

Καλώς ήρθατε στη Θεωρία Τελεστών!
Εισαγωγή στις C^* άλγεβρες

A. Κατάβολος

Εαρινό Εξάμηνο 2017-18

Οι διαφάνειες/σημειώσεις που ακολουθούν αποτελούν συμπληρωμένη έκδοση του μεταπτυχιακού μαθήματος που διδάχθηκε το εαρινό εξάμηνο του ακαδ. έτους 2017-18 στο Τμήμα Μαθηματικών του Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών.

Μετά από μια υπενθύμιση προπτυχιακών γνώσεων, ακολουθεί μια παρουσίαση της βασικής θεωρίας των C^* αλγεβρών, μεταθετικών και μη, μέχρι το θεώρημα διαστολής του Stinespring.

Έγινε προσπάθεια οι σημειώσεις αυτές να μπορούν να χρησιμεύσουν για μια πληρέστερη μελέτη, και όχι μόνον για μια σύντομη επισκόπηση του θέματος (ως διαφάνειες διαλέξεων). Έτσι, όπου κρίθηκε αναγκαίο υπάρχουν σύνδεσμοι προς συνημμένα αρχεία με πλήρεις αποδείξεις των θεμάτων που παρουσιάζονται στις διαφάνειες.¹

¹Όλα τα αρχεία βρίσκονται στο `telmet18.zip`

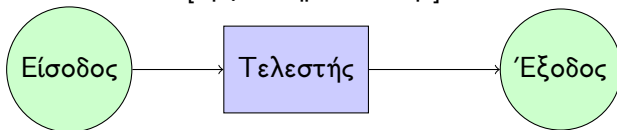
Περιεχόμενα

- 1 Εισαγωγικά
- 2 Γραμμικοί χώροι
- 3 Γραμμικοί χώροι με νόρμα, χώροι Hilbert
 - Ορθοκανονικές Βάσεις. Ισομορφισμοί
 - Η πλήρωση
- 4 Φραγμένοι τελεστές
 - Ο συζυγής τελεστής, ορισμός C^* -άλγεβρας
 - Παραδείγματα τελεστών
- 5 C^* άλγεβρες και αναπαραστάσεις
- 6 Το φάσμα
- 7 Ο συναρτησιακός λογισμός
- 8 Ο θετικός κώνος μιας C^* άλγεβρας

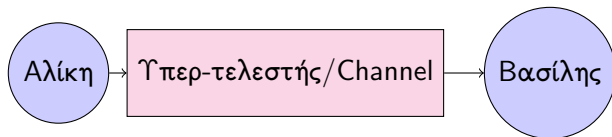
- 9 Θετικές γραμμικές μορφές και αναπαραστάσεις
 - Η Αναπαράσταση GNS
- 10 Ευθέα αθροίσματα
- 11 Η καθολική αναπαράσταση
- 12 Μεταθετικές C^* -άλγεβρες
- 13 Το Φασματικό Θεώρημα
 - Συναρτήσεις Borel φυσιολογικού τελεστή
- 14 Καθαρές καταστάσεις και ανάγωγες αναπαραστάσεις
- 15 Πλήρως θετικές απεικονίσεις
 - Πίνακες σε μια C^* άλγεβρα
 - Πλήρως θετικές απεικονίσεις, Θεώρημα Stinespring

Δύο εργαστήρια: Εργαστήριο Αλίκης, Εργαστήριο Βασίλη.

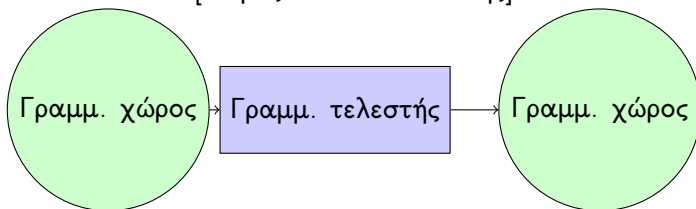
[Εργαστήριο Αλίκης]



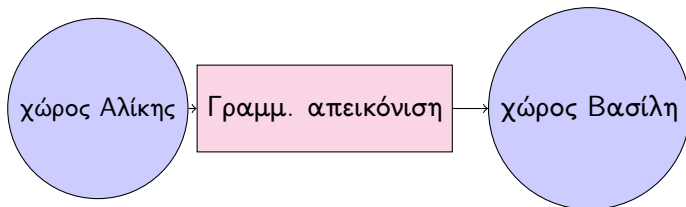
Μετάδοση Πληροφοριών



[Χώρος Τελεστών Αλίκης]



[Απεικόνιση μεταξύ χώρων τελεστών Αλίκης \rightarrow Βασίλη]



Γουατ ιζ αν Οπερέιτωρ;

Παράδειγμα 1. $T : f \rightarrow a_1 f + a_2 f' + a_3 f''$: διαφορικός τελεστής (εδώ a_i «καλές» συναρτήσεις σε κάποιο $\Omega \subseteq \mathbb{R}$).

Πού ορίζεται; Στον χώρο $C_2(\Omega)$. Πού παίρνει τιμές; Στον χώρο $C(\Omega)$: Γραμμικοί χώροι, γραμμική απεικόνιση.

Παράδειγμα 2. $T : \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \rightarrow [a_{i,j}] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (x_i \in \mathbb{C}, [a_{i,j}] \in M_n(\mathbb{C}))$

Παράδειγμα 3. $T : f \rightarrow (Tf)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(x-y)f(y)dy$:

ολοκληρωτικός τελεστής

(εδώ g «καλή» συνάρτηση, 2π -περιοδική)

Παρατήρηση: Αν $f_n(x) = e^{inx}$ βρίσκω $Tf_n = \hat{g}(n)f_n$ ($n \in \mathbb{Z}$),

$$\text{δηλαδή } T : \begin{bmatrix} \vdots \\ f_{-1} \\ f_0 \\ f_1 \\ \vdots \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \dots & \hat{g}(-1) & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & \hat{g}(0) & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & \hat{g}(1) & \dots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ f_{-1} \\ f_0 \\ f_1 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Ο T **διαγωνοποιήθηκε!** ... Ως προς την $\{f_n : n \in \mathbb{Z}\}$. Είναι γραμμ. ανεξάρτητα. Γιατί; Γιατί είναι **ορθοκανονικά**. Άρα είναι βάση του χώρου που παράγουν. Ο χώρος αυτός δεν είναι πλήρης, είναι όμως πυκνός στους χώρους που ενδιαφέρουν στην Ανάλυση...

Γραμμικοί χώροι

\mathbb{K} είναι το σώμα \mathbb{R} ή \mathbb{C} .

Ορισμός

Ένα $X \neq \emptyset$ λέγεται **\mathbb{K} -γραμμικός χώρος** αν είναι εφοδιασμένο με δύο πράξεις $+: X \times X \rightarrow X$ και $\cdot: \mathbb{K} \times X \rightarrow X$ ώστε

(I) **Αξιώματα της πρόσθεσης:** $\forall x, y, z \in X$,

(i) $x + y = y + x$.

(ii) $x + (y + z) = (x + y) + z$.

(iii) $\exists \vec{0} \in X$ ώστε $\forall x \in X, \vec{0} + x = x$.

(iv) $\forall x \in X \exists (-x) \in X$ ώστε $x + (-x) = \vec{0}$.

(II) **Αξιώματα του πολλαπλασιασμού:** $\forall x, y \in X$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$,

(i) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$.

(ii) $1x = x$.

(iii) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$.

(iv) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$.

Παραδείγματα Γραμμικών Χώρων

- Το \mathbb{C} .
- Αν $n \in \mathbb{N}$, ο \mathbb{C}^n που αποτελείται από όλες τις n -αδες μιγαδικών αριθμών,

$$\vec{x} = (x(1), x(2), \dots, x(n))$$

με πράξεις κατά συντεταγμένη. Γράφουμε καμμιά φορά τα στοιχεία του \mathbb{C}^n ως διανύσματα-στήλες (column vectors).

$$\begin{bmatrix} x(1) \\ \vdots \\ x(n) \end{bmatrix} = [x(1), \dots, x(n)]^T.$$

(το σύμβολο T σημαίνει «ανάστροφος» (transpose)).

Παραδείγματα Γραμμικών Χώρων II

- Ο χώρος

$$c_{00} = c_{00}(\mathbb{N}) := \{x = (x(n)) : x(n) \in \mathbb{C} \text{ τ.ω. } \exists n_x \in \mathbb{N} \text{ με } x(n) = 0 \forall n > n_x\}$$

με πράξεις κατά συντεταγμένη.

Έστω $e_m = (\delta_m(n))$ όπου $\delta_m(n) = 1$ όταν $n = m$ και $\delta_m(n) = 0$ αλλιώς. Η (άπειρη) οικογένεια $\{e_m : m \in \mathbb{N}\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητη και παράγει τον c_{00} : κάθε $x = x(n) \in c_{00}$ γράφεται (μοναδικά) ως γραμμικός συνδυασμός $x = \sum_{m=1}^{n_x} x(m)e_m$.

Δηλαδή η $\{e_m : m \in \mathbb{N}\}$ είναι (αλγεβρική ή Hamel) βάση του c_{00} .

Παρατηρούμε ότι ο c_{00} είναι ο χώρος όλων των συναρτήσεων $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ τω οποίων ο φορέας $\text{supp } x := \{n \in \mathbb{N} : x(n) \neq 0\}$ είναι πεπερασμένο σύνολο (περιέχεται στο $\{1, 2, \dots, n_x\}$).

Παραδείγματα Γραμμικών Χώρων III

- Το σύνολο \mathcal{S} όλων των ακολουθιών πραγμ. ή μιγ. αριθμών γίνεται γραμμικός χώρος αν ορίσουμε πρόσθεση και πολλαπλασιασμό κατά συντεταγμένη:

$$x + y = (\xi(k) + \eta(k)) \quad , \quad \lambda x = (\lambda \xi(k))$$

για $x = (\xi(k))$, $y = (\eta(k))$ και $\lambda \in \mathbb{K}$.

- Αν $A \neq \emptyset$ και \mathbb{K}^A είναι το σύνολο όλων των συναρτήσεων $f : A \rightarrow \mathbb{K}$, τότε το \mathbb{K}^A γίνεται γραμμικός χώρος αν ορίσουμε πρόσθεση και πολλαπλασιασμό κατά σημείο:
αν $f, g \in \mathbb{K}^A$ και $\lambda \in \mathbb{K}$, ορίζουμε $f + g$, $\lambda f \in \mathbb{K}^A$ θέτοντας

$$(f + g)(t) = f(t) + g(t) \quad , \quad (\lambda f)(t) = \lambda f(t) \quad , \quad t \in A.$$

(Πρτρ: $\mathcal{S} = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$).

Παραδείγματα Γραμμικών Χώρων IV

- Ο χώρος $\mathcal{L}^1[0,1]$ των Lebesgue-ολοκληρώσιμων συναρτήσεων $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{C}$.

Κάθε συνάρτηση $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{C}$ γράφεται μοναδικά $f = u + iv$ όπου $u(t) := \frac{1}{2}(f(t) + \overline{f(t)})$, $v(t) := \frac{1}{2i}(f(t) - \overline{f(t)})$ (παίρνουν πραγματικές τιμές). Η f λέγεται (Lebesgue)-ολοκληρώσιμη όταν οι u και v είναι Lebesgue-ολοκληρώσιμες, και τότε ορίζουμε

$$\int f(t) d\lambda(t) := \int u(t) d\lambda(t) + i \int v(t) d\lambda(t),$$

Ο $\mathcal{L}^1[0,1]$ είναι γραμμ. χώρος (πράξεις κατά σημείο) λόγω της γραμμικότητας του ολοκληρώματος.

- Ο χώρος $\ell^2 = \ell^2(\mathbb{N})$ αποτελείται από όλες τις ακολουθίες μιγ. αριθμών (= συναρτήσεις $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$) που είναι τετραγωνικά αθροίσιμες, δηλ. $\sum_n |x(n)|^2 < \infty$. Είναι γραμμ. χώρος (πράξεις κατά συντεταγμένη). Γιατί;

Παρατήρηση - Άσκηση Κάθε γραμμικός χώρος «είναι» ένας χώρος συναρτήσεων σε κάποιο σύνολο.

Ορισμός

Έστω E, F (πραγματικοί ή μιγαδικοί) γραμμικοί (:διανυσματικοί) χώροι. Μια απεικόνιση $T : E \mapsto F$ λέγεται γραμμική αν

$$\forall x, y \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K} : T(x + \lambda y) = T(x) + \lambda T(y).$$

Μια γραμμική απεικόνιση λέγεται (γραμμικός) ισομορφισμός αν επι πλέον είναι 1-1 και επί.

Δυο γραμμικοί χώροι E, F λέγονται ισόμορφοι αν υπάρχει ισομορφισμός $T : E \mapsto F$.

Γραμμικοί χώροι με νόρμα

Νόρμα σε έναν γραμμ. χώρο X είναι μια απεικόνιση

$\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}_+$ ώστε για κάθε $x, y \in X$ και $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\|\cdot\| \quad \mathbb{N} \quad \|x\| = 0 \text{ αν και μόνο αν } x = 0,$$

$$\|\cdot\| \quad \mathbb{N} \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \text{ και}$$

$$\|\cdot\| \quad \mathbb{N} \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \text{ (τριγωνική ανισότητα).}$$

Ορισμός

Αν $\|\cdot\|$ είναι μια νόρμα στον X , τότε το ζεύγος $(X, \|\cdot\|)$ λέγεται **χώρος με νόρμα**.

Η συνάρτηση $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ με $d(x, y) = \|x - y\|$, $x, y \in X$ είναι μετρική (η μετρική που επάγεται στον X από τη νόρμα του). Όταν ο μετρ. χώρος (X, d) είναι πλήρης, ο $(X, \|\cdot\|)$ λέγεται **χώρος Banach**.

Γραμμικοί χώροι με νόρμα

Αν $(X, \|\cdot\|)$ είναι χώρος με νόρμα και $x_n, x \in X$, τότε $x_n \rightarrow x$ σημαίνει $\|x_n - x\| \rightarrow 0$.

Παρατήρηση Πολύ συχνά στις εφαρμογές, η νόρμα (ή η μετρική) προσδιορίζεται από την σύγκλιση που μελετάμε. Για παράδειγμα, η νόρμα supremum στον $C([a, b])$ (δες πιο κάτω) εκφράζει την **ομοιόμορφη σύγκλιση** μιας ακολουθίας (f_n) συνεχών συναρτήσεων:

$$\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0 \iff f_n \rightarrow f \text{ ομοιόμορφα στο } [a, b].$$

Χώροι με εσωτερικό γινόμενο

Ορισμός

Έστω E ένας \mathbb{K} -γραμμικός χώρος ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ή \mathbb{C}). Ένα **εσωτερικό γινόμενο** (*inner product ή scalar product*) στον E είναι μια απεικόνιση

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{K}$$

τέτοια ώστε

$$(i) \quad \langle x_1 + \lambda x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \lambda \langle x_2, y \rangle$$

$$(ii) \quad \overline{\langle x, y \rangle} = \langle y, x \rangle$$

$$(iii) \quad \langle x, x \rangle \geq 0$$

$$(iv) \quad \langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$$

για κάθε $x, x_1, x_2, y \in E$ και $\lambda \in \mathbb{K}$.

$$\text{άρα} \quad (i)' \quad \langle x, y_1 + \lambda y_2 \rangle = \langle x, y_1 \rangle + \bar{\lambda} \langle x, y_2 \rangle.$$

Χώροι με εσωτερικό γινόμενο

Πρόταση (Ανισότητα Cauchy-Schwarz)

Αν E είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο,

(α) για κάθε $x, y \in E$ ισχύει

$$|\langle x, y \rangle| \leq \langle x, x \rangle^{1/2} \langle y, y \rangle^{1/2}.$$

(β) Ισότητα ισχύει αν και μόνον αν τα x, y είναι γραμμικά εξαρτημένα.

Πρόταση

Αν E είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο, η απεικόνιση

$\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ όπου $\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}$ είναι νόρμα στον E .

Ορισμός

Ένας χώρος $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ με εσωτερικό γινόμενο λέγεται **χώρος Hilbert** αν είναι πλήρης ως προς την μετρική που ορίζει το εσωτερικό γινόμενο.

Χώροι Hilbert

Παραδείγματα (α) Ο χώρος \mathbb{K}^n , με το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x(k) \overline{y(k)}$, είναι βέβαια χώρος Hilbert. Είναι επίσης πλήρης ως προς την νόρμα $\|\cdot\|_\infty$, αλλά **δεν είναι** χώρος Hilbert ως προς αυτήν (γιατί δεν ικανοποιείται ο κανόνας του παραλληλογράμμου), μολονότι οι δυο νόρμες είναι ισοδύναμες.

(b) Ο χώρος ℓ^2 , με το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x(k) \overline{y(k)}$, είναι χώρος Hilbert, και ο χώρος c_{00} των ακολουθιών με πεπερασμένο φορέα είναι πυκνός υπόχωρος του. Επομένως ο χώρος $(c_{00}, \|\cdot\|_2)$ είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο αλλά **όχι** Hilbert, εφ' όσον δεν είναι πλήρης.

(c) Ο χώρος $C([a, b])$ **δεν είναι** πλήρης ως προς την νόρμα $\|\cdot\|_2$ που ορίζει το εσωτερικό γινόμενο.

Ο $L^2([a, b])$, ο $L^2(\mathbb{R})$

Έστω (X, \mathcal{S}, μ) χώρος μέτρου (π.χ. $([a, b], \mathcal{B}, \lambda)$).

Ορισμός

Ο χώρος $\mathcal{L}^2(X, \mathcal{S}, \mu) = \mathcal{L}^2(\mu)$ αποτελείται από όλες τις συναρτήσεις $f : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ (ή $f : X \rightarrow \mathbb{C}$) που είναι μετρήσιμες και ικανοποιούν $\int_X |f|^2 d\mu < +\infty$. Ο αριθμός

$\left(\int_X |f|^2 d\mu \right)^{1/2}$ συμβολίζεται $\|f\|_2$.

Θέτω $\mathcal{N} = \{f \in \mathcal{L}^2(\mu) : \|f\|_2 = 0\}$.

Αν $f, g \in \mathcal{L}^2(\mu)$, έχω $f = g$ μ -σ.π. $\iff f - g \in \mathcal{N}$.

Επίσης, ο \mathcal{N} είναι γραμμικός υπόχωρος του \mathcal{L}^2 .

Θέτω $\|f + \mathcal{N}\|_2 := \|f\|_2$. Είναι καλά ορισμένη **νόρμα** στον χώρο πηλίκο

Ορισμός: $L^2(\mu) := \mathcal{L}^2(\mu)/\mathcal{N}$.

Ο $L^2([a, b])$, ο $L^2(\mathbb{R})$

$$L^2(\mu) := \mathcal{L}^2(\mu) / \mathcal{N}.$$

Ο $L^2(\mu)$ αποτελείται από τις κλάσεις ισοδυναμίας συναρτήσεων του $\mathcal{L}^2(\mu)$ modulo ισότητα μ -σ.π.

Θεώρημα (Riesz–Fisher) Ο $L^2(\mu)$ είναι πλήρης (άρα είναι χώρος Hilbert αφού η $\|\cdot\|_2$ προέρχεται από το εσωτ. γινόμενο

$$\langle f + \mathcal{N}, g + \mathcal{N} \rangle = \int_X f(t) \overline{g(t)} d\mu(t).$$

Θεώρημα (πόρισμα π.χ. του Luzin) Ο $C([a, b])$ είναι πυκνός στον $L^2([a, b], \mathcal{B}, \lambda)$ ως προς τη νόρμα $\|\cdot\|_2$, βεβαίως.

Ο $C_c(\mathbb{R})$ είναι πυκνός στον $L^2(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \lambda)$ ως προς τη νόρμα $\|\cdot\|_2$.

Ορθογώνιες διασπάσεις

Θεώρημα (Ύπαρξη καθέτου διανύσματος)

Αν H είναι χώρος Hilbert και M είναι γνήσιος κλειστός υπόχωρος του H τότε υπάρχει $z \in H, z \neq 0$ ώστε $z \perp M$.

Αν A είναι μη κενό υποσύνολο του H , θέτω

$$A^\perp = \{x \in E : \langle x, y \rangle = 0 \text{ για κάθε } y \in A\}.$$

Ο A^\perp είναι πάντα κλειστός γραμμικός υπόχωρος του H .

Θεώρημα (Ορθογώνια διάσπαση)

Αν M είναι κλειστός υπόχωρος ενός χώρου Hilbert H , τότε

$$M \oplus M^\perp = H.$$

Πόρισμα (Ορθή προβολή)

Έστω M κλειστός υπόχωρος ενός χώρου Hilbert H . Η απεικόνιση

$$P_M : H \rightarrow H : y \rightarrow P_M(y)$$

είναι γραμμική και συνεχής.

Θεώρημα (Riesz)

Έστω H χώρος Hilbert. Για κάθε γραμμική και συνεχή $f : H \rightarrow \mathbb{K}$ υπάρχει μοναδικό $x_f \in H$ ώστε

$$f(y) = \langle y, x_f \rangle \quad \text{για κάθε } y \in H$$

(και αντίστροφα).

Ορθοκανονικές Βάσεις

Ορισμός

Έστω E χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Μια οικογένεια $\{e_i : i \in I\} \subseteq E$ λέγεται **ορθοκανονική βάση** του E αν

- (i) είναι ορθοκανονική, (δηλ. $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} \ \forall i, j$) και
- (ii) Η γραμμική θήκη της είναι πυκνός υπόχωρος του E , δηλ. $\text{span}\{e_i : i \in I\} = E$.

Παρατήρηση Σε απειροδιάστατους χώρους, μια ορθοκανονική βάση **δεν είναι συνήθως** αλγεβρική βάση (π.χ. στον ℓ^2).

Σε διαχωρίσιμο χώρο, για κάθε $x \in E$,

$$(ι) \ x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$$

(σύγκλιση ως προς τη νόρμα του E).

$$(ιι) \ \|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2.$$

Τρία πράγματα:

- (1) Ύπαρξη κάθετου διανύσματος
- (2) Συνεχείς γραμμικές μορφές είναι τα εσωτερικά γινόμενα.
- (3) Ύπαρξη ορθοκανονικών βάσεων.

Δείξαμε:

Έστω $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ ορθοκανονική βάση σ' έναν χώρο E με εσωτερικό γινόμενο. Τότε, για κάθε $x \in E$, $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2$.

Άρα η απεικόνιση $(E, \|\cdot\|) \rightarrow (\ell^2, \|\cdot\|_2) : x \rightarrow (\langle x, e_n \rangle)_n$ είναι (γραμμ.) ισομετρική εμφύτευση. Η εικόνα της είναι πυκνή στον ℓ^2 .
(Άρα, ο E έχει μια **πλήρωση** που είναι χώρος Hilbert.)

Θεώρημα

Κάθε απειροδιάστατος διαχωρίσιμος² χώρος Hilbert H είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον ℓ^2 .

Ακριβέστερα, αν επιλέξουμε μια ορθοκανονική βάση $\{x_n\}$ του H , η απεικόνιση

$$U : H \rightarrow \ell^2 : x \rightarrow (\langle x, x_n \rangle)_n$$

απεικονίζει τον H (γραμμικά και) ισομετρικά επί του ℓ^2 .

²Ανάλογο αποτέλεσμα ισχύει και για μη διαχωρίσιμους χώρους.

Ορθοκανονικές βάσεις

Παράδειγμα: μετασχηματισμός Fourier.

Έστω $k \in \mathbb{Z}$ και $f_k(t) = \exp(2\pi ikt)$, $t \in [0, 1]$.

Θεώρημα Η $\{f_k : k \in \mathbb{Z}\}$ είναι ορθοκανονική βάση του $L^2([0, 1])$.

Δηλαδή για κάθε $f \in L^2([0, 1])$, έχουμε

$$f = \sum_{-\infty}^{\infty} \langle f, f_k \rangle f_k \quad \text{και ισχύει} \quad \|f\|_2^2 = \sum_{-\infty}^{\infty} |\langle f, f_k \rangle|^2.$$

Εδώ η πρώτη σειρά συγκλίνει ως προς τη νόρμα του $L^2[0, 1]$.

Γράφουμε

$$\hat{f}(k) = \langle f, f_k \rangle = \int_0^1 f(t) e^{-2\pi ikt} dt \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Δημιουργείται έτσι μια απεικόνιση

$$F : L^2[0, 1] \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}) : f \rightarrow \hat{f}$$

που είναι ισομετρία και επί.

Η πλήρωση ενός χώρου με νόρμα

Πρόταση

Αν $(X, \|\cdot\|)$ είναι χώρος με νόρμα, υπάρχει χώρος Banach $(\tilde{X}, \|\cdot\|)$ και γραμμική και ισομετρική εμφύτευση $\phi : X \rightarrow \tilde{X}$ με πυκνή εικόνα. Ο \tilde{X} είναι «ουσιαστικά μοναδικός», δηλ. αν $(Y, \|\cdot\|)$ είναι χώρος Banach και $\psi : X \rightarrow Y$ γραμμική ισομετρία με πυκνή εικόνα, τότε υπάρχει γραμμική ισομετρία T από τον \tilde{X} επί του Y ώστε $T(\phi(x)) = \psi(x)$ για κάθε $x \in X$. Ο χώρος Banach $(\tilde{X}, \|\cdot\|)$ λέγεται **η πλήρωση** του $(X, \|\cdot\|)$.

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{\phi} & \phi(X) & \hookrightarrow & \tilde{X} = \overline{\phi(X)} \\ \downarrow id & & \downarrow & & \downarrow T \\ X & \xrightarrow{\psi} & \psi(X) & \hookrightarrow & Y = \overline{\psi(X)} \end{array}$$

Η πλήρωση χώρου με εσωτερικό γινόμενο

Πρόταση

Αν $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο, υπάρχει χώρος Hilbert $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ και γραμμική και ισομετρική εμφύτευση $\phi : E \rightarrow H$ με πυκνή εικόνα. Ο H είναι «ουσιαστικά μοναδικός», με την έννοια ότι αν $(K, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ είναι χώρος Hilbert και $\psi : E \rightarrow K$ γραμμική ισομετρία με πυκνή εικόνα, τότε υπάρχει γραμμική ισομετρία T από τον H επί του K ώστε $T(\phi(x)) = \psi(x)$ για κάθε $x \in E$.

Ο χώρος Hilbert $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ λέγεται **η πλήρωση** του $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{\phi} & \phi(E) & \hookrightarrow & H = \overline{\phi(E)} \\ \downarrow id & & \downarrow \text{---} & & \downarrow T \\ E & \xrightarrow{\psi} & \psi(E) & \hookrightarrow & K = \overline{\psi(E)} \end{array}$$

Φραγμένοι τελεστές

Έστω $(E, \|\cdot\|_E)$ και $(F, \|\cdot\|_F)$ χώροι με νόρμα.

Παρατήρηση. Καμμιά γραμμική συνάρτηση (εκτός απ' την 0) δεν είναι φραγμένη με τη συνήθη έννοια σε όλον το χώρο.

Ορισμός

Μία γραμμική απεικόνιση $T : (E, \|\cdot\|_E) \rightarrow (F, \|\cdot\|_F)$ λέγεται *φραγμένη ή φραγμένος τελεστής (bounded operator)* αν

$$\|T\| := \sup\{\|Tx\|_F : x \in E, \|x\|_E \leq 1\} < +\infty.$$

$(\mathcal{B}(E, F), \|\cdot\|)$: ο χώρος των φραγμένων τελεστών.
Είναι χώρος Banach (δηλ. πλήρης) αν $(F, \|\cdot\|_F)$ Banach.

$$\|Tx - Tx'\|_F \stackrel{\text{γρ.}}{=} \|T(x - x')\|_F \stackrel{\text{φρ.}}{\leq} \|T\| \|x - x'\|_E$$

Αν T γραμμική,
φραγμένη \iff συνεχής \iff ομοιόμορφα συνεχής.

Η επόμενη Πρόταση είναι βασικό εργαλείο:

Πρόταση

Έστω $(E, \|\cdot\|_E)$ χώρος με νόρμα, $(F, \|\cdot\|_F)$ χώρος Banach, $D \subseteq E$ πυκνός υπόχωρος και

$$T : D \rightarrow F$$

γραμμική απεικόνιση.

Αν η T είναι συνεχής, τότε (και μόνο τότε) *δέχεται συνεχή επέκταση*

$$\tilde{T} : E \rightarrow F \quad \text{δηλ.} \quad \tilde{T}|_D = T.$$

Η επέκταση \tilde{T} είναι μοναδική (αν υπάρχει) και $\|\tilde{T}\| = \|T\|$.

[Απόδειξη στο αρχείο extend.pdf](#)

Θεώρημα

Αν H_1, H_2 είναι δύο χώροι *Hilbert* και $T : H_1 \rightarrow H_2$ ένας φραγμένος τελεστής, τότε *υπάρχει* ένας μοναδικός φραγμένος τελεστής $T^* : H_2 \rightarrow H_1$ που ικανοποιεί τη σχέση

$$\langle T^* x_2, x_1 \rangle_{H_1} = \langle x_2, T x_1 \rangle_{H_2} \quad \text{για κάθε } x_1 \in H_1, x_2 \in H_2.$$

Ο $T^* : H_2 \rightarrow H_1$ ονομάζεται **ο συζυγής (adjoint)** του T . Είναι φραγμένος τελεστής και $\|T^*\| = \|T\|$.

Παραδείγματα (α) Αν $H_1 = H_2 = \ell^2(n)$ και ο A έχει πίνακα $[a_{ij}]$, δηλ. $a_{ij} = \langle Ae_j, e_i \rangle$, ο A^* είναι ο τελεστής που έχει πίνακα $[b_{ij}]$ όπου $b_{ij} = \overline{a_{ji}}$.

(β) Αν σε κάθε $x \in H$ αντιστοιχίσω τον τελεστή $\tilde{x} : \mathbb{C} \rightarrow H : \lambda \rightarrow \lambda x$ τότε $\tilde{x}^* : H \rightarrow \mathbb{C} : y \rightarrow \langle y, x \rangle$ δηλ. $\tilde{x}^* = f_x$.

Ο συζυγής τελεστής

Προειδοποίηση Ο συζυγής ενός μη φραγμένου τελεστή δεν ορίζεται με τον ίδιο τρόπο.

Πρόταση

Η απεικόνιση $T \rightarrow T^* : \mathcal{B}(H_1, H_2) \rightarrow \mathcal{B}(H_2, H_1)$ έχει τις εξής ιδιότητες:

(α) είναι αντιγραμμική, δηλαδή $(T + \lambda S)^* = T^* + \bar{\lambda} S^*$.

(β) $T^{**} = T$.

(γ) $\|T^*\| = \|T\|$.

(δ) Αν $H_1 \xrightarrow{S} H_2 \xrightarrow{T} H_3$ φραγμένοι τελεστές, $(TS)^* = S^* T^*$.

(ε) $\|T^* T\| = \|T\|^2$.

Ειδικότερα (αν $H_1 = H_2 = H$),

η $T \rightarrow T^* : \mathcal{B}(H) \rightarrow \mathcal{B}(H)$ είναι μια **ενέλιξη (involution)** που ικανοποιεί την λεγόμενη **ιδιότητα C^*** , δηλ. την (ε).

Φραγμένοι τελεστές: Παραδείγματα

- Αν $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle), (F, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ είναι χώροι με εσωτερικό γινόμενο πεπερασμένης διάστασης, κάθε γραμμική απεικόνιση $T : E \rightarrow F$ είναι συνεχής. Αν επιλέξω ορθοκανονικές βάσεις $\{e_1, \dots, e_m\}$ του E και $\{f_1, \dots, f_n\}$ του F , ορίζεται ένας $n \times m$ πίνακας $[a_{ik}] \in M_{nm}(\mathbb{K})$ από την σχέση

$$a_{ik} = \langle Te_k, f_i \rangle, i = 1, \dots, n, k = 1, \dots, m.$$

Αντίστροφα, κάθε $[a_{ij}] \in M_{nm}(\mathbb{K})$ ορίζει μια μοναδική απεικόνιση $T_A : E \rightarrow F$ που ικανοποιεί τη σχέση αυτή:

αν $x = \sum \xi_j e_j$ τότε $T_A(x) = \sum \eta_k f_k$ όπου

$$\begin{bmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_n \end{bmatrix} = [a_{ij}] \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^m a_{1j} \xi_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^m a_{nj} \xi_j \end{bmatrix}.$$

Αν $A \in M_{nm}$, ορίζουμε $A^t \in M_{mn}$ τον $A^t = [b_{ij}]$ όπου $b_{ij} = a_{ji}$.

Θέτουμε $A^* = [\overline{a_{ji}}]$. Τότε $\langle T_{A^*} y, x \rangle = \langle y, T_A x \rangle$ για κάθε $y \in F, x \in E$.

Φραγμένοι τελεστές: Παραδείγματα

- Κάθε **φραγμένος** τελεστής $T : \ell^2(\mathbb{N}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{N})$ ορίζει έναν $\infty \times \infty$ πίνακα $[\langle Te_k, e_i \rangle]$, όπου $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ η συνηθισμένη ορθοκανονική βάση του ℓ^2 . Δεν ισχύει όμως το αντίστροφο. **Παράδειγμα**;
- **Διαγώνιοι τελεστές** Αν $a = (a_n)$, $a_n \in \mathbb{C}$, είναι τυχούσα ακολουθία, η απεικόνιση $(x(n)) \rightarrow (a_n x(n))$ στέλνει τον ℓ^2 στον ℓ^2 ανν $(a_n) \in \ell^\infty$ και τότε ορίζει φραγμένο τελεστή D_a με νόρμα $\|D_a\| = \|a\|_\infty$. Έχουμε $\langle D_a e_k, e_i \rangle = a_k \delta_{ik}$ (διαγώνιος πίνακας).
- Αν Γ τυχόν με κενό σύνολο (πχ. $\Gamma = [0, 1]$) ορίζω

$$\ell^2(\Gamma) := \{x : \Gamma \rightarrow \mathbb{C} : \exists M : \forall F \subseteq \Gamma \text{ πεπερ. } \sum_{t \in F} |x(t)|^2 \leq M^2\}$$

με $\|x\|_2 = \inf\{M : \dots\}$ γίνεται χώρος Hilbert με ο.κ. βάση $\{\delta_t : t \in \Gamma\}$.

Κάθε $a \in \ell^\infty(\Gamma)$ ορίζει φραγμένο τελεστή $D_a \in \mathcal{B}(\ell^2(\Gamma))$, όπως για το \mathbb{N} .

Φραγμένοι τελεστές: Παραδείγματα

- Τελεστές μετατόπισης (shift operators) στον $\ell^2(\mathbb{Z})$:

$$x = (\dots, x(-1), x(0), x(1), x(2), \dots)$$

Ορίζω U :

$$Ux = (\dots, x(-2), x(-1), x(0), x(1), \dots)$$

δηλαδή $(Ux)(n) = x(n-1)$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.

Προφανώς $U : \ell^2(\mathbb{Z}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$, γραμμικός, ισομετρία και επί.

Ο συζυγής U^* :

$$x = (\dots, x(-1), x(0), x(1), x(2), \dots)$$

$$U^*x = (\dots, x(0), x(1), x(2), x(3), \dots)$$

Φραγμένοι τελεστές: Παραδείγματα

- Τελεστές μετατόπισης (shift operators) (α) Στον $\ell^2(\mathbb{Z})$:

$$\begin{aligned} Ue_n &= e_{n+1} \quad (\text{μετατόπιση δεξιά}) \\ \text{και } U^*e_n &= e_{n-1} \quad (\text{μετατόπιση αριστερά}) \quad (n \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

Επεκτείνω γραμμικά στον $c_{00}(\mathbb{Z})$, παρατηρώ ότι είναι $\|\cdot\|_2$ -ισομετρίες, άρα επεκτείνονται σε ισομετρίες $\ell^2(\mathbb{Z}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$.

- (β) Στον $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$:

$$\begin{aligned} Se_n &= e_{n+1} \quad (\text{μετατόπιση δεξιά}) \quad (n \in \mathbb{Z}_+) \\ \text{και } S^*e_n &= \begin{cases} e_{n-1} & \text{όταν } n \geq 1 \\ 0 & \text{όταν } n = 0 \end{cases} \quad (\text{μετατόπιση αριστερά}) \end{aligned}$$

Επεκτείνω γραμμικά στον $c_{00}(\mathbb{Z}_+)$, παρατηρώ ότι είναι $\|\cdot\|_2$ -συστολές (δηλ. $\|Sx\|_2 \leq \|x\|_2$ για κάθε $x \in c_{00}(\mathbb{Z}_+)$), άρα επεκτείνονται σε συστολές $\ell^2(\mathbb{Z}_+) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}_+)$.
(Μάλιστα ο S είναι ισομετρία. Ο S^* ;))

Φραγμένοι τελεστές: Παραδείγματα

- (γ) Στον $L^2(\mathbb{R})$ (translation operators):

Έστω $t \in \mathbb{R}$. Αν $f \in C_c(\mathbb{R})$, ορίζω $f_t : s \rightarrow f_t(s) = f(s - t)$. Τότε $f_t \in C_c(\mathbb{R})$ και η απεικόνιση

$$\lambda_t : (C_c(\mathbb{R}), \|\cdot\|_2) \rightarrow C_c(\mathbb{R}), \|\cdot\|_2 : f \rightarrow f_t$$

είναι (γραμμική) ισομετρία επί (γιατί;). Άρα επεκτείνεται σε γραμμική ισομετρία $L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$, επί.

Φραγμένοι τελεστές: Παραδείγματα

- Πολλαπλασιαστικοί τελεστές στον $L^2([a, b])$ Αν $f \in C([a, b])$, ορίζουμε

$$M_f^o : C([a, b]) \rightarrow C([a, b]) : g \rightarrow fg$$

(κατά σημείο γινόμενο). Επειδή $\|fg\|_2 \leq \|f\|_\infty \|g\|_2$, ο M_f^o επεκτείνεται σε $M_f : L^2([a, b]) \rightarrow L^2([a, b])$ με $\|M_f\| \leq \|f\|_\infty$ (μάλιστα, ισότητα).

(Αλλιώς: με μέτρο) Πάρε $f \in L^\infty(\mu)$ και όρισε $M_f : L^2(\mu) \rightarrow L^2(\mu) : g \rightarrow fg$. Είναι καλά ορισμένος και $\|M_f\| \leq \|f\|_\infty$ (ισότητα για σ -πεπερασμένο μ).

Υπενθύμιση: Ο $L^\infty(X, \mathcal{S}, \mu)$

Αν (X, \mathcal{S}, μ) είναι χώρος μέτρου, μία $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ ανήκει στον $\mathcal{L}^\infty(X, \mathcal{S}, \mu)$ αν

- (α) είναι \mathcal{S} -μετρήσιμη και
- (β) είναι **ουσιωδώς φραγμένη (essentially bounded)**,
δηλ. υπάρχει $M < +\infty$ ώστε $|f(x)| \leq M$ σχεδόν παντού,
δηλ. $\mu(\{x \in X : |f(x)| > M\}) = 0$.

Ο μικρότερος τέτοιος M (υπάρχει και) λέγεται το **ουσιώδες φράγμα (essential supremum)** της $|f|$.

Δηλ. ορίζουμε

$$\|f\|_\infty := \text{esssup}|f| := \min\{M : \mu(\{x \in X : |f(x)| > M\}) = 0\}.$$

Αν $f \in \mathcal{L}^\infty(X, \mathcal{S}, \mu)$, τότε

$$\|f\|_\infty = 0 \text{ ανν } f(x) = 0 \text{ } \mu\text{-σχεδόν για κάθε } x \in X.$$

Ο $L^\infty(X, \mathcal{S}, \mu)$ είναι ο χώρος των κλάσεων ισοδυναμίας, modulo ισότητα μ -σχεδόν παντού, συναρτήσεων του $\mathcal{L}^\infty(X, \mathcal{S}, \mu)$.

Η $\|\cdot\|_\infty$ είναι νόρμα στον $L^\infty(X, \mathcal{S}, \mu)$, που γίνεται C^* άλγεβρα με τις πράξεις κατά σημείο.

Ορισμός

Ενέλιξη (involution) σε μια μιγαδική άλγεβρα \mathcal{A} είναι μια απεικόνιση $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} : a \rightarrow a^*$, που έχει τις ιδιότητες:

(α) είναι αντιγραμμική, δηλαδή $(a + \lambda b)^* = a^* + \bar{\lambda} b^*$.

(β) $a^{**} = a$.

(δ) $(ab)^* = b^* a^*$.

για κάθε $a, b \in \mathcal{A}$ και $\lambda \in \mathbb{C}$.

Παράδειγμα, η $A \rightarrow A^*$ στον $\mathcal{B}(H)$.

Επίσης, η $f \rightarrow f^*$ στην $C(K)$, όπου $f^*(t) = \overline{f(t)}$, $t \in K$.

Ορισμός

C^* -άλγεβρα είναι μια άλγεβρα Banach \mathcal{A} εφοδιασμένη με μια ενέλιξη $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} : a \rightarrow a^*$ που η νόρμα της ικανοποιεί την λεγόμενη ιδιότητα C^* :

$$\|a^*a\| = \|a\|^2.$$

Αν H είναι χώρος Hilbert, η $\mathcal{B}(H)$ είναι C^* -άλγεβρα. Μια κλειστή υπάλγεβρα $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(H)$ είναι C^* -άλγεβρα ανν είναι αυτοσυζυγής (selfadjoint), δηλ. αν ικανοποιεί $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^* \in \mathcal{A}$.

Θεώρημα (Gelfand-Naimark)

Κάθε C^* -άλγεβρα \mathcal{A} είναι ισομορφική, ως C^* -άλγεβρα, με μία κλειστή αυτοσυζυγή υπάλγεβρα κάποιου $\mathcal{B}(H)$. Ακριβέστερα, υπάρχει χώρος Hilbert H και απεικόνιση $\Phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}(H)$ που διατηρεί την αλγεβρική δομή (άθροισμα, γινόμενο, ενέλιξη) και την νόρμα.

Αναπαράσταση (representation) (π, H) μιάς C^* άλγεβρας \mathcal{A} λέγεται μια απεικόνιση $\pi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}(H)$ όπου H χώρος Hilbert που είναι μορφισμός $*$ -αλγεβρών, δηλαδή

$$\pi(a + \lambda b) = \pi(a) + \lambda \pi(b)$$

$$\pi(ab) = \pi(a)\pi(b)$$

$$\pi(a^*) = (\pi(a))^*$$

για κάθε $a, b \in \mathcal{A}$ και $\lambda \in \mathbb{C}$. Γράφουμε $\mathcal{A} \xrightarrow{\pi} H$.

Η αναπαράσταση $\mathcal{A} \xrightarrow{\pi} H$ λέγεται **πιστή (faithful)** αν είναι 1-1.

Λέγεται **μη εκφυλισμένη (non-degenerate)** αν

$$\underline{\text{span}(\pi(\mathcal{A})(H))} = H.$$

Αναπαραστάσεις της $C([0, 1])$: Παραδείγματα

- π_1 στον χώρο $\ell^2(\Gamma)$ όπου $\Gamma = [0, 1]$ (δες (35)): Ορίζουμε $\pi_1(f) \in \mathcal{B}(\ell^2([0, 1]))$ από τη σχέση $\pi_1(f) = D_f$ δηλ.
 $(\pi_1(f)\xi)(t) = f(t)\xi(t)$ για κάθε $\xi \in \ell^2([0, 1])$ και $t \in [0, 1]$.
- π_2 στον $\ell^2([0, 1] \cap \mathbb{Q})$: ίδιος τύπος $\pi_2(f) = D_f$, αλλά ο $\ell^2([0, 1] \cap \mathbb{Q})$ είναι διαχωρίσιμος.
- π_μ στον $L^2([0, 1], \mu)$. Ορίζουμε $\pi_\mu(f) \in \mathcal{B}(L^2([0, 1], \mu))$ από τη σχέση $\pi_\mu(f) = M_f$ δηλ. $(\pi_\mu(f)\xi)(t) = f(t)\xi(t)$ για κάθε $\xi \in L^2([0, 1], \mu)$ και (μ -σχεδόν) κάθε $t \in [0, 1]$.

Οι π_1 και π_2 είναι πιστές αναπαραστάσεις. Για την π_μ , εξαρτάται από τον φορέα του μέτρου.

Ορισμός

Έστω H_1, H_2 χώροι Hilbert.

- (i) Ένας $T \in \mathcal{B}(H_1)$ λέγεται **φυσιολογικός (normal)** αν $T^*T = TT^*$. (σαν τις συναρτήσεις)
- (ii) Ένας $T \in \mathcal{B}(H_1)$ λέγεται **αυτοσυζυγής (self-adjoint)** αν $T = T^*$. (σαν τις πραγματικές συναρτήσεις)
- (iii) Ένας $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ λέγεται **ορθομοναδιαίος (unitary)** αν $T^*T = I_{H_1}$ και $TT^* = I_{H_2}$. (σαν τις συναρτήσεις που $|f(t)| = 1$)

Παραδείγματα: Ο shift S δεν είναι φυσιολογικός.

Κάθε M_f είναι φυσιολογικός.

Ένας M_f είναι αυτοσυζυγής αν $f(t) \in \mathbb{R}$ για κάθε t .

Ο μετασχηματισμός Fourier $F : L^2([0, 2\pi]) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$ είναι ορθομοναδιαίος.

... Σε μια C^* άλγεβρα

Ορισμός

Έστω \mathcal{A} μια C^* άλγεβρα.

(i) Ένα $a \in \mathcal{A}$ λέγεται **φυσιολογικό (normal)** αν $a^*a = aa^*$.

(π.χ. κάθε $f \in C(K)$)

(ii) Ένα $a \in \mathcal{A}$ λέγεται **αυτοσυζυγές (self-adjoint)** αν $a = a^*$.

(π.χ. κάθε $f \in C(K)$ με $f(K) \subseteq \mathbb{R}$)

(iii) Αν η \mathcal{A} έχει μονάδα 1, ένα $u \in \mathcal{A}$ λέγεται **ορθομοναδιαίο (unitary)** αν $u^*u = 1$ και $uu^* = 1$.

(π.χ. κάθε $f \in C(K)$ με $f(K) \subseteq \mathbb{T}$)

Το φάσμα ενός $x \in \mathcal{A}$

Έστω \mathcal{A} άλγεβρα Banach με μονάδα 1. Ένα $x \in \mathcal{A}$ λέγεται **αντιστρέψιμο (invertible)** αν υπάρχει $x^{-1} \in \mathcal{A}$ με $xx^{-1} = x^{-1}x = 1$. Γράφουμε $x \in \text{Inv}(\mathcal{A})$.

Αν T είναι γραμμικός φραγμένος τελεστής σ' έναν χώρο Banach X το σύνολο $\sigma_p(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \text{ όχι 1-1}\}$ είναι το σύνολο των ιδιοτιμών του T , ενδεχομένως κενό. Όμως θα δούμε ότι το $\sigma(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \notin \text{Inv}(\mathcal{B}(X))\}$ δεν είναι ποτέ κενό.

Ορισμός

Έστω \mathcal{A} άλγεβρα Banach με μονάδα και $x \in \mathcal{A}$. Το **φάσμα (spectrum)** $\sigma(x)$ του x είναι το σύνολο

$$\sigma(x) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda 1 - x \notin \text{Inv}(\mathcal{A})\}.$$

Αν $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma(x)$, το $r_\lambda(x) := (\lambda 1 - x)^{-1}$ λέγεται **επιλύων ή επιλύουσα συνάρτηση (resolvent)** του x .

Αν $(\lambda I - T)\xi = \eta$, τότε $\xi = (\lambda I - T)^{-1}\eta = R_\lambda(T)\eta$.

Παράδειγμα: το φάσμα του $M_f \in \mathcal{B}(L^2(\mu))$

Έστω (X, μ) χώρος σ -πεπερασμένου μέτρου.

Πρόταση

Αν $f \in L^\infty(X, \mu)$, ο τελεστής M_f είναι αντιστρέψιμος αν η f είναι αντιστρέψιμο στοιχείο της άλγεβρας $L^\infty(X, \mu)$, αν δηλαδή η $1/f$ (ορίζεται μ -σχεδόν παντού και) είναι ουσιαστικά φραγμένη. Ο αντίστροφός του (αν υπάρχει) είναι ο M_g όπου $g = 1/f$.

Πρόταση

Αν $f \in L^\infty(X, \mu)$, το φάσμα του τελεστή M_f είναι το σύνολο των $\lambda \in \mathbb{C}$ ώστε για κάθε $\delta > 0$ το σύνολο $\{t \in X : |f(t) - \lambda| < \delta\}$ να έχει θετικό μέτρο. Το σύνολο αυτό το ονομάζεται **ουσιώδες σύνολο τιμών (essential range)** της f .

Αποδείξεις: στο αρχείο [spmf.pdf](#)

Άσκηση Αν $(X, \mu) = ([0, 1], m)$ και $f \in C([0, 1])$, τότε $\sigma(M_f) = \sigma(f) = f([0, 1])$.

Το φάσμα είναι μη κενό συμπαγές

Σε κάθε άλγεβρα Banach \mathcal{A} (με μονάδα), το φάσμα $\sigma(x)$ κάθε $x \in \mathcal{A}$ είναι **μη κενό και συμπαγές** υποσύνολο του \mathbb{C} και η επιλύουσα συνάρτηση

$$\mathbb{C} \setminus \sigma(x) \rightarrow \mathcal{A} : \lambda \rightarrow r_\lambda(x) := (\lambda 1 - x)^{-1}$$

είναι **ολόμορφη** (έχει τοπικά δυναμοσειρά γύρω από κάθε $\lambda_0 \in \mathbb{C} \setminus \sigma(x)$).

Για την απόδειξη, δες το αρχείο [spban.pdf](#).

Ο τύπος Gelfand-Beurling

Έστω \mathcal{A} άλγεβρα Banach (με μονάδα) και $a \in \mathcal{A}$. Η φασματική ακτίνα (spectral radius) $\rho(a)$ είναι η ακτίνα του μικρότερου δίσκου στο \mathbb{C} που περιέχει το $\sigma(a)$. Δηλαδή

$$\rho(a) := \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(a)\}.$$

Δείξαμε ότι $\rho(a) \leq \|a\|$, αλλά η ανισότητα μπορεί να είναι γνήσια (π.χ. όταν $a \neq 0$ και $a^2 = 0$).

Θεώρημα

Έστω \mathcal{A} άλγεβρα Banach (με μονάδα) και $a \in \mathcal{A}$. Τότε

$$\sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(a)\} = \lim_n \|a^n\|^{1/n}.$$

Πόρισμα

Αν \mathcal{A} είναι C^* -άλγεβρα (με μονάδα) και $a \in \mathcal{A}$ φυσιολογικό (δηλ. $a^*a = aa^*$) τότε $\rho(a) = \|a\|$.

Αποδείξεις στο αρχείο [gelbe.pdf](#).

Ο συναρτησιακός λογισμός για συνεχείς συναρτήσεις

Σταθεροποιούμε έναν $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Αν p πολυώνυμο, $p(t) = \sum_{k=0}^n c_k t^k$ ($c_k \in \mathbb{C}$), θέτουμε $p(A) = \sum_{k=0}^n c_k A^k$ (όπου $A^0 = I$).

Στόχος: να ορίσουμε τελεστές της μορφής $f(A)$ για άλλες κλάσεις συναρτήσεων f .

Γενικότερα, έστω \mathcal{A} μια C^* άλγεβρα με μονάδα και $a \in \mathcal{A}$. Ορίζουμε πάλι $p(a) = \sum_{k=0}^n c_k a^k$,

Πρτρ. Η απεικόνιση $\Phi_\pi : p \rightarrow p(a)$ διατηρεί $+$ και \cdot .

Ο συναρτησιακός λογισμός για συνεχείς συναρτήσεις

Πρόταση (Λήμμα Φασματικής Απεικόνισης)

Έστω \mathcal{A} άλγεβρα με μονάδα. Αν $a \in \mathcal{A}$ και p είναι πολυώνυμο, τότε

$$\sigma(p(a)) = \{p(\lambda) : \lambda \in \sigma(a)\}.$$

Πρόταση

Έστω \mathcal{A} μια C^* άλγεβρα με μονάδα και $a \in \mathcal{A}$.

$$a = a^* \implies \sigma(a) \subseteq \mathbb{R}.$$

Θεώρημα

Έστω \mathcal{A} μια C^* άλγεβρα με μονάδα. Αν $a \in \mathcal{A}$ και $a = a^*$ τότε, για κάθε πολυώνυμο p ,

$$\|p(a)\| = \sup\{|p(\lambda)| : \lambda \in \sigma(a)\} := \|p\|_{\sigma(a)}.$$

Αποδείξεις στο αρχείο [funcalc.pdf](#).

Ο συναρτησιακός λογισμός για συνεχείς συναρτήσεις

Έστω \mathcal{A} μια C^* άλγεβρα με μονάδα.

Θεώρημα (Συναρτησιακός λογισμός (functional calculus))

Αν $a = a^* \in \mathcal{A}$, υπάρχει μοναδικός ισομετρικός αλγεβρικός $*$ -μορφισμός

$$\Phi_c : (C(\sigma(a)), \|\cdot\|_{\sigma(a)}) \rightarrow (\mathcal{A}, \|\cdot\|) : f \rightarrow f(a)$$

που απεικονίζει το σταθερό πολυώνυμο $p_0(t) = 1$ στη μονάδα $1 \in \mathcal{A}$ και το ταυτοτικό πολυώνυμο $p_1(t) = t$ στο $a \in \mathcal{A}$.

Επομένως ισχύει $\Phi_c(p) = p(a)$ για κάθε πολυώνυμο p .

Ορισμός

Έστω $a = a^* \in \mathcal{A}$. Ο **συναρτησιακός λογισμός για συνεχείς συναρτήσεις (continuous functional calculus)** είναι η απεικόνιση $\Phi_c : C(\sigma(a)) \rightarrow \mathcal{A}$. Γράφουμε $f(a)$ αντί για $\Phi_c(f)$.

Δηλαδή αν η f είναι συνεχής στο $\sigma(a)$, το στοιχείο $f(a)$ της \mathcal{A} ορίζεται μοναδικά από το όριο

$$f(a) = \lim p_n(a) \text{ όπου } (p_n) \text{ πολυώνυμα με } \|p_n - f\|_{\sigma(a)} \rightarrow 0.$$

Ο συναρτησιακός λογισμός για συνεχείς συναρτήσεις

Πόρισμα

Έστω \mathcal{A} μια C^* άλγεβρα με μονάδα και $a = a^* \in \mathcal{A}$. Το σύνολο

$$C^*(1, a) := \{f(a) : f \in C(\sigma(a))\}$$

είναι μεταθετική C^* άλγεβρα με μονάδα. Είναι η μικρότερη κλειστή υπάλγεβρα της \mathcal{A} που περιέχει την μονάδα και το a . Κάθε στοιχείο της είναι όριο πολυωνύμων του a .

Πρόταση

Έστω \mathcal{A} μια C^* άλγεβρα με μονάδα $a = a^* \in \mathcal{A}$. Για κάθε $f \in C(\sigma(a))$ ισχύει

$$\sigma(f(a)) = f(\sigma(a)) = \{f(\lambda) : \lambda \in \sigma(a)\}.$$

Ανεξαρτησία του φάσματος σε C^* άλγεβρες

Έστω \mathcal{A} μια C^* άλγεβρα με μονάδα 1 και $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ κλειστή υπάλγεβρα με $1 \in \mathcal{B}$. Έστω $b \in \mathcal{B}$. Αν $b \in \text{Inv}(\mathcal{B})$, τότε βέβαια $b \in \text{Inv}(\mathcal{A})$. Συνεπώς $\sigma_{\mathcal{A}}(b) \subseteq \sigma_{\mathcal{B}}(b)$. Ισότητα όμως δεν ισχύει πάντα.

Παράδειγμα

$\mathcal{A} = C(\mathbb{T})$ (όπου $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$) και \mathcal{B} η άλγεβρα του δίσκου, δηλ. το σύνολο των $f \in \mathcal{A}$ για τις οποίες υπάρχει συνεχής επέκταση $\tilde{f} : \overline{\mathbb{D}} \rightarrow \mathbb{C}$, που είναι ολόμορφη στον ανοικτό δίσκο \mathbb{D} . Η $f(z) = z$ ανήκει στην \mathcal{B} , αλλά η $\frac{1}{f} \in \mathcal{A}$ δεν ανήκει στην \mathcal{B} .

Πρόταση

Έστω \mathcal{A} μια C^* άλγεβρα με μονάδα 1 και $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ μια C^* υπάλγεβρα με $1 \in \mathcal{B}$. Τότε για κάθε $b \in \mathcal{B}$ ισχύει

$$\sigma_{\mathcal{A}}(b) = \sigma_{\mathcal{B}}(b).$$

Ο θετικός κώνος μιας C^* άλγεβρας

Ορισμός

Έστω \mathcal{A} μια C^* άλγεβρα με μονάδα. Ένα $a \in \mathcal{A}$ λέγεται **θετικό** (γράφουμε $a \geq 0$) αν $a = a^*$ και $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}_+$.

Θέτουμε $\mathcal{A}_+ = \{a \in \mathcal{A} : a \geq 0\}$.

Αν a, b είναι αυτοσυζυγή, λέμε ότι $a \leq b$ όταν $b - a \in \mathcal{A}_+$.

Παραδείγματα

- Στον $C(K)$: $f \geq 0$ ανν $f(t) \in \mathbb{R}_+$ για κάθε $t \in K$ (γιατί $\sigma(f) = f(K)$).
- Στην $M_n(\mathbb{C})$: $T \geq 0$ ανν ο T διαγωνοποιείται και έχει μη αρνητικές ιδιοτιμές, ισοδύναμα ανν είναι θετικά ημιορισμένος, δηλ. $\langle T\xi, \xi \rangle \geq 0$ για κάθε $\xi \in \mathbb{C}^n$.
- Στην $\mathcal{B}(H)$: $T \geq 0$ ανν $\langle T\xi, \xi \rangle \geq 0$ για κάθε $\xi \in H$.

Πρόταση

Αν \mathcal{A} C^* άλγεβρα με μονάδα, $a = a^* \in \mathcal{A}$ και $f \in C(\sigma(a))$, τότε

$$f(a) \geq 0 \iff f(\sigma(a)) \subseteq \mathbb{R}_+.$$

Ο θετικός κώνος μιας C^* άλγεβρας

Έστω \mathcal{A} C^* άλγεβρα με μονάδα.

Πρόταση

Το σύνολο \mathcal{A}_+ είναι κώνος:

$$a, b \in \mathcal{A}_+, \lambda \geq 0 \implies \lambda a \in \mathcal{A}_+, a + b \in \mathcal{A}_+.$$

Λήμμα

Αν $x = x^*$ και $\|x\| \leq \mu$, τότε $-\mu 1 \leq x \leq \mu 1$

$$\text{και } x \geq 0 \iff \|x - \mu 1\| \leq \mu.$$

Πόρισμα

$$\mathcal{A}_+ = \{x \in \mathcal{A} : x = x^* \text{ και } \|\|x\| 1 - x\| \leq \|x\|\}.$$

Πρόταση

Ο κώνος \mathcal{A}_+ είναι $\|\cdot\|$ -κλειστός και γνήσιος, δηλαδή
 $\mathcal{A}_+ \cap (-\mathcal{A}_+) = \{0\}.$

Ο θετικός κώνος μιας C^* άλγεβρας

Πρόταση

Κάθε θετικό στοιχείο μίας C^* άλγεβρας \mathcal{A} έχει μοναδική θετική τετραγωνική ρίζα. Μάλιστα

$$a \in \mathcal{A}_+ \quad \text{αν και μόνον αν υπάρχει } b \in \mathcal{A}_+ \text{ ώστε } a = b^2.$$

Πρόταση

Κάθε αυτοσυζυγές στοιχείο a μίας C^* άλγεβρας \mathcal{A} (με μονάδα) γράφεται $a = a_+ - a_-$ όπου $a_+, a_- \in \mathcal{A}_+$ (μάλιστα, $a_+, a_- \in C^*(1, a)$) ώστε $a_+ a_- = a_- a_+ = 0$.

Επομένως, κάθε στοιχείο $x \in \mathcal{A}$ είναι γραμμικός συνδυασμός τεσσάρων θετικών στοιχείων: $x = a + ib$ όπου $a = a^*, b = b^*$, άρα $x = (a_+ - a_-) + i(b_+ - b_-)$.

Θεώρημα

Σε μια C^* άλγεβρα \mathcal{A} , ένα στοιχείο είναι θετικό αν-ν είναι της μορφής $a^* a$.

Συνέχεια μορφισμών³.

Έστω \mathcal{A}, \mathcal{B} C^* άλγεβρες με μονάδα και $\Phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ $*$ -μορφισμός με $\Phi(1) = 1$. Τότε

- 1 Για κάθε $a \in \mathcal{A}$ ισχύει $\sigma_{\mathcal{B}}(\Phi(a)) \subseteq \sigma_{\mathcal{A}}(a)$.
- 2 Για κάθε $a \in \mathcal{A}_+$ ισχύει $\Phi(a) \in \mathcal{B}_+$.
- 3 Για κάθε $a \in \mathcal{A}$ ισχύει $\|\Phi(a)\| \leq \|a\|$.
- 4 Αν Φ 1-1, τότε για κάθε $a = a^* \in \mathcal{A}$ ισχύει $\sigma_{\mathcal{B}}(\Phi(a)) = \sigma_{\mathcal{A}}(a)$.
- 5 Αν Φ 1-1, τότε Φ ισομετρία.

Σε μια C^* άλγεβρα, η νόρμα καθορίζεται από την αλγεβρική δομή: $\|a\|^2 = \|a^*a\| = \sup \sigma(a^*a)$.

Πρόταση (Μοναδικότητα της νόρμας)

Αν $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$ είναι C^* άλγεβρα και $\|\cdot\|'$ μια νόρμα στην \mathcal{A} με $\|ab\|' \leq \|a\|' \|b\|'$ και $\|a^*a\|' = \|a\|'^2$ για κάθε $a, b \in \mathcal{A}$, τότε $\|\cdot\|' = \|\cdot\|$.

³Δείτε και το [morph.pdf](#)

Θετικές γραμμικές μορφές

Ορισμός

Μια γραμμική $\phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ σε μια C^* άλγεβρα \mathcal{A} λέγεται **θετική** αν $\phi(a) \geq 0$ για κάθε $a \in \mathcal{A}_+$. Λέγεται **κατάσταση (state)** αν $\|\phi\| = 1$. Λέγεται **πιστή (faithful)** αν $\phi(a^*a) > 0$ για κάθε $a \neq 0$.

Πρόταση

Αν ϕ είναι θετική γραμμική μορφή τότε $\phi(x^*) = \overline{\phi(x)}$ για κάθε $x \in \mathcal{A}$. Η απεικόνιση $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C} : \langle a, b \rangle = \phi(b^*a)$ είναι ημι-εσωτερικό γινόμενο, και είναι εσωτερικό γινόμενο αν η ϕ είναι πιστή. Ισχύει η ανισότητα

$$|\phi(b^*a)|^2 \leq \phi(a^*a)\phi(b^*b) \text{ για κάθε } a, b \in \mathcal{A}.$$

Παρατήρηση Έπεται ότι αν $a \in \mathcal{A}$ τότε

$$\phi(a^*a) = 0 \iff \phi(b^*a) = 0 \text{ για κάθε } b \in \mathcal{A}.$$

Θετικές γραμμικές μορφές

Πρόταση

Κάθε θετική γραμμική μορφή είναι συνεχής. Όταν η \mathcal{A} έχει μονάδα και η ϕ είναι θετική, $\|\phi\| = \phi(1)$.

Απόδειξη (όταν $1 \in \mathcal{A}$)

$0 \leq a^*a \leq \|a^*a\| 1 = \|a\|^2 1 \Rightarrow 0 \leq \phi(a^*a) \leq \|a\|^2 \phi(1)$. Αλλά $|\phi(a)|^2 = |\phi(1^*a)|^2 \leq \phi(a^*a)\phi(1^*1)$ άρα $|\phi(a)|^2 \leq \|a\|^2 \phi(1)^2$.

Παραδείγματα

- 1 Στην $\mathcal{B}(H)$, (i) η $\phi(T) = \langle T\xi, \xi \rangle$ (όπου $\xi \in H$ νόρμας 1)
- 2 (ii) η $\psi(T) = \sum_i \langle T\xi_i, \xi_i \rangle$ όπου $\sum \|\xi_i\|^2 = 1$.
- 3 Στην $C(K)$, (i) η $\phi(f) = f(t_0)$ όπου $t_0 \in K$
- 4 (ii) η $\psi(f) = \int f d\mu$ όπου μ μέτρο πιθανότητας.
- 5 Σε μια C^* άλγεβρα \mathcal{A} , αν $\pi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}(H)$ είναι μια αναπαράσταση και $\xi \in H$ νόρμας 1, η $\phi(a) = \langle \pi(a)\xi, \xi \rangle$.

Αντίστροφο του (5):

Κάθε κατάσταση σε μια C^* άλγεβρα ορίζει μια αναπαράσταση:

Η Αναπαράσταση GNS

Συμβολίζουμε $\mathcal{S}(\mathcal{A})$ το σύνολο των καταστάσεων μιας C^* άλγεβρας \mathcal{A} .

Θεώρημα (Gelfand, Naimark, Segal)

Για κάθε κατάσταση ϕ σε μια C^* άλγεβρα \mathcal{A} υπάρχει μια τριάδα $(\pi_\phi, H_\phi, \xi_\phi)$ όπου π_ϕ είναι αναπαράσταση της \mathcal{A} στον χώρο Hilbert H_ϕ και $\xi_\phi \in H_\phi$ ένα κυκλικό ⁴ μοναδιαίο διάνυσμα ώστε

$$\phi(a) = \langle \pi_\phi(a)\xi_\phi, \xi_\phi \rangle \quad \text{για κάθε } a \in \mathcal{A}.$$

Όπως θα δούμε, η τριάδα GNS $(\pi_\phi, \mathcal{H}_\phi, \xi_\phi)$ καθορίζεται μοναδικά, modulo unitary ισοδυναμία, από την ισότητα αυτή.

⁴δηλ. τέτοιο ώστε το $\pi_\phi(\mathcal{A})\xi_\phi$ να είναι πυκνό στον H_ϕ .

Βήματα απόδειξης GNS ⁵.

- 1 Θεωρούμε τον γραμμικό χώρο \mathcal{A} .
- 2 Εφοδιάζεται με το ημι-εσωτερικό γινόμενο $\langle a, b \rangle_0 := \phi(b^* a)$.
Όταν $\mathcal{A} = C(X)$ έχουμε $\langle a, b \rangle_0 = \int_X a(t) \overline{b(t)} d\mu(t)$.
- 3 Αφού ϕ θετική, $\langle a, a \rangle_0 = \phi(a^* a) \geq 0$.
Λόγω Cauchy-Schwarz το σύνολο
 $\mathcal{N}_\phi = \mathcal{N} := \{u \in \mathcal{A} : \langle u, u \rangle_0 = 0\}$ είναι γραμμικός χώρος.
- 4 Θέτουμε $H_{0\phi} := \mathcal{A} / \mathcal{N}$ και ονομάζουμε $H_\phi (= L^2(\mu))$ την
πλήρωση του $H_{0\phi}$ ως προς την $\|[a]\|_\phi := \sqrt{\langle a, a \rangle_0}$.
(γράφω $[a] = a + \mathcal{N}$, $a \in \mathcal{A}$).

⁵ Δείτε και το [gns.pdf](#)

Βήματα απόδειξης GNS II

- 5 Η \mathcal{A} δρα στον γραμμ. χώρο \mathcal{A} έτσι: $\pi_0(a)(b) = ab$.
- 6 Επειδή $\pi_0(a)(\mathcal{N}) \subseteq \mathcal{N}$ ο τελεστής $\pi_0(a)$ επάγει $\pi_1(a)$ στον $H_{0\phi} = \mathcal{A} / \mathcal{N}$.
- 7 Δείχνουμε ότι $\|\pi_1(a)([b])\|_\phi \leq \|a\| \|[b]\|_\phi$.
[Όταν $\mathcal{A} = C(X)$, $\|ab\|_2 \leq \|a\|_\infty \|b\|_2$.]
Έπεται ότι ο $\pi_1(a)$ επεκτείνεται σε φραγμένο τελεστή $\pi_\phi(a)$ στον H_ϕ .
- Εύκολο: η $\pi_\phi : a \rightarrow \pi_\phi(a) : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}(H_\phi)$ είναι
*-αναπαράσταση. [Όταν $\mathcal{A} = C(X)$, τότε $\pi_\phi(a) = M_a$ δηλ.
 $(\pi_\phi(a)b)(t) = a(t)b(t)$ μ-σχεδόν για κάθε $t \in X$.]
- 8 Θέτουμε $\xi_\phi = [1_\mathcal{A}]$. Τότε

$$\begin{aligned}\langle \pi_\phi(a)\xi_\phi, \xi_\phi \rangle_{H_\phi} &= \langle \pi_\phi(a)[1], [1] \rangle_{H_\phi} \\ &= \langle a, 1 \rangle_{H_\phi} = \phi(1^*a) = \phi(a). \quad \square\end{aligned}$$

Η Αναπαράσταση GNS: Μοναδικότητα

Πρόταση

Έστω \mathcal{A} C^* άλγεβρα με μονάδα και ϕ κατάσταση στην \mathcal{A} . Αν (π, H, ξ) αναπαράσταση με κυκλικό μοναδιαίο διάνυσμα ξ ώστε

$$\langle \pi(a)\xi, \xi \rangle = \phi(a) \quad \text{για κάθε } a \in \mathcal{A},$$

τότε η (π, H, ξ) είναι *unitarily ισοδύναμη* με την $(\pi_\phi, \mathcal{H}_\phi, \xi_\phi)$.

Δηλαδή υπάρχει μια επί ισομετρία $U: H_\phi \rightarrow H$ ώστε

$$\pi(a) = U\pi_\phi(a)U^* \quad \text{για κάθε } a \in \mathcal{A}.$$

Πόρισμα

Έστω $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(H)$ C^* άλγεβρα με $I \in \mathcal{A}$ και $\xi \in H$ μοναδιαίο διάνυσμα. Θεωρούμε την κατάσταση $\phi(A) := \langle A\xi, \xi \rangle$, $A \in \mathcal{A}$. Τότε η αναπαράσταση GNS $(\pi_\phi, \mathcal{H}_\phi, \xi_\phi)$ είναι *unitarily ισοδύναμη* με την $A \rightarrow A|_K$, $A \in \mathcal{A}$ όπου $K := \overline{\text{span}\{A\xi : A \in \mathcal{A}\}}$.

(... και μπορώ $U\xi_\phi = \xi$.)

Ευθέα αθροίσματα: χώρων Hilbert

Αν H_1, H_2 είναι χώροι Hilbert ορίζουμε

$$H_1 \oplus H_2 := H = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} : x_i \in H_i \right\}$$

Είναι χώρος Hilbert με γραμμικές πράξεις κατά συντεταγμένη και εσωτερικό γινόμενο

$$\left\langle \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \right\rangle := \langle x_1, y_1 \rangle_{H_1} + \langle x_2, y_2 \rangle_{H_2}$$

δηλ. με τη νόρμα $\left\| \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{\|x_1\|_{H_1}^2 + \|x_2\|_{H_2}^2}$.

Αν $T_i \in \mathcal{B}(H_i)$, $i = 1, 2$, ορίζουμε $T = T_1 \oplus T_2$ από τη σχέση

$$T \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T(x_1) \\ T(x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Εύκολο: η απεικόνιση $T_1 \oplus T_2$ είναι καλά ορισμένη και γραμμική.

Χρήσιμη Άσκηση:

$$\|T_1 \oplus T_2\| = \max\{\|T_1\|, \|T_2\|\}.$$

Ευθέα αθροίσματα: χώρων Hilbert

Αν $\{H_i : i \in I\}$ χώροι Hilbert,

Ορισμός

Το *ευθύ άθροισμα χώρων Hilbert* $H := \bigoplus_{i \in I} H_i$ είναι το σύνολο όλων των συναρτήσεων $\xi = (\xi_i)$ με $\xi_i \in H_i$ για κάθε $i \in I$ και

$$\|\xi\|_H := \sup \left\{ \sum_{i \in J} \|\xi_i\|_{H_i}^2 : J \subseteq I \text{ πεπερασμένο} \right\} < \infty.$$

Άσκηση Είναι πλήρης χώρος. Κάθε $\xi \in H$ έχει αριθμήσιμο φορέα $J_\xi := \{j \in I : \xi_j \neq 0\}$. Ορίζεται το εσωτερικό γινόμενο

$$\langle \xi, \eta \rangle_H = \sum_{i \in J_\xi} \langle \xi_i, \eta_i \rangle_{H_i}$$

που επάγει τη νόρμα $\|\cdot\|_H$. Το *αλγεβρικό ευθύ άθροισμα*

$H_0 := \{(x_i)_i \in I : x_i \in H_i \text{ και } x_i = 0 \text{ πλην πεπερασμένου πλήθους } i \in I\}$

είναι ισομετρικό με έναν πυκνό υπόχωρο του H .

Ευθέα αθροίσματα: Τελεστών

Αν δοθεί $T_i \in \mathcal{B}(H_i)$ για κάθε $i \in I$, να ορίσουμε τελεστή $\bigoplus_i T_i \in \mathcal{B}(\bigoplus H_i)$. Ορίζουμε πρώτα

$$T_0 : H_0 \rightarrow H_0 : (x_i) \rightarrow (T_i x_i).$$

Είναι καλά ορισμένη απεικόνιση (γιατί $\text{supp}(T_i x_i) \subseteq \text{supp}(x_i)$) και γραμμική, αλλά δεν επεκτείνεται πάντα στον H .

Πρόταση

Μια οικογένεια (T_i) με $T_i \in \mathcal{B}(H_i)$ ορίζει φραγμένο τελεστή $\bigoplus_i T_i \in \mathcal{B}(\bigoplus H_i)$ που επεκτείνει τον T_0 αν και μόνον αν $\sup\{\|T_j\|_{\mathcal{B}(H_j)} : j \in I\} < \infty$. Μάλιστα

$$\left\| \bigoplus_i T_i \right\|_{\mathcal{B}(H)} = \sup\{\|T_j\|_{\mathcal{B}(H_j)} : j \in I\}.$$

Ευθέα αθροίσματα: Αναπαραστάσεων⁶.

Έστω \mathcal{A} μια C^* -άλγεβρα και για κάθε $i \in I$ έστω (π_i, H_i) μια αναπαράσταση. Επειδή $\sup_i \|\pi_i(a)\|_{\mathcal{B}(H_i)} \leq \|a\|_{\mathcal{A}}$ για κάθε $a \in \mathcal{A}$, μπορούμε να ορίσουμε:

$$\pi(a) := \oplus_{i \in I} \pi_i(a) : \oplus H_i \rightarrow \oplus H_i : (x_i) \rightarrow (\pi_i(a)x_i).$$

Επομένως ορίζεται μια απεικόνιση

$$\pi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}(\oplus H_i) : a \rightarrow \pi(a)$$

και $\|\pi(a)\| = \sup_i \|\pi_i(a)\| \leq \|a\|$ για κάθε $a \in \mathcal{A}$.

Η π είναι μια $*$ -αναπαράσταση της \mathcal{A} .

⁶Δείτε και το [dirsum.pdf](#)

Η καθολική αναπαράσταση

Έστω \mathcal{A} μια C^* -άλγεβρα και $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathcal{A})$ το σύνολο των states της \mathcal{A} . Για κάθε $\phi \in \mathcal{S}$ θεωρούμε την τριάδα GNS $(\pi_\phi, H_\phi, \xi_\phi)$.

Ορισμός

Η *καθολική αναπαράσταση* της \mathcal{A} είναι η (π, H) όπου

$$H := \bigoplus_{\phi \in \mathcal{S}} H_\phi \quad \text{και} \quad \pi(a) := \bigoplus_{\phi \in \mathcal{S}} \pi_\phi(a), \quad a \in \mathcal{A}.$$

Στόχος:

Θεώρημα (Gelfand-Naimark)

Η καθολική αναπαράσταση είναι πιστή, δηλ. 1-1.

Επομένως κάθε C^* -άλγεβρα αναπαρίσταται ισομετρικά και $*$ -ισομορφικά ως πιστή C^* -υπό-alγεβρα της άλγεβρας $\mathcal{B}(H)$ των τελεστών σε έναν κατάλληλο χώρο Hilbert.

Αρκεί να δείξουμε ότι

Πρόταση

Για κάθε $a \in \mathcal{A} \setminus \{0\}$ υπάρχει $\phi = \phi_a \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$ ώστε $\phi(a^*a) \neq 0$.

Η καθολική αναπαράσταση

Καλύτερα:

Πρόταση

Για κάθε $a \in \mathcal{A} \setminus \{0\}$ υπάρχει $\phi = \phi_a \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$ ώστε $\phi(a^*a) = \|a^*a\|$.

Συνεπώς $\|\pi_\phi(a)\| = \|a\|$ άρα $\|\pi(a)\| = \|a\|$.

Απόδειξη Αν $b := a^*a$ και $\lambda_0 := \max \sigma(b) = \|b\|$, ορίζω

$$\psi : C^*(1, b) \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{με} \quad \psi(f(b)) = f(\lambda_0) \quad (f \in C(\sigma(b)))$$

και επεκτείνω το ψ σε $\phi \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$, οπότε $\phi(a^*a) = \psi(b) = \lambda_0 = \|a^*a\|$.

Η καθολική αναπαράσταση

Πόρισμα

Αν $\{a_i : i \in I\}$ πυκνό υποσύνολο της \mathcal{A} , για κάθε $i \in I$ έστω π_i αναπαράσταση της \mathcal{A} ώστε $\|\pi_i(a_i)\| = \|a_i\|$. Τότε η αναπαράσταση

$$\pi := \bigoplus_{i \in I} \pi_i$$

είναι πιστή.

Παρατήρηση - Άσκηση Αν η $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$ είναι διαχωρίσιμη, τότε για κάθε $\phi \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$ ο χώρος Hilbert $(H_\phi, \|\cdot\|_\phi)$ είναι διαχωρίσιμος.

Πόρισμα

Αν η \mathcal{A} είναι διαχωρίσιμη, τότε δέχεται πιστή αναπαράσταση σε διαχωρίσιμο χώρο Hilbert.

Μεταθετικές C^* -άλγεβρες

Έστω \mathcal{C} μεταθετική C^* -άλγεβρα με μονάδα. Ονομάζουμε $\sigma(\mathcal{C})$ το σύνολο των **μη μηδενικών** μορφισμών ή **χαρακτήρων** (πολλ/κών γραμμικών μορφών) $\phi : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Κάθε $\phi \in \sigma(\mathcal{C})$ ικανοποιεί αυτομάτως $\|\phi\| = \phi(1) = 1$.

Εφοδιάζουμε το $\sigma(\mathcal{C})$ με την τοπολογία της σύγκλισης κατά σημείο: $\phi_i \rightarrow \phi$ αν $\phi_i(a) \rightarrow \phi(a)$ για κάθε $a \in \mathcal{C}$. Είναι **συμπαγής χώρος Hausdorff**.

Όταν η \mathcal{C} δεν είναι μεταθετική μπορεί να μην έχει καθόλου χαρακτήρες (π.χ. $M_2(\mathbb{C})$ ή $\mathcal{B}(H)$).

Όταν η \mathcal{C} είναι μεταθετική υπάρχουν «πολλοί» χαρακτήρες: για κάθε $a \in \mathcal{C}$ υπάρχει $\phi \in \sigma(\mathcal{C})$ ώστε $\|a\| = |\phi(a)|$.

Θεώρημα [Gelfand-Naimark 1]

Κάθε μεταθετική C^* -άλγεβρα \mathcal{A} με μονάδα είναι ισομετρικά $*$ -ισόμορφη με την C^* -άλγεβρα $C(\sigma(\mathcal{A}))$ των συνεχών συναρτήσεων $f : \sigma(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{C}$, όπου $\sigma(\mathcal{A})$ είναι το σύνολο των μη μηδενικών μορφισμών $\phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$:

Ο μετασχηματισμός Gelfand:

$$(\mathcal{A}, \|\cdot\|) \rightarrow (C(\sigma(\mathcal{A})), \|\cdot\|_\infty) : a \rightarrow \hat{a}$$

(όπου $\hat{a}(\phi) = \phi(a)$, $\phi \in \sigma(\mathcal{A})$)

είναι ισομετρικός $*$ -ισομορφισμός της \mathcal{A} επί της $C(\sigma(\mathcal{A}))$.

Παρατήρηση Αν $\phi \in \sigma(\mathcal{A})$, τότε $\phi(a) \in \sigma(a)$, άρα $|\phi(a)| \leq \|a\|$.

Παρατήρηση Αν η \mathcal{A} είναι C^* -άλγεβρα με μονάδα, κάθε $\phi \in \sigma(\mathcal{A})$ έχει $\|\phi\| = 1$ και άρα $\sigma(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{S}(\mathcal{A})$.

Πρόταση

Έστω \mathcal{A} μια C^* -άλγεβρα με μονάδα. Με την ασθενή- $*$ τοπολογία, το σύνολο των καταστάσεων $\mathcal{S}(\mathcal{A})$ είναι συμπαγής χώρος Hausdorff και το σύνολο των χαρακτήρων $\sigma(\mathcal{A})$ είναι κλειστό, άρα συμπαγές, υποσύνολό του.

⁷Αναλυτική απόδειξη στο [abelian.pdf](#).

Θεώρημα Gelfand-Naimark 1: Σχέδιο Απόδειξης II

Ορισμός

Έστω \mathcal{A} μεταθετική C^* -άλγεβρα με μονάδα και $x \in \mathcal{A}$.

Ορίζουμε

$$\hat{x} : \sigma(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{C} : \phi \rightarrow \phi(x).$$

Παρατήρηση Από τον ορισμό της ασθενούς- $*$ τοπολογίας, για κάθε $x \in \mathcal{A}$ η συνάρτηση

$$\hat{x} : (\sigma(\mathcal{A}), w^*) \rightarrow (\mathbb{C}, |\cdot|)$$

είναι συνεχής: $\hat{x} \in C(\sigma(\mathcal{A}))$.

Ορισμός

Η απεικόνιση

$$\mathcal{G} : \mathcal{A} \rightarrow C(\sigma(\mathcal{A})) : x \rightarrow \hat{x}$$

λέγεται μετασχηματισμός Gelfand.

Θεώρημα Gelfand-Naimark 1: Σχέδιο Απόδειξης III

Πρόταση

Έστω \mathcal{A} μεταθετική C^* -άλγεβρα με μονάδα. Η απεικόνιση Gelfand

$$\mathcal{G} : (\mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}}) \rightarrow (C(\sigma(\mathcal{A})), \|\cdot\|_{\infty})$$

είναι $*$ -μορφισμός και διατηρεί την μονάδα.

Πρόταση

Έστω \mathcal{A} μεταθετική C^* -άλγεβρα με μονάδα και $a \in \mathcal{A}$. Για κάθε $\lambda \in \sigma(a)$, υπάρχει $\phi \in \sigma(\mathcal{A})$ ώστε $\phi(a) = \lambda$. Δηλαδή

$$\sigma(a) = \{\phi(a) : \phi \in \sigma(\mathcal{A})\}.$$

Η ιδέα της Απόδειξης Σταθεροποιώ $\lambda \in \sigma(a)$. Θεωρώ την

$$\psi : f(a) \rightarrow f(\lambda) \quad (f \in C(\sigma(\mathcal{A})))$$

(οπότε $\psi(a) = \lambda$). Η ψ επεκτείνεται σε χαρακτήρα της \mathcal{A} . Πώς;

Θεώρημα Gelfand-Naimark 1: Σχέδιο Απόδειξης IV

Παρατήρηση Το σύνολο Ω των επεκτάσεων της ψ στην \mathcal{A} είναι κυρτό και ασθενώς-* συμπαγές υποσύνολο του $\mathcal{S}(\mathcal{A})$. Συνεπώς, από το θεώρημα Krein-Milman (!) έχει **ακραία σημεία**.⁸ Κάθε τέτοιο ακραίο σημείο είναι ακραίο σημείο και του $\mathcal{S}(\mathcal{A})$.

Πρόταση

Κάθε ακραίο σημείο ϕ του κυρτού συνόλου $\mathcal{S}(\mathcal{A})$ των καταστάσεων μιας μεταθετικής C^* -άλγεβρας \mathcal{A} με μονάδα είναι χαρακτήρας της \mathcal{A} .

Αντίστροφα, κάθε χαρακτήρας της \mathcal{A} είναι ακραίο σημείο του $\mathcal{S}(\mathcal{A})$.

Αποδείχθηκε ότι $\sigma(a) = \{\phi(a) : \phi \in \sigma(\mathcal{A})\}$.

Έπεται ότι ο μετασχηματισμός Gelfand $a \rightarrow \hat{a}$ είναι ισομετρία. Λόγω **Stone – Weierstrass**, είναι και επί της $C(\sigma(\mathcal{A}))$. \square

⁸Δες την μεθεπόμενη διαφάνεια και το kreinmilman.pdf.

Παράρτημα: Θεώρημα Stone – Weierstrass

Έστω K συμπαγής μετρικός χώρος (ή, γενικότερα, συμπαγής χώρος Hausdorff) και έστω $C(K)$ η μιγαδική άλγεβρα όλων των συνεχών συναρτήσεων $f : K \rightarrow \mathbb{C}$ (με πράξεις κατά σημείο και τη νόρμα supremum). Έστω

$$\mathcal{B} \subseteq C(K)$$

με τις εξής ιδιότητες

- (1) είναι υπάλγεβρα (δηλ. περιέχει το άθροισμα και το γινόμενο των στοιχείων της)
- (2) περιέχει τις σταθερές συναρτήσεις (δηλ. $1 \in \mathcal{B}$)
- (3) χωρίζει τα σημεία του K (δηλ. αν $f(x) = f(y)$ για κάθε $f \in \mathcal{B}$ τότε $x = y$)
- (4) περιέχει το συζυγές κάθε στοιχείου της (δηλ. $f \in \mathcal{B} \Rightarrow \bar{f} \in \mathcal{B}$).

Τότε η \mathcal{B} είναι ομοιόμορφα πυκνή στην $C(K)$.

Εφαρμογή. $K \subseteq \mathbb{C}$ συμπαγές, $\mathcal{B} := \{p(z, \bar{z}) : p(\cdot, \cdot) \text{ πολυώνυμο}\}.$

Ορισμός

Έστω E γραμμικός χώρος και $K \subseteq E$ κυρτό σύνολο. Ένα $x \in K$ λέγεται **ακραίο σημείο** του K αν

$$y, z \in K, \lambda \in (0, 1), \lambda y + (1 - \lambda)z = x \implies y = z (= x).$$

Γράφουμε $x \in \text{ex}(K)$.

Ένα κυρτό υποσύνολο $F \subseteq K$ λέγεται **ακραίο στο K ή έδρα (face) του K** αν

$$y, z \in K, \lambda \in (0, 1), \lambda y + (1 - \lambda)z \in F \implies y, z \in F.$$

Παρατήρηση Το $x \in K$ είναι ακραίο σημείο του $K \iff$ το σύνολο $\{x\}$ είναι ακραίο στο K .

Το Θεώρημα Krein - Milman

Παρατήρηση Αν $\{F_i : i \in I\}$ ακραία στο K και $\bigcap_i F_i \neq \emptyset$, τότε $\bigcap_i F_i$ ακραίο στο K .

Παρατήρηση Αν $F \subseteq G \subseteq K$, όπου G ακραίο στο K και F ακραίο στο G , τότε F ακραίο στο K .

Άρα, αν $G \subseteq K$ ακραίο στο K , τότε $\text{ex}(G) \subseteq \text{ex}(K)$.

Θεώρημα (Krein - Milman)

Αν X χώρος Banach και $K \subseteq X^*$ μη κενό, ασθενώς-* συμπαγές κυρτό, **(α)** Το K έχει ακραία σημεία.

(β) Η ασθενώς-* κλειστή κυρτή θήκη του $\text{ex}(K)$ είναι όλο το K .

[Ισχύει για οποιονδήποτε τοπικά κυρτό χώρο στη θέση του X^* .]

Λήμμα

Έστω $K \subseteq X^*$ μη κενό, ασθενώς-* συμπαγές, $\xi \in X$ και $\mu := \sup\{\text{Re } x(\xi) : x \in K\}$. Τότε το σύνολο

$$F := \{y \in K : \text{Re } y(\xi) = \mu\}$$

είναι συμπαγής έδρα του K .

Το Θεώρημα Αναπαράστασης του Riesz

Θεώρημα (Riesz)

Έστω K (τοπικά) συμπαγής χώρος Hausdorff. Για κάθε θετική γραμμική μορφή $\phi : C_c(K) \rightarrow \mathbb{C}$ υπάρχει μοναδικό κανονικό (θετικό) μέτρο Borel μ στον K ώστε

$$\phi(g) = \int g d\mu \quad \text{για κάθε } g \in C_c(K).$$

Για μια απόδειξη δες π.χ. Κουμουλλή-Νεγρεπόντη, Θεώρημα 12.26 ή W. Rudin, Real & Complex Analysis, Theorem 2.14.

Το φασματικό θεώρημα

Κάθε φυσιολογικός τελεστής είναι unitarily ισοδύναμος με έναν πολλαπλασιαστικό τελεστή:

Θεώρημα

Έστω $A \in \mathcal{B}(H)$ φυσιολογικός τελεστής. Υπάρχει χώρος μέτρου (X, μ) , συνάρτηση $f \in L^\infty(X, \mu)$ και ορθομοναδιαίος τελεστής (ισομετρία επί) $U : L^2(X, \mu) \rightarrow H$ ώστε $A = UM_f U^{-1}$.

Το φασματικό θεώρημα

Λήμμα

Για κάθε μη μηδενικό $x \in H$ υπάρχει θετικό κανονικό πεπερασμένο μέτρο Borel μ_x στο $\sigma(A)$ και ισομετρία $U_x : L^2(\sigma(A), \mu_x) \rightarrow H$ ώστε $U_x M_f = f(A) U_x$ για κάθε $f \in C(\sigma(A))$ (και ειδικότερα $A U_x = U_x M_{f_1}$ όπου $f_1(\lambda) = \lambda$).

Απόδειξη Σταθεροποιούμε ένα μη μηδενικό $x \in H$ και θεωρούμε την γραμμική απεικόνιση

$$\phi_x : C(\sigma(A)) \rightarrow \mathbb{C} : f \rightarrow \langle f(A)x, x \rangle.$$

Παρατηρούμε ότι η ϕ_x είναι θετική γραμμική μορφή, δηλαδή $\phi_x(f) \geq 0$ για κάθε $f \geq 0$. Από το Θεώρημα Αναπαράστασης του Riesz υπάρχει (μοναδικό) θετικό πεπερασμένο κανονικό μέτρο Borel μ_x στο $\sigma(A)$ ώστε

$$\int f d\mu_x = \phi_x(f) = \langle f(A)x, x \rangle \quad \text{για κάθε } f \in C(\sigma(A)).$$

Το φασματικό θεώρημα

Όμως $C(\sigma(A)) \subseteq L^2(\sigma(A), \mu_x)$. Ορίζουμε

$$U_{\text{ox}} : (C(\sigma(A)), \|\cdot\|_2) \rightarrow (H, \|\cdot\|_H) : f \rightarrow f(A)x$$

Ισχυρίζομαι ότι είναι ισομετρία. Πράγματι, για κάθε $f \in C(\sigma(A))$,

$$\begin{aligned}\|f(A)x\|_H^2 &= \langle f(A)x, f(A)x \rangle = \langle f(A)^* f(A)x, x \rangle = \langle (\bar{f}f)(A)x, x \rangle \\ &= \int \bar{f}f d\mu_x = \|f\|_2^2\end{aligned}$$

Άρα επεκτείνεται σε μια ισομετρία

$$U_x : L^2(\sigma(A), \mu_x) \rightarrow H$$

που ικανοποιεί $U_x(f) = f(A)x$ όταν η f είναι συνεχής.

Τέλος, για κάθε $g \in C(\sigma(A))$ έχουμε

$$(U_x M_f)(g) = U_x(fg) = (fg)(A)x = f(A)(g(A)x) = (f(A)U_x)(g).$$

άρα $U_x M_f = f(A)U_x$.



Το φασματικό θεώρημα: απόδειξη όταν $A = A^*$

Το σύνολο τιμών $\text{im}(U_x)$ της ισομετρίας U_x του Λήμματος είναι ακριβώς ο **κυκλικός υπόχωρος**

$$H_x = \overline{[A^n x : n = 0, 1, \dots]} = \overline{[x, Ax, A^2x, \dots]}$$

του x για τον A .

Ορισμός

Ένα διάνυσμα $x \in H$ λέγεται **κυκλικό (cyclic)** για τον τελεστή $A = A^* \in \mathcal{B}(H)$ αν ο κυκλικός υπόχωρος (cyclic subspace) που ορίζει είναι όλος ο H , ισοδύναμα αν ο γραμμικός χώρος $[A^n x : n = 0, 1, \dots]$ είναι πυκνός στον H .

Πρόταση

Αν ένας αυτοσυζυγής τελεστής $A \in \mathcal{B}(H)$ έχει κυκλικό διάνυσμα, υπάρχει πεπερασμένο θετικό κανονικό μέτρο Borel μ στο $\sigma(A)$ ώστε ο A να είναι ορθομοναδιαία ισοδύναμος με τον τελεστή M_{f_1} του πολλαπλασιασμού επί την ανεξάρτητη μεταβλητή, $(M_{f_1}(g))(t) = tg(t)$, στον $L^2(\sigma(A), \mu)$.

Το φασματικό θεώρημα: απόδειξη όταν $A = A^*$

Παράδειγμα

Έστω $H = L^2([0,1]) \oplus L^2([0,1])$ ⁹ και έστω $A = M_{f_1} \oplus M_{f_1}$ όπου $f_1(\lambda) = \lambda$ ($\lambda \in [0,1]$). Τότε ο A είναι αυτοσυζυγής τελεστής χωρίς κυκλικό διάνυσμα.

Λήμμα

Αν $A \in \mathcal{B}(H)$ είναι αυτοσυζυγής, υπάρχει μια οικογένεια $\{H_i : i \in I\}$ από κάθετους ανά δύο υποχώρους του H , ώστε

- (ι) κάθε H_i να είναι A -αναλλοίωτος, δηλ. $A(H_i) \subseteq H_i$
- (ii) κάθε H_i να είναι A -κυκλικός, δηλ. να περιέχει ένα A -κυκλικό διάνυσμα
- (iii) το ευθύ άθροισμα $\oplus_i H_i$ (δηλαδή ο μικρότερος κλειστός υπόχωρος του H που περιέχει κάθε H_i) να είναι όλος ο H .

⁹με το εσωτερικό γινόμενο $\langle f_1 \oplus g_1, f_2 \oplus g_2 \rangle = \langle f_1, f_2 \rangle + \langle g_1, g_2 \rangle$

Το φασματικό θεώρημα: απόδειξη όταν $A = A^*$

$$X_i = \sigma(A), \quad f_i(\lambda) = \lambda \ (\lambda \in X_i)$$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H} = \oplus \mathcal{H}_i & \xrightarrow{A} & \mathcal{H} = \oplus \mathcal{H}_i \\ \uparrow \oplus U_i & & \uparrow \oplus U_i \\ \oplus L^2(X_i, \mu_i) & \xrightarrow{\oplus M_{f_i}} & \oplus L^2(X_i, \mu_i) \end{array}$$

$$AU_i = M_{f_i} U_i \ \forall i \in I \Rightarrow AU = (\oplus M_{f_i})U \text{ όπου } U = \oplus U_i.$$

Το φασματικό θεώρημα: απόδειξη όταν $A = A^*$

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{H} = \bigoplus \mathcal{H}_i & \xrightarrow{A} & \mathcal{H} = \bigoplus \mathcal{H}_i \\
 \uparrow \oplus U_i & & \uparrow \oplus U_i \\
 \bigoplus L^2(X_i, \mu_i) & \xrightarrow{\oplus M_{f_i}} & \bigoplus L^2(X_i, \mu_i) \\
 \uparrow \nu & & \uparrow \nu \\
 L^2(X, \mu) & \xrightarrow{M_f} & L^2(X, \mu)
 \end{array}$$

Λεπτομέρειες στο Α. Κατάβολος, Θεωρία Τελεστών. Σημειώσεις §8.

Το φασματικό θεώρημα

Θεώρημα (Φασματικό Θεώρημα για αυτοσυζυγείς τελεστές)

Έστω $A \in \mathcal{B}(H)$ αυτοσυζυγής τελεστής. Υπάρχει χώρος μέτρου (X, μ) , συνάρτηση $f \in L^\infty(X, \mu)$ και ορθομοναδιαίος τελεστής $U : L^2(X, \mu) \rightarrow H$ ώστε $A = UM_f U^{-1}$.

Μάλιστα όταν ο χώρος H είναι διαχωρίσιμος, μπορεί να επιλέξει κανείς $X = \mathbb{R}$ και μ ένα σ -πεπερασμένο μέτρο Borel.

Συναρτήσεις Borel φυσιολογικού τελεστή

Έστω $A \in \mathcal{B}(H)$ φυσιολογικός τελεστής, $D := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \|A\|\}$. Για κάθε φραγμένη μετρήσιμη συνάρτηση $g : D \rightarrow \mathbb{C}$ ορίζεται ένας φυσιολογικός τελεστής $g(A) \in \mathcal{B}(H)$. Η απεικόνιση $g \rightarrow g(A)$ διατηρεί άθροισμα, γινόμενο και ενέλιξη, επεκτείνει τον συναρτησιακό λογισμό για πολυώνυμα, και ικανοποιεί

$$\|g(A)\| \leq \sup\{|g(z)| : z \in D\}.$$

(Δες και το αρχείο [borelfuncalc.pdf](#).)

Υπενθύμιση: Η Αναπαράσταση GNS

Συμβολίζουμε $\mathcal{S}(\mathcal{A})$ το σύνολο των καταστάσεων μιας C^* άλγεβρας \mathcal{A} .

Θεώρημα (Gelfand, Naimark, Segal)

Για κάθε κατάσταση ϕ σε μια C^* άλγεβρα \mathcal{A} υπάρχει μια τριάδα $(\pi_\phi, H_\phi, \xi_\phi)$ όπου π_ϕ είναι αναπαράσταση της \mathcal{A} στον χώρο Hilbert H_ϕ και $\xi_\phi \in H_\phi$ ένα κυκλικό¹⁰ μοναδιαίο διάνυσμα ώστε

$$\phi(a) = \langle \pi_\phi(a)\xi_\phi, \xi_\phi \rangle \quad \text{για κάθε } a \in \mathcal{A}.$$

¹⁰δηλ. τέτοιο ώστε το $\pi_\phi(\mathcal{A})\xi_\phi$ να είναι πυκνό στον H_ϕ .

Καθαρές καταστάσεις και ανάγωγες αναπαραστάσεις

Μια αναπαράσταση (π, H) μιας C^* άλγεβρας \mathcal{A} λέγεται (τοπολογικά) **ανάγωγη (irreducible)** αν οι μόνοι κλειστοί αναλλοίωτοι υπόχωροι της $\pi(\mathcal{A})$ είναι οι τετριμμένοι: $\{0\}$ και H .

Θεώρημα

Έστω \mathcal{A} μια C^* άλγεβρα με μονάδα και $\phi \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$.
Η αναπαράσταση GNS π_ϕ είναι ανάγωγη αν και μόνον αν η ϕ είναι **καθαρή κατάσταση**, δηλαδή ακραίο σημείο του κυρτού συνόλου $\mathcal{S}(\mathcal{A})$ των καταστάσεων της \mathcal{A} .

Πρόταση (Λήμμα Schur)

Μια αναπαράσταση (π, H) μιας C^* άλγεβρας \mathcal{A} είναι ανάγωγη αν και μόνον αν οι μόνοι τελεστές που μετατίθενται με την $\pi(\mathcal{A})$ είναι οι τετριμμένοι: τα πολλαπλάσια του ταυτοτικού τελεστή.

Αποδείξεις στο αρχείο [schur.pdf](#).

Πίνακες σε μια C^* άλγεβρα

Αν \mathcal{A} είναι μια C^* άλγεβρα με μονάδα και $n \in \mathbb{N}$, ο χώρος $M_n(\mathcal{A})$ των $n \times n$ πινάκων $[a_{ij}]$ με στοιχεία $a_{ij} \in \mathcal{A}$ γίνεται $*$ -άλγεβρα με τις προφανείς πράξεις: γραμμικές πράξεις κατά συντεταγμένη, γινόμενο $[a_{ij}] \cdot [b_{ij}] = [c_{ij}]$ όπου $c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \in \mathcal{A}$ και ενέλιξη $[a_{ij}]^* = [d_{ij}]$ όπου $d_{ij} = a_{ji}^* \in \mathcal{A}$.

Πώς όμως να ορίσω νόρμα στην $M_n(\mathcal{A})$, ώστε να γίνει C^* άλγεβρα;

Εμφυτεύοντας την \mathcal{A} ως C^* άλγεβρα (δηλ. $*$ -ισομορφικά και ισομετρικά) στην C^* άλγεβρα $\mathcal{B}(H)$ των τελεστών σε κατάλληλο χώρο Hilbert H (μέσω της καθολικής ή όποιας άλλης **πιστής** αναπαράστασης), βλέπουμε ότι αρκεί να δείξουμε ότι η $*$ -άλγεβρα $M_n(\mathcal{B}(H))$ δέχεται νόρμα ως προς την οποία είναι C^* άλγεβρα.

Έστω H χώρος Hilbert, $n \in \mathbb{N}$ και $H^n = H \oplus H \oplus \cdots \oplus H$. Για κάθε $n \times n$ πίνακα $[a_{ij}] \in M_n(\mathcal{B}(H))$ ορίζουμε $A: H^n \rightarrow H^n$ από τη σχέση

$$A \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix} = [a_{ij}] \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^m a_{1j} \xi_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^m a_{nj} \xi_j \end{bmatrix}.$$

Εύκολα φαίνεται ότι $A \in \mathcal{B}(H^n)$.

(Δες και το αρχείο [mat.pdf](#).)

Πίνακες τελεστών

Αντίστροφα, αν δοθεί $A \in \mathcal{B}(H^n)$ ορίζουμε έναν $n \times n$ πίνακα $[a_{ij}] \in M_n(\mathcal{B}(H))$ ως εξής:

Θεωρούμε την απεικόνιση $H \times H \rightarrow \mathbb{C}$ που ορίζεται από την

$$\langle\langle \xi, \eta \rangle\rangle := \langle A(\xi \otimes e_j), (\eta \otimes e_i) \rangle_{H^n}, \quad \xi, \eta \in H$$

και παρατηρούμε ότι είναι sesquilinear μορφή στον $H \times H$, και φράσσεται από την $\|A\|$. Επομένως υπάρχει μοναδικός τελεστής $a_{ij} \in \mathcal{B}(H)$ που ικανοποιεί τη σχέση:

$$\langle a_{ij} \xi, \eta \rangle_H = \langle\langle \xi, \eta \rangle\rangle = \langle A(\xi \otimes e_j), (\eta \otimes e_i) \rangle, \quad \xi, \eta \in H.$$

Η απεικόνιση $\Phi : M_n(\mathcal{B}(H)) \rightarrow \mathcal{B}(H^n) : [a_{ij}] \rightarrow A$ που ορίσαμε είναι ισομορφισμός $*$ -άλγεβρων. Επομένως, αν μεταφέρουμε τη νόρμα από την C^* άλγεβρα $\mathcal{B}(H^n)$ στην $M_n(\mathcal{B}(H))$ ορίζοντας

$$\|[a_{ij}]\| := \|\Phi^{-1}([a_{ij}])\|_{\mathcal{B}(H^n)},$$

η $M_n(\mathcal{B}(H))$ γίνεται C^* άλγεβρα.

Πλήρως θετικές απεικονίσεις

Αν $n \in \mathbb{N}$, κάθε $A \in \mathcal{B}(H^n)$ ορίζει $n \times n$ πίνακα $[a_{ij}]$ με $a_{ij} \in \mathcal{B}(H)$ από τη σχέση

$$A \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix} \quad (\xi_i \in H)$$

Η απεικόνιση $A \rightarrow [a_{ij}] : \mathcal{B}(H^n) \rightarrow M_n(\mathcal{B}(H))$ είναι $*$ -ισομορφισμός.

Συνεπώς η $M_n(\mathcal{B}(H))$ γίνεται C^* -άλγεβρα με τη νόρμα της $\mathcal{B}(H^n)$. Έτσι, αν $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(H)$ είναι άλγεβρα τελεστών, η $M_n(\mathcal{A})$ γίνεται άλγεβρα τελεστών.

Έστω $\Phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ γραμμική απεικόνιση μεταξύ αλγεβρών (ή απλώς χώρων) τελεστών. Ορίζουμε

$$\Phi_n : M_n(\mathcal{A}) \rightarrow M_n(\mathcal{B}) \quad \text{όπου} \quad \Phi_n([a_{ij}]) = [\Phi(a_{ij})].$$

Αν οι \mathcal{A}, \mathcal{B} είναι C^* -άλγεβρες και η Φ διατηρεί την ενέλιξη, το ίδιο ισχύει για την Φ_n .

Αν η Φ είναι $*$ -μορφισμός, το ίδιο ισχύει για την Φ_n .

Πλήρως θετικές απεικονίσεις

$$\Phi_n : M_n(\mathcal{A}) \rightarrow M_n(\mathcal{B}) \text{ όπου } \Phi_n([a_{ij}]) = [\Phi(a_{ij})].$$

Υπενθύμιση

Μια απεικόνιση $\Phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ μεταξύ C^* αλγεβρών είναι **θετική** αν

$$a \geq 0 \Rightarrow \Phi(a) \geq 0.$$

ΔΕΝ έπεται πάντα ότι η Φ_n είναι θετική. **Παράδειγμα** Αν $\Phi(a) = a^\dagger$ (ανάστροφος) στην $\mathcal{A} = M_2$: προφανώς θετική. Όμως

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ θετικός, αλλά } \Phi_2(A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ όχι θετικός.}$$

Ορισμός

Μια απεικόνιση $\Phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ μεταξύ C^* αλγεβρών λέγεται **πλήρως θετική** αν η Φ_n είναι θετική για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Θεώρημα διαστολής του Stinespring

Παραδείγματα πλήρως θετικών (cp) απεικονίσεων:

Κάθε *-μορφισμός π είναι θετικός ($\pi(a^*a) = \pi(a)^*\pi(a) \geq 0 \ \forall a$).

Άρα κάθε *-μορφισμός είναι πλήρως θετικός (γιατί ο π_n είναι *-μορφισμός).

Κάθε απεικόνιση $a \rightarrow V^*aV$ είναι πλήρως θετική

(εδώ $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(H)$ και $V \in \mathcal{B}(H)$). Σύνθεση:

Επομένως κάθε $a \rightarrow V^*\pi(a)V$ είναι πλήρως θετική.

Δεν υπάρχουν άλλες:

Θεώρημα (Stinespring)

Για κάθε μοναδιαία πλήρως θετική απεικόνιση $\Phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}(H)$ από μια C^* -άλγεβρα \mathcal{A} με μονάδα στον $\mathcal{B}(H)$ υπάρχει (π, H_Φ, V) όπου π είναι *-αναπαράσταση της \mathcal{A} στον χώρο Hilbert H_Φ και $V : H \rightarrow H_\Phi$ είναι ισομετρία, ώστε

$$\Phi(a) = V^*\pi(a)V \quad \text{για κάθε } a \in \mathcal{A}.$$

Η *-αναπαράσταση π λέγεται **διαστολή** της Φ μέσω της «εμφύτευσης» $V : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$.

Υπενθύμιση: Η Αναπαράσταση GNS

Συμβολίζουμε $\mathcal{S}(\mathcal{A})$ το σύνολο των καταστάσεων μιας C^* άλγεβρας \mathcal{A} .

Θεώρημα (Gelfand, Naimark, Segal)

Για κάθε κατάσταση ϕ σε μια C^* άλγεβρα \mathcal{A} υπάρχει μια τριάδα $(\pi_\phi, H_\phi, \xi_\phi)$ όπου π_ϕ είναι αναπαράσταση της \mathcal{A} στον χώρο Hilbert H_ϕ και $\xi_\phi \in H_\phi$ ένα κυκλικό¹¹ μοναδιαίο διάνυσμα ώστε

$$\phi(a) = \langle \pi_\phi(a)\xi_\phi, \xi_\phi \rangle \quad \text{για κάθε } a \in \mathcal{A}.$$

Όπως θα δούμε, η τριάδα GNS $(\pi_\phi, \mathcal{H}_\phi, \xi_\phi)$ καθορίζεται μοναδικά, modulo unitary ισοδυναμία, από την ισότητα αυτή.

¹¹δηλ. τέτοιο ώστε το $\pi_\phi(\mathcal{A})\xi_\phi$ να είναι πυκνό στον H_ϕ .

Βήματα απόδειξης GNS

- 1 Θεωρούμε τον γραμμικό χώρο \mathcal{A} .
- 2 Εφοδιάζεται με το ημι-εσωτερικό γινόμενο $\langle a, b \rangle_0 := \phi(b^* a)$.
Όταν $\mathcal{A} = C(X)$ έχουμε $\langle a, b \rangle_0 = \int_X a(t) \overline{b(t)} d\mu(t)$.
- 3 Αφού ϕ θετική, $\langle a, a \rangle_0 = \phi(a^* a) \geq 0$.
Λόγω Cauchy-Schwarz το σύνολο
 $\mathcal{N}_\phi = \mathcal{N} := \{u \in \mathcal{A} : \langle u, u \rangle_0 = 0\}$ είναι γραμμικός χώρος.
- 4 Θέτουμε $H_{0\phi} := \mathcal{A} / \mathcal{N}$ και ονομάζουμε H_ϕ ($= L^2(\mu)$) την πλήρωση του $H_{0\phi}$ ως προς την $\|[a]\|_\phi := \sqrt{\langle a, a \rangle_0}$.
(γράφω $[a] = a + \mathcal{N}$, $a \in \mathcal{A}$).

Βήματα απόδειξης GNS II

- 5 Η \mathcal{A} δρα στον γραμμ. χώρο \mathcal{A} έτσι: $\pi_0(a)(b) = ab$.
- 6 Επειδή $\pi_0(a)(\mathcal{N}) \subseteq \mathcal{N}$ ο τελεστής $\pi_0(a)$ επάγει $\pi_1(a)$ στον $H_0\phi = \mathcal{A}/\mathcal{N}$.
- 7 Δείχνουμε ότι $\|\pi_1(a)([b])\|_\phi \leq \|a\| \|[b]\|_\phi$.
[Όταν $\mathcal{A} = C(X)$, $\|ab\|_2 \leq \|a\|_\infty \|b\|_2$.]
Έπεται ότι ο $\pi_1(a)$ επεκτείνεται σε φραγμένο τελεστή $\pi_\phi(a)$ στον H_ϕ .
- Εύκολο: η $\pi_\phi : a \rightarrow \pi_\phi(a) : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}(H_\phi)$ είναι
*-αναπαράσταση. [Όταν $\mathcal{A} = C(X)$, τότε $\pi_\phi(a) = M_a$ δηλ.
 $(\pi_\phi(a)b)(t) = a(t)b(t)$ μ-σχεδόν για κάθε $t \in X$.]
- 8 Θέτουμε $\xi_\phi = [1_\mathcal{A}]$. Τότε

$$\begin{aligned}\langle \pi_\phi(a)\xi_\phi, \xi_\phi \rangle_{H_\phi} &= \langle \pi_\phi(a)[1], [1] \rangle_{H_\phi} \\ &= \langle a, 1 \rangle_{H_\phi} = \phi(1^*a) = \phi(a). \quad \square\end{aligned}$$

Stinespring: Operator-valued GNS

Θεώρημα (Stinespring)

Για κάθε μοναδιαία πλήρως θετική απεικόνιση $\Phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}(H)$ από μια C^* -άλγεβρα \mathcal{A} με μονάδα στον $\mathcal{B}(H)$ υπάρχει (π, H_ϕ, V) όπου π είναι $*$ -αναπαράσταση της \mathcal{A} στον χώρο Hilbert H_ϕ και $V : H \rightarrow H_\phi$ είναι ισομετρία, ώστε

$$\Phi(a) = V^* \pi(a) V \quad \text{για κάθε } a \in \mathcal{A}.$$

Απόδειξη στο [stineproof.pdf](#).

Βήματα απόδειξης Stinespring

- 1 Αντί για τον γραμμικό χώρο \mathcal{A} , θεωρούμε τον

$$\begin{aligned}\mathcal{A} \otimes c_{00}(\mathbb{N}) &= c_{00}(\mathbb{N}, \mathcal{A}) = \{\vec{a} : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{A} : \text{supp } \vec{a} \text{ πεπερ.}\} \\ &= \text{span}\{a \otimes e_n : a \in \mathcal{A}, n \in \mathbb{N}\} := \widetilde{\mathcal{A}}\end{aligned}$$

Όταν $\mathcal{H} = \mathbb{C}$ έχουμε $\mathcal{A} \otimes \mathbb{C} \simeq \mathcal{A}$.

- 2 Αν $\{\xi_n : n \in \mathbb{N}\}$ ορθοκανονική βάση του H ορίζουμε $\langle a \otimes e_n, b \otimes e_m \rangle_0 := \langle \Phi(b^* a) \xi_n, \xi_m \rangle_H$ και επεκτείνουμε γραμμικά. Δηλαδή

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle_0 := \sum_{n,m} \langle \Phi(b(m)^* a(n)) \xi_n, \xi_m \rangle_H.$$

Όταν $\mathcal{H} = \mathbb{C}$ έχουμε $\langle a, b \rangle_0 = \phi(b^* a)$.

- 3 Χρησιμοποιώντας ότι η Φ είναι πλήρως θετική δείχνουμε ότι

$$\left\langle \sum_{n=1}^N a(n) \otimes e_n, \sum_{m=1}^N a(m) \otimes e_m \right\rangle_0 \geq 0.$$

Από Cauchy-Schwarz το σύνολο

$\mathcal{N}_\phi = \mathcal{N} := \{\vec{u} \in \widetilde{\mathcal{A}} : \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle_0 = 0\}$ είναι γραμμικός χώρος.

Βήματα απόδειξης Stinespring II

- 4 Θέτουμε $H_{0\phi} := \widetilde{\mathcal{A}}/\mathcal{N}$ και ονομάζουμε H_ϕ την πλήρωση του $H_{0\phi}$ ως προς τη νόρμα $\|[\vec{a}]\|_\phi := \sqrt{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle_0}$ (γράφω $[\vec{a}] = \vec{a} + \mathcal{N}$, $\vec{a} \in \widetilde{\mathcal{A}}$).
- 5 Η \mathcal{A} δρα στον $\widetilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \otimes c_{00}(\mathbb{N})$ ως εξής:

$$\pi_0(a)(b \otimes e_j) := ab \otimes e_j \quad (a, b \in \mathcal{A}, j \in \mathbb{N})$$

$$\text{ισοδύναμα } (\pi_0(a)\vec{b})(j) := a \cdot \vec{b}(j) \quad (a \in \mathcal{A}, \vec{b} \in \widetilde{\mathcal{A}}, j \in \mathbb{N}).$$

- 6 Επειδή $\pi_0(a)(\mathcal{N}) \subseteq \mathcal{N}$ για κάθε $a \in \mathcal{A}$, ο τελεστής $\pi_0(a)$ επάγει καλά ορισμένη γραμμική απεικόνιση $\pi_1(a)$ στον $H_{0\phi} = \widetilde{\mathcal{A}}/\mathcal{N}$:

$$\pi_1(a)[b \otimes e_j] = [ab \otimes e_j].$$

Βήματα απόδειξης Stinespring III

7 Δείχνουμε ότι $\left\| \pi_1(a)([\vec{b}]) \right\|_\phi \leq \|a\| \left\| [\vec{b}] \right\|_\phi.$

[Όταν $\mathcal{A} = C(X)$, $\|ab\|_2 \leq \|a\|_\infty \|b\|_2$.]

Έπεται ότι ο $\pi_1(a)$ επεκτείνεται σε φραγμένο τελεστή $\pi_\phi(a)$ στον H_ϕ .

Δείχνουμε ότι η $\pi_\phi : a \rightarrow \pi_\phi(a) : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}(H_\phi)$ είναι $*$ -αναπαράσταση.

8 Αν $H_0 = \text{span}\{\xi_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq H$ ορίζουμε

$$V : H_0 \rightarrow \widetilde{\mathcal{A}} \rightarrow H_\phi : \xi_n \rightarrow 1_{\mathcal{A}} \otimes e_n \rightarrow [1_{\mathcal{A}} \otimes e_n]$$

και επεκτείνουμε γραμμικά. Η V είναι ισομετρία, άρα επεκτείνεται σε ισομετρία $V : H \rightarrow H_\phi$.

Τέλος, για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \langle (V^* \pi(a) V) \xi_n, \xi_m \rangle_H &= \langle \pi(a) V \xi_n, V \xi_m \rangle_{H_\phi} = \langle \pi(a) [1 \otimes e_n], [1 \otimes e_m] \rangle_{H_\phi} \\ &= \langle [a \otimes e_n], [1 \otimes e_m] \rangle_{H_\phi} = \langle \Phi(1^* a) \xi_n, \xi_m \rangle_H. \end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$V^* \pi(a) V = \Phi(a). \quad \square$$

Choi - Kraus Decomposition

Πρόταση

Έστω $\mathcal{A} = M_n(\mathbb{C})$ και $\Phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}(H)$ όπου $H = \mathbb{C}^k$ μία n -θετική απεικόνιση. Τότε υπάρχουν $V_j : \mathbb{C}^k \rightarrow \mathbb{C}^n$ ώστε

$$\Phi(A) = \sum_{j=1}^{nk} V_j^* A V_j \quad \forall A \in \mathcal{A}.$$

Η παράσταση αυτή λέγεται *διάσπαση Kraus* της Φ και το ελάχιστο πλήθος των V_j ονομάζεται *τάξη Kraus* της Φ .

Παρατήρηση Οπότε η Φ είναι αυτομάτως *πλήρως θετική*.

Choi - Kraus Decomposition: Απόδειξη

Ονομάζουμε $E_{rs} \in M_n(\mathbb{C})$ τον πίνακα με 1 στην θέση (r, s) και 0 αλλού. Δηλαδή

$$E_{rs}(x) = \langle x, e_s \rangle e_r := e_r e_s^*(x) \quad (x \in \mathbb{C}^n).$$

Η $\{E_{rs} : 1 \leq r, s \leq n\}$ είναι βάση του γραμμ. χώρου $\mathcal{A} = M_n$.

Παρατήρηση Αν $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{C}^k$, έστω V^* ο $k \times n$ πίνακας που έχει στήλες τα x_1, x_2, \dots, x_n , οπότε

$$V^* : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^k : e_r \rightarrow x_r, \quad r = 1, \dots, n.$$

Τότε

$$\begin{array}{ccccccc} V^* E_{rs} V : & \mathbb{C}^k & \rightarrow & \mathbb{C}^n & \rightarrow & \mathbb{C}^n & \rightarrow & \mathbb{C}^k \\ & y & \rightarrow & Vy & \rightarrow & \langle Vy, e_s \rangle e_r & \rightarrow & \langle Vy, e_s \rangle V^* e_r \end{array}$$

Δηλαδή $(V^* E_{rs} V)(y) = \langle Vy, e_s \rangle V^* e_r = \langle y, V^* e_s \rangle V^* e_r = \langle y, x_s \rangle x_r = (x_r x_s^*)(y)$.

Choi - Kraus Decomposition: Απόδειξη

Αν ονομάσουμε v το διάνυσμα στήλη

$v = (x_1 \oplus x_2 \oplus \dots \oplus x_n)^\dagger \in \mathbb{C}^{nk}$, τότε ο τελεστής $vv^* : \mathbb{C}^{nk} \rightarrow \mathbb{C}^{nk}$

που ανήκει στον $\mathcal{B}(\mathbb{C}^{nk}) = M_{nk} = M_n(M_k)$ έχει πίνακα

$vv^* = [x_r x_s^*]_{r,s}$. Δηλαδή $[V^* E_{rs} V] = [x_r x_s^*]_{r,s}$.

Απόδειξη της διάσπασης Kraus. Αρκεί (λόγω γραμμικότητας)

να το δείξουμε για $A = E_{rs}$, $1 \leq r, s \leq n$.

Παρατηρώ ότι ο $[E_{rs}] = \begin{bmatrix} E_{11} & \dots & E_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ E_{n1} & \dots & E_{nn} \end{bmatrix}$ είναι θετικός στην

$M_n(\mathcal{A}) = M_n(M_n)$. Επομένως αφού η Φ είναι n -θετική, ο

$[\Phi(E_{rs})] = \begin{bmatrix} \Phi(E_{11}) & \dots & \Phi(E_{1n}) \\ \vdots & & \vdots \\ \Phi(E_{n1}) & \dots & \Phi(E_{nn}) \end{bmatrix}$ είναι θετικός στην

$M_n(\mathcal{B}(H)) = M_n(M_k)$.

Choi - Kraus Decomposition: Απόδειξη

Δηλαδή ο $B := [\Phi(E_{rs})]$ είναι θετικός στην $M_n(M_k) = M_{nk} = \mathcal{B}(\mathbb{C}^{nk})$. Από το Φασματικό Θεώρημα υπάρχει ΟΚ βάση $\{f_j : j = 1, \dots, nk\}$ του \mathbb{C}^{nk} από ιδιοδιανύσματα του B με ιδιοτιμές $\lambda_j \geq 0$. Δηλαδή

$$B = \sum_{j=1}^{nk} \lambda_j f_j f_j^* = \sum_{j=1}^{nk} v_j v_j^* \quad \text{όπου} \quad v_j = \sqrt{\lambda_j} f_j.$$

Από την Παρατήρηση, γράφοντας κάθε $v_j \in \mathbb{C}^{nk}$ ως διάνυσμα στήλη $v_j = (x_1^j \oplus x_2^j \oplus \dots \oplus x_n^j)^\dagger$ με $x_r^j \in \mathbb{C}^k$, έχουμε

$$v_j v_j^* = [x_r^j x_s^{j*}] = [V_j^* E_{rs} V_j]$$

και συνεπώς

$$[\Phi(E_{rs})] = B = \sum_{j=1}^{nk} [V_j^* E_{rs} V_j] \quad \text{άρα}$$

$$\Phi(E_{rs}) = \sum_{j=1}^{nk} V_j^* E_{rs} V_j \quad 1 \leq r, s \leq n$$

όπως θέλαμε.

