \mathcal{B}(H) \setminus \{\lambda I : \lambda \in \mathbb{C}\}$  που μετατίθεται με την  $\pi(\mathcal{A})$ , τότε υπάρχει αυτοσυζυγής τελεστής  $C \in \mathcal{B}(H)$  που μετατίθεται με την  $\pi(\mathcal{A})$  και δεν είναι πολλαπλάσιο του ταυτοτικού (γιατί οι  $B + B^*$  και  $(B - B^*)/i$  μετατίθεται με την  $\pi(\mathcal{A})$  και δεν μπορεί να είναι και οι δυο πολλαπλάσια του ταυτοτικού). Συνεπώς το φάσμα του  $C$  δεν είναι μονοσύνολο. Αν  $\Omega \subset \sigma(C)$  είναι ένα γνήσιο μη κενό κλειστό υποσύνολο, τότε η  $\chi_\Omega$  είναι μια συνάρτηση Borel στο  $\sigma(C)$  που δεν είναι ούτε 0 ούτε 1. Από τον Συναρτησιακό Λογισμό για συναρτήσεις Borel <sup>1</sup> ξέρουμε ότι ορίζεται ο τελεστής  $P = \chi_\Omega(C) \in \mathcal{B}(H)$  και ότι είναι προβολή (γιατί  $\chi_\Omega = \chi_\Omega^2 = \bar{\chi}_\Omega$ ) και δεν είναι πολλαπλάσιο του ταυτοτικού, επομένως ο  $K = P(H)$  είναι μη τετριμμένος κλειστός υπόχωρος του  $H$ .

*Ισχυρισμός* Ο τελεστής  $\chi_\Omega(C)$  μετατίθεται με την  $\pi(\mathcal{A})$ .

Πράγματι, αφού το  $\Omega$  είναι κλειστό υποσύνολο του  $\sigma(C)$ , υπάρχει (Λήμμα Urysohn) ακολουθία  $(g_n)$  από συνεχείς συναρτήσεις  $g_n : \sigma(C) \rightarrow [0, 1]$  που συγκλίνουν κατά σημείο στην  $\chi_\Omega$ . Αφού κάθε  $g_n(C)$  είναι νορμ-όριο πολυωνύμων του  $C$ , έπεται ότι κάθε  $g_n(C)$  μετατίθεται με την  $\pi(\mathcal{A})$ . Από το Πόρισμα 6 στο `borelfuncalc.pdf` έπεται ότι και ο τελεστής  $\chi_\Omega(C)$  μετατίθεται με την  $\pi(\mathcal{A})$ .

Δηλαδή η προβολή  $P$  μετατίθεται με την  $\pi(\mathcal{A})$ , πράγμα που σημαίνει ότι ο  $K = P(H)$  είναι  $\pi(\mathcal{A})$ -αναλλοίωτος, όπως θέλαμε.  $\square$

Για την απόδειξη του Θεωρήματος, θα χρειασθεί ακόμα ένα Λήμμα.

**Λήμμα 2.** Μια κατάσταση  $\phi$  της  $\mathcal{A}$  είναι καθαρή κατάσταση αν και μόνον αν κάθε θετική γραμμική μορφή  $\psi : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$  με  $\psi \leq \phi$  είναι της μορφής  $\psi = \lambda\phi$  (όπου  $\lambda \in [0, 1]$ ).

<sup>1</sup> Δείτε στο `borelfuncalc.pdf`

*Απόδειξη.* Έστω  $\psi : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$  θετική γραμμική μορφή με  $\psi \leq \phi$ . Υποθέτω ότι η  $\phi$  είναι καθαρή κατάσταση και θα δείξω ότι η  $\psi$  είναι πολλαπλάσιο της  $\phi$ . Αρκεί λοιπόν να εξετάσω την περίπτωση  $\psi \neq 0$  και  $\psi \neq \phi$ . Γράφω  $\lambda = \psi(\mathbf{1})$ , οπότε  $\lambda \in [0, 1]$ . Αφού η  $\psi$  είναι θετική γραμμική μορφή, έχουμε  $\lambda = \psi(\mathbf{1}) = \|\psi\| > 0$ . Άρα αν θέσω  $\phi_1 := \frac{1}{\lambda}\psi$  τότε η  $\phi_1$  είναι κατάσταση της  $\mathcal{A}$ . Επίσης από την  $\psi \leq \phi$  προκύπτει ότι  $1 - \lambda = \phi(\mathbf{1}) - \psi(\mathbf{1}) = \|\phi - \psi\| > 0$ , άρα η  $\phi_2 := \frac{1}{1-\lambda}(\phi - \psi)$  είναι επίσης κατάσταση της  $\mathcal{A}$ .

Η  $\phi$  είναι κυρτός συνδυασμός των  $\phi_1$  και  $\phi_2$ :

$$\phi = \lambda \frac{1}{\lambda} \psi + (1 - \lambda) \frac{1}{1 - \lambda} (\phi - \psi).$$

Επομένως, αν η  $\phi$  είναι καθαρή κατάσταση τότε θα ισχύει  $\phi_1 = \phi_2 = \phi$  δηλαδή  $\psi = \lambda\phi$ .

Αντίστροφα, αν η  $\phi$  είναι γνήσιος κυρτός συνδυασμός δύο διαφορετικών καταστάσεων  $\phi_1$  και  $\phi_2$  της  $\mathcal{A}$ , αν δηλαδή υπάρχει  $\lambda \in (0, 1)$  ώστε  $\phi = \lambda\phi_1 + (1 - \lambda)\phi_2$ , τότε η  $\psi := \lambda\phi_1$  είναι θετική γραμμική μορφή με  $\psi \leq \phi$  και δεν είναι πολλαπλάσιο της  $\phi$ , γιατί αν  $\psi = \mu\phi$  τότε  $\lambda\phi_1 = \mu\phi$  οπότε  $\lambda = \lambda\phi_1(\mathbf{1}) = \mu\phi(\mathbf{1}) = \mu$  άρα  $\phi_1 = \phi$  και  $(1 - \lambda)\phi_2 = \phi - \lambda\phi_1 = (1 - \lambda)\phi_1$  άρα  $\phi_1 = \phi_2$ , άτοπο.  $\square$

*Απόδειξη του Θεωρήματος.* Υποθέτουμε ότι η  $\phi$  είναι καθαρή κατάσταση. Θεωρούμε ένα  $B \in \mathcal{B}(H_\phi)$  με  $0 \leq B \leq I$  που μετατίθεται με την  $\pi_\phi(\mathcal{A})$ . Ορίζουμε

$$\psi : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C} : a \rightarrow \langle \pi_\phi(a) B \xi_\phi, \xi_\phi \rangle.$$

Τότε η  $\psi$  είναι θετική γραμμική μορφή στην  $\mathcal{A}$ , γιατί για κάθε  $a \in \mathcal{A}$

$$\psi(a^*a) = \langle \pi_\phi(a)^* \pi_\phi(a) B \xi_\phi, \xi_\phi \rangle = \langle \pi_\phi(a) B \xi_\phi, \pi_\phi(a) \xi_\phi \rangle = \langle B \pi_\phi(a) \xi_\phi, \pi_\phi(a) \xi_\phi \rangle \geq 0$$

αφού  $B \geq 0$ . Ομοίως  $(\phi - \psi)(a^*a) \geq 0$  για κάθε  $a \in \mathcal{A}$  αφού  $I \geq B$ . Δηλαδή  $0 \leq \psi \leq \phi$ . Αλλά έχουμε υποθέσει ότι το  $\phi$  είναι ακραίο. Επομένως (από το Λήμμα) υπάρχει  $\lambda \in [0, 1]$  ώστε  $\psi = \lambda\phi$ , δηλαδή

$$\langle \pi_\phi(a) B \xi_\phi, \xi_\phi \rangle = \langle \lambda \pi_\phi(a) \xi_\phi, \xi_\phi \rangle$$

για κάθε  $a \in \mathcal{A}$ . Έπεται ότι για κάθε  $a, b \in \mathcal{A}$  έχουμε

$$\begin{aligned} \langle B \pi_\phi(a) \xi_\phi, \pi_\phi(b) \xi_\phi \rangle &= \langle \pi_\phi(b)^* B \pi_\phi(a) \xi_\phi, \xi_\phi \rangle = \langle B \pi_\phi(b^*a) \xi_\phi, \xi_\phi \rangle = \langle \lambda \pi_\phi(b^*a) \xi_\phi, \xi_\phi \rangle \\ &= \langle \lambda \pi_\phi(a) \xi_\phi, \pi_\phi(b) \xi_\phi \rangle. \end{aligned}$$

Όμως ο υπόχωρος  $H_0 := \{\pi(a)\xi_\phi : a \in \mathcal{A}\}$  είναι πυκνός στον  $H_\phi$ , και συνεπώς από την προηγούμενη ισότητα έπεται (λόγω συνέχειας) ότι

$$\langle B\xi, \eta \rangle = \langle \lambda\xi, \eta \rangle$$

για κάθε  $\xi, \eta \in H$ , δηλαδή  $B = \lambda I$ .

Έστω τώρα ένας τελεστής  $C$  που μετατίθεται με την  $\pi_\phi(\mathcal{A})$ . Θεωρώντας εν ανάγκη τον  $C + C^*$  αντί του  $C$  μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο  $C$  είναι αυτοσυζυγής. Τότε το θετικό μέρος  $C_+$  του  $C$  μετατίθεται με την  $\pi_\phi(\mathcal{A})$ , γιατί είναι συνάρτηση του  $C$  (συναρτησιακός λογισμός). Τότε όμως ο  $B := C_+ / \|C_+\|$  μετατίθεται με την  $\pi_\phi(\mathcal{A})$  οπότε, από την προηγούμενη παράγραφο είναι πολλαπλάσιο του ταυτοτικού. Το ίδιο ισχύει για τον  $C_-$ , άρα και ο  $C = C_+ - C_-$  είναι πολλαπλάσιο του ταυτοτικού.

Υποθέτουμε αντίστροφα ότι η  $\pi_\phi$  είναι ανάγωγη αναπαράσταση. Έστω  $\psi$  μια θετική γραμμική μορφή στην  $\mathcal{A}$  με  $\psi \leq \phi$ . Υπάρχει τότε (δες την Πρόταση 2) μοναδικός τελεστής  $B$  με  $0 \leq B \leq I$  που μετατίθεται με την  $\pi_\phi(\mathcal{A})$  ώστε  $\psi(a) = \langle \pi_\phi(a) B \xi_\phi, \xi_\phi \rangle$ . Όμως από την Πρόταση 1, ο  $B$  είναι πολλαπλάσιο του ταυτοτικού,  $B = \lambda I$  όπου  $\lambda \in [0, 1]$  αφού  $0 \leq B \leq I$ . Έπεται λοιπόν ότι  $\psi = \lambda\phi$ , πράγμα που δείχνει ότι η  $\phi$  είναι καθαρή κατάσταση.  $\square$

**Πρόταση 2.** Αν  $\psi$  είναι μια θετική γραμμική μορφή στην  $\mathcal{A}$  με  $\psi \leq \phi$ , τότε υπάρχει μοναδικός τελεστής  $B$  με  $0 \leq B \leq I$  που μετατίθεται με την  $\pi_\phi(\mathcal{A})$  ώστε  $\psi(a) = \langle \pi_\phi(a) B \xi_\phi, \xi_\phi \rangle$  για κάθε  $a \in \mathcal{A}$ .

Απόδειξη. Στον πυκνό υπόχωρο  $H_0 := \{\pi(a)\xi_\phi : a \in \mathcal{A}\}$  του  $H_\phi$  (γράφουμε για συντομία  $\pi$  αντί για  $\pi_\phi$ ) ορίζουμε

$$\langle \pi(a)\xi_\phi, \pi(b)\xi_\phi \rangle_\psi := \psi(b^*a), \quad a, b \in \mathcal{A}.$$

Ισχυρισμός Η  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\psi$  είναι καλά ορισμένη, δηλαδή αν  $\pi(a)\xi_\phi = \pi(a')\xi_\phi$  και  $\pi(b)\xi_\phi = \pi(b')\xi_\phi$  τότε  $\langle \pi(a)\xi_\phi, \pi(b)\xi_\phi \rangle_\psi = \langle \pi(a')\xi_\phi, \pi(b')\xi_\phi \rangle_\psi$ .

Πράγματι: γράφοντας  $c = a - a'$ , έχουμε  $\pi(c)\xi_\phi = 0$  άρα  $\phi(c^*c) = \|\pi(c)\xi_\phi\|^2 = 0$  και συνεπώς  $\psi(c^*c) = 0$  (αφού  $0 \leq \psi \leq \phi$ ). Αφού η  $\psi$  είναι θετική γραμμική μορφή, από την ανισότητα Cauchy-Schwarz έπεται ότι  $\psi(b^*c) = 0$  για κάθε  $b \in \mathcal{A}$ , δηλαδή  $\langle \pi(c)\xi_\phi, \pi(b)\xi_\phi \rangle_\psi = 0$ , άρα  $\langle \pi(a)\xi_\phi, \pi(b)\xi_\phi \rangle_\psi = \langle \pi(a')\xi_\phi, \pi(b)\xi_\phi \rangle_\psi$  για κάθε  $b \in \mathcal{A}$ . Ομοίως,  $\langle \pi(a')\xi_\phi, \pi(b)\xi_\phi \rangle_\psi = \langle \pi(a')\xi_\phi, \pi(b')\xi_\phi \rangle_\psi$ .

Προφανώς η  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\psi$  είναι sesquilinear και επιπλέον

$$|\langle \pi(a)\xi_\phi, \pi(b)\xi_\phi \rangle_\psi|^2 = |\psi(b^*a)|^2 \leq \psi(b^*b)\psi(a^*a) \leq \phi(b^*b)\phi(a^*a) = \|\pi(b)\xi_\phi\|^2 \|\pi(a)\xi_\phi\|^2$$

δηλαδή η  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\psi$  είναι φραγμένη (από 1) στον  $H_0 \times H_0$ . Συνεπώς επεκτείνεται σε μια sesquilinear μορφή  $\langle \cdot, \cdot \rangle_u$  στον  $H_\phi \times H_\phi$  που είναι φραγμένη από 1. Αφού ο  $H_\phi$  είναι χώρος Hilbert, στην  $\langle \cdot, \cdot \rangle_u$  αντιστοιχεί ένας φραγμένος (από 1) τελεστής  $B \in \mathcal{B}(H_\phi)$  ώστε  $\langle x, y \rangle_u = \langle Bx, y \rangle$  για κάθε  $x, y \in H_\phi$  και άρα

$$\langle \pi(a)\xi_\phi, \pi(b)\xi_\phi \rangle_\psi = \langle B\pi(a)\xi_\phi, \pi(b)\xi_\phi \rangle$$

για κάθε  $a, b \in \mathcal{A}$ . Ειδικότερα

$$\psi(a) = \langle \pi(a)\xi_\phi, \xi_\phi \rangle_\psi = \langle B\pi(a)\xi_\phi, \xi_\phi \rangle = \langle \pi(a)B\xi_\phi, \xi_\phi \rangle$$

για κάθε  $a \in \mathcal{A}$ . Εφόσον  $\langle B\pi(a)\xi_\phi, \pi(a)\xi_\phi \rangle = \psi(a^*a) \geq 0$  για κάθε  $a \in \mathcal{A}$ , έπεται ότι  $\langle Bx, x \rangle \geq 0$  για κάθε  $x \in H_\phi$  και επομένως  $B \geq 0$ .

Δείχνουμε ότι ο  $B$  μετατίθεται με την  $\pi_\phi(\mathcal{A})$ : Έστω  $a \in \mathcal{A}$ . Για κάθε  $b, c \in \mathcal{A}$  έχουμε

$$\begin{aligned} \langle (B\pi(a) - \pi(a)B)\pi(b)\xi_\phi, \pi(c)\xi_\phi \rangle &= \langle B\pi(ab)\xi_\phi, \pi(c)\xi_\phi \rangle - \langle \pi(a)B\pi(b)\xi_\phi, \pi(c)\xi_\phi \rangle \\ &= \langle B\pi(ab)\xi_\phi, \pi(c)\xi_\phi \rangle - \langle B\pi(b)\xi_\phi, \pi(a^*c)\xi_\phi \rangle \\ &= \langle \pi(ab)\xi_\phi, \pi(c)\xi_\phi \rangle_\psi - \langle \pi(b)\xi_\phi, \pi(a^*c)\xi_\phi \rangle_\psi \\ &= \langle \pi(ab)\xi_\phi, \pi(c)\xi_\phi \rangle_\psi - \langle \pi(a)\pi(b)\xi_\phi, \pi(c)\xi_\phi \rangle_\psi = 0 \end{aligned}$$

άρα  $\langle (B\pi(a) - \pi(a)B)x, y \rangle = 0$  για κάθε  $x, y \in H_\phi$  λόγω συνέχειας, δηλαδή  $B\pi(a) = \pi(a)B$  για κάθε  $a \in \mathcal{A}$ .

Τέλος, για τη μοναδικότητα παρατηρούμε ότι αν ο  $C \in \mathcal{B}(H_\phi)$  μετατίθεται με την  $\pi_\phi(\mathcal{A})$  και ικανοποιεί  $\psi(a) = \langle \pi(a)C\xi_\phi, \xi_\phi \rangle$  για κάθε  $a \in \mathcal{A}$ , τότε, για κάθε  $a, b \in \mathcal{A}$  έχουμε

$$\begin{aligned} \langle \pi(a^*b)C\xi_\phi, \xi_\phi \rangle &= \langle \pi(a^*b)B\xi_\phi, \xi_\phi \rangle \\ \text{άρα } \langle C\pi(b)\xi_\phi, \pi(a)\xi_\phi \rangle &= \langle B\pi(b)\xi_\phi, \pi(a)\xi_\phi \rangle \\ \text{και άρα } \langle Cx, y \rangle &= \langle Bx, y \rangle \end{aligned}$$

για κάθε  $x, y \in H_\phi$  λόγω συνέχειας, οπότε  $C = B$ .

□