

# Θεώρημα Stinespring

**Θεώρημα 1** (Stinespring). Για κάθε μοναδιαία πλήρως θετική απεικόνιση  $\Phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}(H)$  από μια  $C^*$ -άλγεβρα  $\mathcal{A}$  με μονάδα στον  $\mathcal{B}(H)$  υπάρχει  $(\pi, H_\phi, V)$  όπου  $\pi$  είναι  $*$ -αναπαράσταση της  $\mathcal{A}$  στον χώρο Hilbert  $H_\phi$  και  $V : H \rightarrow H_\phi$  είναι ισομετρία, ώστε

$$\Phi(a) = V^* \pi(a) V \quad \text{για κάθε } a \in \mathcal{A}.$$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \xrightarrow{\Phi} & \mathcal{B}(H) \\ & \searrow \pi & \nearrow \text{ad } V^* \\ & \mathcal{B}(K) & \end{array}$$

## Απόδειξη

1. Για να φτιάξουμε τον χώρο Hilbert  $H_\phi$ , θεωρούμε πρώτα τον γραμμικό χώρο

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \otimes c_{00}(\mathbb{N}) &= c_{00}(\mathbb{N}, \mathcal{A}) = \{\vec{a} : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{A} : \text{supp } \vec{a} \text{ πεπερ.}\} \\ &= \text{span}\{a \otimes e_n : a \in \mathcal{A}, n \in \mathbb{N}\} \end{aligned}$$

όπου

$$(a \otimes e_j)(n) := \begin{cases} a & n = j \\ 0 & n \neq j \end{cases} \quad \text{ή} \quad a \otimes e_j := \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

όπου  $a_n = 0$  όταν  $n \neq j$  και  $a_j = a$ .

Δηλαδή κάθε  $\vec{a} = (a(n)) \in c_{00}(\mathbb{N}, \mathcal{A})$  γράφεται  $\vec{a} = \sum_n a(n) \otimes e_n$ .

Γράφω για συντομία  $\tilde{\mathcal{A}}$  αντί για  $\mathcal{A} \otimes c_{00}(\mathbb{N})$ .<sup>1</sup>

[Όταν  $\mathcal{H} = \mathbb{C}$  έχουμε  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{H} \simeq \mathcal{A}$ .]

2. Σταθεροποιούμε μια ορθοκανονική βάση  $\{\xi_n : n \in \mathbb{N}\}$  του  $H$  και ορίζουμε την απεικόνιση

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_o : \tilde{\mathcal{A}} \times \tilde{\mathcal{A}} \rightarrow \mathbb{C}$$

ως εξής: θέτουμε  $\langle a \otimes e_n, b \otimes e_m \rangle_o := \langle \Phi(b^* a) \xi_n, \xi_m \rangle_H$  και επεκτείνουμε γραμμικά. Δηλαδή

$$\left\langle \sum_n a(n) \otimes e_n, \sum_n b(n) \otimes e_n \right\rangle_o := \sum_{n,m} \langle \Phi(b(m)^* a(n)) \xi_n, \xi_m \rangle_H.$$

Προφανώς η  $\langle \cdot, \cdot \rangle_o$  είναι sesquilinear.

[Όταν  $H = \mathbb{C}$  έχουμε  $\langle a, b \rangle_o = \Phi(b^* a)$ .]

---

<sup>1</sup> Αν ο  $H$  έχει ορθοκανονική βάση  $\{\xi_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$  χρησιμοποιούμε τον  $c_{00}(\Gamma, \mathcal{A})$  αντί του  $c_{00}(\mathbb{N}, \mathcal{A})$

3. Χρησιμοποιώντας ότι η  $\Phi$  είναι πλήρως θετική δείχνουμε ότι για κάθε  $\vec{b} = \sum_{n=1}^N b(n) \otimes e_n \in \tilde{\mathcal{A}}$ ,

$$\langle \vec{b}, \vec{b} \rangle_o = \left\langle \sum_{n=1}^N b(n) \otimes e_n, \sum_{m=1}^N b(m) \otimes e_m \right\rangle_o \geq 0.$$

Πράγματι αν  $X := [b(m)^* b(n)] \in M_N(\mathcal{A})$ , έχουμε  $[\Phi(b(m)^* b(n))] = \Phi_N(X) \in \mathcal{B}(H^N)$  και

$$\langle \vec{b}, \vec{b} \rangle_o := \sum_{n,m} \langle b(n) \otimes e_n, b(m) \otimes e_m \rangle_o = \sum_{n,m} \langle \Phi(b(m)^* b(n)) \xi_n, \xi_m \rangle_H = \langle \Phi_N(X) \vec{\xi}, \vec{\xi} \rangle_{H^N} \quad (\dagger)$$

όπου  $\vec{\xi} = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N]^\dagger$ . Όμως ο πίνακας  $X$  παραγοντοποιείται

$$X = \begin{bmatrix} b(1)^* & 0 & \dots & 0 \\ b(2)^* & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ b(n)^* & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b(1) & b(2) & \dots & b(n) \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} = B^* B$$

άρα είναι θετικός, οπότε ο  $\Phi_N(X)$  είναι θετικός και άρα  $\langle \Phi_N(X) \vec{\xi}, \vec{\xi} \rangle_{H^N} \geq 0$ .

Άρα το  $\langle \cdot, \cdot \rangle_o$  είναι ημισεωτικό γινόμενο.

Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz  $|\langle \vec{u}, \vec{a} \rangle_o|^2 \leq \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle_o \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle_o$  έπεται ότι

$$\{\vec{u} \in \tilde{\mathcal{A}} : \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle_o = 0\} = \{\vec{u} \in \tilde{\mathcal{A}} : \langle \vec{u}, \vec{a} \rangle_o = 0 \ \forall \vec{a} \in \tilde{\mathcal{A}}\}$$

και συνεπώς το σύνολο

$$\mathcal{N}_\phi = \mathcal{N} := \{\vec{u} \in \tilde{\mathcal{A}} : \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle_o = 0\}$$

είναι γραμμικός χώρος.

4. Θέτουμε  $H_{0\phi} := (\mathcal{A} \otimes c_{00}(\mathbb{N})) / \mathcal{N} = \tilde{\mathcal{A}} / \mathcal{N}$ . Ο χώρος  $H_{0\phi}$  εφοδιάζεται με το εσωτερικό γινόμενο  $\langle [\vec{a}], [\vec{b}] \rangle_\phi := \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle_o$  (όπου γράφουμε  $[\vec{a}] = \vec{a} + \mathcal{N}$ ,  $\vec{a} \in \tilde{\mathcal{A}}$ ). Ονομάζουμε  $H_\phi$  την πλήρωση του  $H_{0\phi}$  ως προς τη νόρμα  $\|[\vec{a}]\|_\phi := \sqrt{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle_o}$ .

5. Η άλγεβρα  $\mathcal{A}$  δρα στον γραμμικό χώρο  $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \otimes c_{00}(\mathbb{N})$  ως εξής:

$$\pi_0(a)(b \otimes e_j) := ab \otimes e_j \quad (a, b \in \mathcal{A}, j \in \mathbb{N})$$

$$\text{δηλαδή } \pi_0(a) \left( \sum_n b(n) \otimes e_n \right) := \sum_n ab(n) \otimes e_n \quad (a \in \mathcal{A}, \vec{b} = \sum_n b(n) \otimes e_n \in \tilde{\mathcal{A}}.)$$

*Ισχυρισμός.* Για κάθε  $a \in \mathcal{A}$  και  $\vec{b} \in \tilde{\mathcal{A}}$  έχουμε

$$\langle \pi_0(a) \vec{b}, \pi_0(a) \vec{b} \rangle_o \leq \|a^* a\| \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle_o.$$

Απόδειξη Ισχυρισμού. Έχουμε

$$\begin{aligned}
\langle \pi_0(a)\vec{b}, \pi_0(a)\vec{b} \rangle_o &= \sum_{n,m} \langle ab(n) \otimes e_n, ab(m) \otimes e_m \rangle_o \\
&= \sum_{n,m} \langle \Phi((ab(m))^*(ab(n)))\xi_n, \xi_m \rangle_H \\
&= \sum_{n,m} \langle \Phi(b(m)^* a^* ab(n))\xi_n, \xi_m \rangle_H = \langle \Phi_N(Y)\vec{\xi}, \vec{\xi} \rangle_{H^N} \quad (*)
\end{aligned}$$

όπου  $Y = [b(m)^* a^* ab(n)] \in M_N(\mathcal{A})$ , οπότε  $[\Phi(b(m)^* a^* ab(n))] = \Phi_N(Y) \in \mathcal{B}(H^N)$ .

Ο πίνακας  $Y$  παραγοντοποιείται

$$Y = \begin{bmatrix} b(1)^* & 0 & \dots & 0 \\ b(2)^* & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ b(n)^* & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^*a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a^*a & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a^*a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b(1) & b(2) & \dots & b(n) \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} := B^*CB.$$

Παρατηρούμε ότι  $Y \leq \|C\| B^*B$ .

Πράγματι, αν θεωρήσουμε ότι η  $C^*$  άλγεβρα  $M_N(\mathcal{A})$  αποτελείται από τελεστές που δρουν σ' έναν χώρο Hilbert  $K$ , για κάθε  $x \in K$  έχουμε

$$\langle B^*CBx, x \rangle = \langle CBx, Bx \rangle \leq \|C\| \|Bx\|^2 = \|C\| \langle B^*Bx, x \rangle = \langle (\|C\| B^*B)x, x \rangle.$$

Επομένως, εφαρμόζοντας στην ανισότητα  $Y \leq \|C\| B^*B$  την θετική απεικόνιση  $\Phi_N$ , προκύπτει ότι

$$\Phi_N(Y) \leq \|C\| \Phi_N(B^*B).$$

Όμως  $C = \text{diag}(a^*a)$  και συνεπώς  $\|C\| = \|a^*a\| = \|a\|^2$ . Αντικαθιστώντας λοιπόν στην (\*) έχουμε τελικά

$$\begin{aligned}
\langle \pi_0(a)\vec{b}, \pi_0(a)\vec{b} \rangle_o &= \langle \Phi_N(Y)\vec{\xi}, \vec{\xi} \rangle_{H^N} \leq \langle \|C\| \Phi_N(B^*B)\vec{\xi}, \vec{\xi} \rangle_{H^N} \\
&= \|a\|^2 \langle \Phi_N(B^*B)\vec{\xi}, \vec{\xi} \rangle_{H^N} \stackrel{(\dagger)}{=} \|a\|^2 \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle_o
\end{aligned}$$

και ο Ισχυρισμός αποδείχθηκε.

6. Από τον ισχυρισμό έπεται ότι  $\pi_0(a)(\mathcal{N}) \subseteq \mathcal{N}$  για κάθε  $a \in \mathcal{A}$   
(αν  $\vec{u} \in \mathcal{N}$  τότε  $0 \leq \langle \pi_0(a)\vec{u}, \pi_0(a)\vec{u} \rangle_o \leq \|a^*a\| \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle_o = 0$ . Επομένως ο τελεστής  $\pi_0(a)$  επάγει καλά ορισμένη γραμμική απεικόνιση  $\pi_1(a)$  στον χώρο πηλίκου  $H_{o\phi} = \tilde{\mathcal{A}}/\mathcal{N}$ :

$$\pi_1(a)[b \otimes e_j] = [ab \otimes e_j].$$

7. Πάλι από τον Ισχυρισμό έπεται ότι  $\|\pi_1(a)([\vec{b}])\|_\phi \leq \|a\| \|\vec{b}\|_\phi$  για κάθε  $a \in \mathcal{A}$  και  $\vec{b} \in \tilde{\mathcal{A}}$ .  
[Όταν  $\mathcal{A} = C(X)$ ,  $\|ab\|_2 \leq \|a\|_\infty \|b\|_2$ .]

Πράγματι,

$$\|\pi_1(a)([\vec{b}])\|_\phi = \|\pi_0(a)\vec{b}\|_o \leq \|a\| \|\vec{b}\|_o = \|a\| \|\vec{b}\|_\phi.$$

Έπεται ότι ο  $\pi_1(a)$  επεκτείνεται σε φραγμένο τελεστή  $\pi_\phi(a)$  στον  $H_\phi$ .

Έτσι ορίζεται μια απεικόνιση

$$\pi_\phi : a \rightarrow \pi_\phi(a) : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}(H_\phi).$$

Δείχνουμε ότι η  $\pi_\phi$  είναι \*-αναπαράσταση:

(α) Έστω  $a, a' \in \mathcal{A}$  και  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Αν  $b \in \mathcal{A}$  και  $n \in \mathbb{N}$ , έχουμε

$$\begin{aligned} \pi_\phi(a + \lambda a')[b \otimes e_n] &= \pi_1(a + \lambda a')[b \otimes e_n] = [(a + \lambda a')b] \otimes e_n \\ &= [(ab + \lambda a'b) \otimes e_n] = [ab \otimes e_n] + \lambda[a'b \otimes e_n] \\ &= \pi_\phi(a)[b \otimes e_n] + \lambda\pi_\phi(a')[b \otimes e_n] \end{aligned}$$

Επομένως έχουμε

$$\pi_\phi(a + \lambda a')[\vec{b}] = (\pi_\phi(a) + \lambda\pi_\phi(a'))[\vec{b}]$$

για κάθε  $[\vec{b}] \in \tilde{\mathcal{A}}/\mathcal{N} = H_{0\phi}$  λόγω γραμμικότητας των  $\pi_\phi(a + \lambda a')$  και  $\pi_\phi(a) + \lambda\pi_\phi(a')$  και άρα, αφού οι τελεστές αυτοί είναι συνεχείς και ο  $H_{0\phi}$  είναι πυκνός στον  $H_\phi$ ,

$$\pi_\phi(a + \lambda a') = \pi_\phi(a) + \lambda\pi_\phi(a').$$

(β) Ομοίως, για να δείξουμε ότι

$$\pi_\phi(aa') = \pi_\phi(a)\pi_\phi(a')$$

αρκεί να ελέγξουμε την ισότητα

$$\pi_\phi(aa')[b \otimes e_n] = \pi_\phi(a)(\pi_\phi(a')[b \otimes e_n])$$

για κάθε  $b \in \mathcal{A}$  και  $n \in \mathbb{N}$ , η οποία ισχύει γιατί

$$\pi_\phi(aa')[b \otimes e_n] = [(aa')b \otimes e_n] = [a(a'b) \otimes e_n] = \pi_\phi(a)[(a'b) \otimes e_n] = \pi_\phi(a)\pi_\phi(a')[b \otimes e_n].$$

(γ) Δείχνουμε τέλος ότι  $(\pi_\phi(a))^* = \pi_\phi(a^*)$ . Αν  $b, c \in \mathcal{A}$  και  $n, m \in \mathbb{N}$ , έχουμε

$$\begin{aligned} \langle (\pi_\phi(a))^*[b \otimes e_n], [c \otimes e_m] \rangle_\phi &= \langle [b \otimes e_n], \pi_\phi(a)[c \otimes e_m] \rangle_\phi = \langle [b \otimes e_n], [ac \otimes e_m] \rangle_\phi \\ &= \langle b \otimes e_n, ac \otimes e_m \rangle_o \\ &= \langle \Phi((ac)^*b)\xi_n, \xi_m \rangle_H = \langle \Phi(c^*(a^*b))\xi_n, \xi_m \rangle_H \\ &= \langle (a^*b) \otimes e_n, c \otimes e_m \rangle_o = \langle [a^*b \otimes e_n], [c \otimes e_m] \rangle_\phi \\ &= \langle \pi_\phi(a^*)[b \otimes e_n], [c \otimes e_m] \rangle_\phi \end{aligned}$$

Από τη γραμμικότητα των  $(\pi_\phi(a))^*$  και  $\pi_\phi(a^*)$  έπεται ότι για κάθε  $[\vec{b}], [\vec{c}] \in \tilde{\mathcal{A}}/\mathcal{N} = H_{0\phi}$  θα έχουμε

$$\langle (\pi_\phi(a))^*[\vec{b}], [\vec{c}] \rangle_\phi = \langle \pi_\phi(a^*)[\vec{b}], [\vec{c}] \rangle_\phi$$

και επομένως, λόγω συνέχειας των τελεστών αυτών έπεται ότι θα ταυτίζονται και στον  $H_\phi$ .

8. Αν  $H_0 = \text{span}\{\xi_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq H$  ορίζουμε

$$V : H_0 \rightarrow \tilde{\mathcal{A}} \rightarrow H_\phi : \xi_n \rightarrow \mathbf{1}_{\mathcal{A}} \otimes e_n \rightarrow [\mathbf{1}_{\mathcal{A}} \otimes e_n]$$

και επεκτείνουμε γραμμικά. Δηλαδή

$$V \left( \sum_{n=1}^N \lambda_n \xi_n \right) = \sum_{n=1}^N \lambda_n [\mathbf{1} \otimes e_n] \quad (\lambda_n \in \mathbb{C}, N \in \mathbb{N}).$$

Για κάθε  $\xi = \sum_{n=1}^N \lambda_n \xi_n \in H_0$  έχουμε

$$\begin{aligned} \|V\xi\|_{H_\phi}^2 &= \left\langle \sum_n \lambda_n [\mathbf{1} \otimes e_n], \sum_m \lambda_m [\mathbf{1} \otimes e_m] \right\rangle_\phi \\ &= \sum_{n,m} \lambda_n \overline{\lambda_m} \langle [\mathbf{1} \otimes e_n], [\mathbf{1} \otimes e_m] \rangle_\phi \\ &= \sum_{n,m} \lambda_n \overline{\lambda_m} \langle \Phi(\mathbf{1}^* \mathbf{1}) \xi_n, \xi_m \rangle_H = \sum_{n,m} \lambda_n \overline{\lambda_m} \langle \xi_n, \xi_m \rangle_H \\ &= \sum_n |\lambda_n|^2 = \|\xi\|_H^2 \end{aligned}$$

δηλαδή η  $V$  είναι ισομετρία, άρα επεκτείνεται σε ισομετρία  $V : H \rightarrow H_\phi$ . Τέλος, για κάθε  $n, m \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} \langle (V^* \pi(a) V) \xi_n, \xi_m \rangle_H &= \langle \pi(a) V \xi_n, V \xi_m \rangle_{H_\phi} = \langle \pi(a) [\mathbf{1} \otimes e_n], [\mathbf{1} \otimes e_m] \rangle_{H_\phi} \\ &= \langle [a \otimes e_n], [\mathbf{1} \otimes e_m] \rangle_{H_\phi} = \langle \Phi(\mathbf{1}^* a) \xi_n, \xi_m \rangle_H \\ \text{άρα } \langle (V^* \pi(a) V) \xi, \eta \rangle_H &= \langle \Phi(\mathbf{1}^* a) \xi, \eta \rangle_H \quad \text{για κάθε } \xi, \eta \in H_0 \end{aligned}$$

λόγω γραμμικότητας. Δηλαδή οι φραγμένοι τελεστές  $V^* \pi(a) V$  και  $\Phi(a)$  ταυτίζονται σε ένα πυκνό υποσύνολο του χώρου  $H$  και συνεπώς

$$V^* \pi(a) V = \Phi(a). \quad \square$$