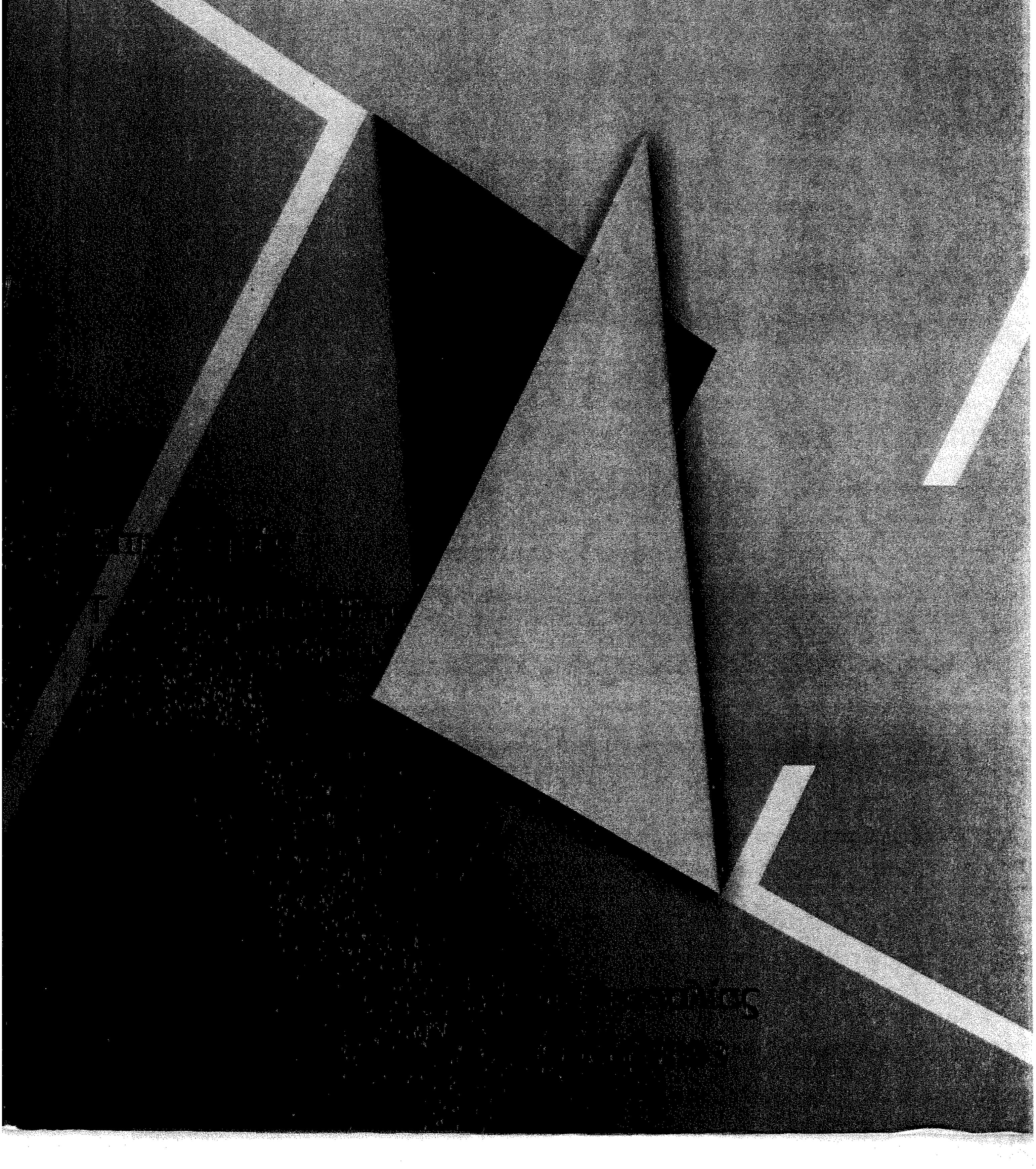
Διδακτική των Μαθηματικών και Πληροφορική στην Εκπαίδευση

Πρακτικά 6ου Πανελληνίου Συνεδρίου με διεθνή συμμετοχή



Επιμέλεια	
Τριαντάφυλλος Α. Τριανταφυλλίδης	Κωνσταντίνος Χατζηκυριάκου
Παναγιώτης Πολίτης	Άννα Χρονάκη

6° Πανελλήνιο Συνέδριο με διεθνή συμμετοχή

Διδακτική των Μαθηματικών και Πληροφορική στην Εκπαίδευση

Πρακτικά εισηγήσεων

Βόλος, Οκτώβριος 2003

Εξομάλυνση: Δραστηριότητα διόρθωσης γεωμετρικών κατασκευών και ανάπτυξης νοημάτων για λόγους και αναλογίες

Γιώργος Ψυχάρης[1]
gpsichar@cti.gr

Στο άρθρο αυτό περιγράφονται πτυχές της δραστηριότητας ομάδων μαθητών της Α' γυμνασίου ενώ εργάζονται με γεωμετρικά προβλήματα αναλογιών, χρησιμοποιώντας κατάλληλα σχεδιασμένα υπολογιστικά εργαλεία πολλαπλής αναπαράστασης (αριθμητικής και γραφικής) της μεταβλητότητας των παραμετρικών μεγεθών με δυνατότητα δυναμικού χειρισμού της. Στο άρθρο παρουσιάζεται η εξομάλυνση, μια δραστηριότητα κατά την οποία τα παιδιά διορθώνουν τα υπό κατασκευή σχήματα αναπτύσσοντας, παράλληλα, νοήματα για τους λόγους και τις αναλογίες. Στη συζήτηση αναλύεται ο ρόλος της εξομάλυνσης στη διαδικασία κατασκευής νοημάτων σε σχέση το υπολογιστικό περιβάλλον και το σχεδιασμό των δραστηριοτήτων κατασκευής, που αποτελούν βασικές παραμέτρους του παιδαγωγικού πλαισίου της έρευνας.

Εισαγωγή

Στο άρθρο αυτό παρουσιάζουμε ερευνητικά αποτελέσματα σχετικά με την καταγραφή και ανάλυση δραστηριοτήτων που αναπτύσσουν ομάδες μαθητών, ενώ εργάζονται σε προβλήματα γεωμετρικών κατασκευών και χρησιμοποιούν κατάλληλα σχεδιασμένα υπολογιστικά εργαλεία. Η δραστηριότητα που παρουσιάζουμε εδώ αποκαλείται *εξομάλυνση* και χρησιμοποιείται ως εργαλείο ανάλυσης της αλληλεπίδρασης των παιδιών με το υπολογιστικό περιβάλλον και των νοημάτων που αναπτύσσουν για τις έννοιες του λόγου και της αναλογίας. Η δραστηριότητα, με άξονα την οποία πραγματοποιείται η έρευνα, είναι η κατασκευή αυξομειούμενων γεωμετρικών σχημάτων ως μέρος της υλοποίησης ενός εκπαιδευτικού σεναρίου για τη δημιουργία μιας γραμματοσειράς. Οι εμπλεκόμενες μαθηματικές έννοιες του λόγου και της αναλογίας θεωρούνται ενσωματωμένες στο ίδιο εννοιολογικό πλέγμα (conceptual field, Vergnaud, 1987) με άλλες, όπως η ομοιότητα και η μεταβλητή. Στα πλούσια σε όγκο ερευνητικά αποτελέσματα από το χώρο της μαθηματικής παιδείας καταγράφεται η ύπαρξη σημαντικών προβλημάτων στην κατανόηση των εννοιών αυτών από τους μαθητές (Hart 1981, 1984, Tourniaire and Pulos, 1985, Behr et al., 1987), ενώ αμφισβητείται η αποτελεσματικότητα των διαφόρων τρόπων διδασκαλίας και επισημαίνεται η έλλειψη εποπτικών μέσων στις εκάστοτε διδακτικές τους προσεγγίσεις στο σχολείο (Hoyles & Sutherland, 1989, Hoyles et al., 1989). Οι πλέον συνηθισμένες στρατηγικές των μαθητών για την επίλυση των προβλημάτων μεγέθυνσης ή σμίκρυνσης είναι οι προσθετικές, σύμφωνα με τις οποίες όμοιο σχήμα προς ένα αρχικό προκύπτει με πρόσθεση ή αφαίρεση κατάλληλων μηκών από τα μήκη των πλευρών του μέχρι αυτά να εξισωθούν με εκείνα των αντίστοιχων πλευρών του αρχικού σχήματος. Οι σχετικές έρευνες σε μη υπολογιστικά περιβάλλοντα έχουν αναδείξει ότι σε αυτά τα προβλήματα οι μαθητές διακρίνουν δύσκολα την αναλογία (Kuchemann, 1991), ενώ ασχολούμενα με τη μέθοδο που θα ακολουθήσουν και τους αριθμητικούς υπολογισμούς, ξεχνούν ότι τελικά θα πρέπει να προκύψει σχήμα όμοιο με το αρχικό (Hoyles et al., 1989).

Στο πλαίσιο αυτό, οι λειτουργικότητες του απασχολούμενου υπολογιστικού περιβάλλοντος (constuctionism, Harel and Papert, 1991) όσο και ο παιδαγωγικός σχεδιασμός των εκπαιδευτικών δραστηριοτήτων (Noss & Hoyles, 1996, Cobb, 2000, Hoyles, 2001) αποτελούν κεντρικές συνιστώσες της ερευνητικής μας προσέγγισης. Το

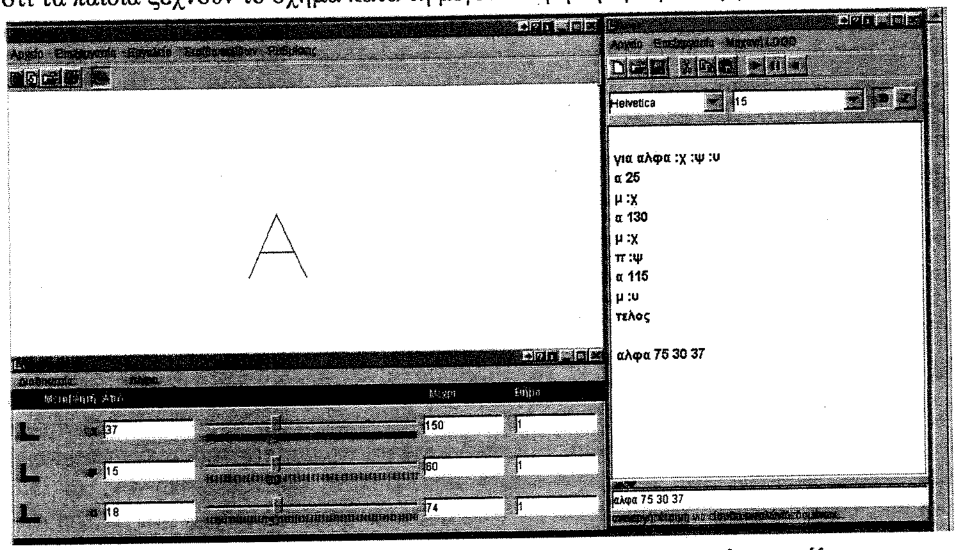
[1] Τομέας Παιδαγωγικής, ΦΠΨ, Πανεπιστήμιο Αθηνών.

συγκεκριμένο υπολογιστικό περιβάλλον (Χελωνόκοσμος, http://etl.ppp.uoa.gr) προσφέρεται για γεωμετρικές κατασκευές και συνδυάζει εργαλεία συμβολικής έκφρασης, μέσω προγραμματιστικής γλώσσας, με παράλληλη δυνατότητα δυναμικού χειρισμού μεταβλητών μεγεθών (Kynigos et al., 1997, Kynigos, 2002). Ο συνδυασμός των παραπάνω εργαλείων, που απηχεί στον αντίστοιχο συνδυασμό δυο διαφορετικών ειδών αναπαραστάσεων (συμβολικού και γραφικού), αποτελεί αναπόσπαστο μέρος του παιδαγωγικού σχεδιασμού του συγκεκριμένου περιβάλλοντος. Το 'σύρσιμο' (dragging), για παράδειγμα, στο περιβάλλον αυτό είναι σχεδιασμένο να επηρεάζει τόσο το γεωμετρικό αντικείμενο όσο και τη συμβολική περιγραφή μέσω της οποίας κατασκευάστηκε, επιτυγχάνοντας έτσι το δυναμικό χειρισμό και των δύο αναπαραστάσεων. Ο διασύνδεση των δύο λειτουργικοτήτων στο ίδιο περιβάλλον μπορεί να αποτελέσει πρόσφορο πεδίο έρευνας σχετικά με το είδος των μαθηματικών νοημάτων που αναπτύσσονται σε αυτό, χωρίς την απουσία του μαθηματικού συμβολισμού. Η συσχέτιση αυτή αποκτάει ιδιαίτερη βαρύτητα καθώς, γενικότερα, η νοηματοδότηση του μαθηματικού φορμαλισμού ελέγχεται προβληματική (Dubinsky, 2000), ενώ η διασύνδεση των μαθηματικών νοημάτων και των συμβολικών αντιπροσώπων τους παραμένει κεφαλαιώδους σημασίας για τη μάθηση και τη διδασκαλία των μαθηματικών (Cobb et al., 2000). Ο σχεδιασμός εκπαιδευτικών δραστηριοτήτων, από την άλλη, είναι η δεύτερη βασική παράμετρος στην οποία αποδίδουμε ιδιαίτερη βαρύτητα, τόσο ως εργαλείου έρευνας (Hoyles, 2001) όσο και ως συστατικού στοιχείου της προσωπικής νοηματοδότησης των αποτελεσμάτων μιας δραστηριότητας από τους μαθητές (Ainley & Pratt, 2002).

Το ερευνητικό πλαίσιο και οι δραστηριότητες

Η παρούσα έρευνα πραγματοποιήθηκε σε ένα γυμνάσιο με ενσωματωμένη την εισαγωγής της χρήσης υπολογιστών σε όλα σχεδόν τα γνωστικά αντικείμενα. Σε αυτήν συμμετείχαν δύο τμήματα της Α' γυμνασίου και οι δύο αντίστοιχοι καθηγητές μαθηματικών. Οι μαθητές εργάζονταν ανά δύο σε συνεργαζόμενες ομάδες στο εργαστήριο υπολογιστών στη διάρκεια ενός δίωρου μαθήματος κάθε εβδομάδα στο οποίο δίδασκαν οι συμμετέχοντες καθηγητές. Οι ομάδες των παιδιών κλήθηκαν να κατασκευάσουν μια γραμματοσειρά με όλα τα κεφαλαία γράμματα του ελληνικού αλφαβήτου με μεταβλητό μέγεθος, ώστε να αυξομειώνονται με τον ίδιο τρόπο όταν τοποθετούνται το ένα δίπλα στο άλλο. Για το λόγο αυτό ζητήθηκε στην κατασκευή κάθε γράμματος να χρησιμοποιηθούν όσο το δυνατόν λιγότερες μεταβλητές, με απώτερο στόχο τη χρήση μιας μεταβλητής, ώστε να επιτευχθεί η ζητούμενη αυξομείωση μέσω της συνεχούς αλλαγής της. Κάθε ομάδα ανέλαβε δύο γράμματα. Η κατασκευή ενός αυξομειούμενου σχήματος, γενικά, μπορεί να επιτευχθεί: α) Με χρήση της αναλογίας των μηκών των πλευρών ενός σταθερού αρχικού μοντέλου του σχήματος που πρέπει να είναι ισοδύναμοι, και β) Με χρήση των λόγων μεταξύ των αντίστοιχων μηκών δύο όμοιων σταθερών μοντέλων του σχήματος που πρέπει επίσης να είναι ισοδύναμοι. Από την επιστημολογική ανάλυση των εννοιών του λόγου και της αναλογίας, στο πλαίσιο της παρούσας έρευνας, προέκυψαν τα υποθέματα: α) Συσχέτιση αριθμητικών τιμών και μεταβλητών για την κατασκευή λόγου και αναλογικής σχέσης (αλληλεξάρτηση) β) Συσχέτιση της γραφικής αναπαράστασης των συμμεταβαλλόμενων πλευρών κατά την αλλαγή του μεγέθους τους σε ένα αυξομειούμενο γεωμετρικό σχήμα (συμμεταβολή).

Κύριο χαρακτηριστικό του απασχολούμενου υπολογιστικού περιβάλλοντος είναι η δυνατότητα πολλαπλής αναπαράστασης (αριθμητικής και γραφικής) των μεταβαλλόμενων μεγεθών και ο δυναμικός χειρισμός των αριθμητικών τιμών τους μέσα από το σύρσιμο αριθμητικών λωρίδων κύλισης, τους οποίους αποκαλούμε μεταβολείς, έχοντας παράλληλα και το αντίστοιχο δυναμικό αποτέλεσμα των αλλαγών στη γραφική αναπαράστασή τους. Στην οθόνη μαζί με τη γραφική αναπαράσταση και το μεταβολέα εμφανίζεται και ένα πεδίο συμβολικής έκφρασης όπου κάθε κατασκευή περιγράφεται μέσα από μια διαδικασία με Logo (Σχήμα 1). Τα συγκεκριμένα εργαλεία αποτελούν πρόσφορα πεδία μελέτης των εννοιών λόγου και αναλογίας καθόσον: α) Οι έννοιες αυτές προκύπτουν αναπόφευκτα κατά τον σχεδιασμό και την αυξομείωση ενός γεωμετρικού σχήματος με τη χρήση μεταβλητών (Hoyles and Sutherland, 1989) και β) Η ενιαία μορφή των διαφορετικών περιοχών αναπαράστασης μπορεί να βοηθήσει στο ότι τα παιδιά ξεχνούν το σχήμα κατά τη μεγέθυνση ή τη σμίκρυνση (Hart, 1984).



Σχήμα 1: Το υπολογιστικό περιβάλλον με τη διαδικασία κατασκευής του άλφα με τρεις μεταβλητές.

Οι μαθητές του συγκεκριμένου σχολείου ήταν εξοικειωμένοι με τη χρήση της Logo από προηγούμενα έτη όπως και με τη χρήση μεταβλητών. Στην έναρξη της δραστηριότητας έγινε η εισαγωγή τους στη χρήση του μεταβολέα μέσα από απλά παραδείγματα μεταβλητών κατασκευών (τετράγωνο, ορθογώνιο, κύκλος). Η εφαρμογή της δραστηριότητας στην τάξη διήρκεσε συνολικά 16 διδακτικές ώρες (2 κάθε εβδομάδα) και απλώθηκε χρονικά σε διάστημα περίπου δύο μηνών. Οι ερευνητές είχαν το ρόλο του συμμετοχικού παρατηρητή. Σε κάθε τμήμα επιλέχτηκε μία ομάδα δύο μαθητών (ομάδα εστίασης) των οποίων τα λεγόμενα και οι ενέργειες καταγράφηκαν λεπτομερώς. Καταγράφηκαν επίσης τα λεγόμενα του διδάσκοντα και η συνολική δραστηριότητα της τάξης. Ο στόχος μας ήταν: α) να μελετηθεί και να κατηγοριοποιηθεί η φύση της δραστηριότητας που αναπτύσσουν τα παιδιά κατά τη δημιουργία νοημάτων για λόγους και αναλογίες και β) να φωτιστεί η συσχέτιση των δραστηριοτήτων αυτών με την χρήση των προσφερόμενων υπολογιστικών εργαλείων και το σενάριο των δραστηριοτήτων κατασκευής.

Μέθοδος

Η προσέγγιση του σχολείου έγινε υιοθετώντας εθνογραφικές μεθόδους μέσα από την καλλιέργεια συνεργατικής σχέσης ανάμεσα στους ερευνητές και τη σχολική κοινότητα. Στο πλαίσιο αυτής της σχέσης και καθ' όλη τη διάρκεια εφαρμογής πραγματοποιούνταν εβδομαδιαίες συναντήσεις των ερευνητών με τους συμμετέχοντες εκπαιδευτικούς, μέσα από τις οποίες θεσμοθετήθηκε σταδιακά ο ενεργός ρόλος των τελευταίων στη συνδιαμόρφωση της εφαρμογής των δραστηριοτήτων στην τάξη. Σε κάθε διδακτική ώρα στην τάξη βρίσκονταν δύο ερευνητές. Για τη συλλογή δεδομένων χρησιμοποιήθηκαν δύο κάμερες και ένα ασύρματο μικρόφωνο. Η μία κάμερα ήταν σταθερά στραμμένη στη ομάδα εστίασης. Το ασύρματο μικρόφωνο κατέγραφε το λόγο του διδάσκοντα και η δεύτερη κάμερα κατέγραφε το γενικό κλίμα της τάξης. Η δεύτερη κάμερα σε κάποιες περιπτώσεις μετεκινείτο –σύμφωνα με την κρίση του ερευνητή- για την λεπτομερέστερη καταγραφή ενδιαφερόντων επεισοδίων από άλλες ομάδες με τις οποίες ο ερευνητής άνοιγε διάλογο. Οι ερευνητές παρενέβαιναν στις ομάδες όταν έκριναν ότι κάτι τέτοιο βοηθούσε την εξέλιξη ενός ενδιαφέροντος επεισοδίου. Όλο το υλικό των δεδομένων παρατήρησης απομαγνητοφωνήθηκε για την ανάλυση. Η δομή των αποτελεσμάτων όσο και η διασαφήνιση των ερευνητικών ερωτημάτων μορφοποιήθηκαν από τα ίδια τα δεδομένα, ενώ η ανάλυση βασίστηκε κυρίως σε πρακτικές ανάλυσης διαλόγων (Goetz & LeCompte, 1984). Σε πρώτο επίπεδο, οι επάλληλες αναγνώσεις και συγκρίσεις επεισοδίων οδήγησαν στην θεματική κατηγοριοποίηση των πεπραγμένων κάθε ομάδας. Στη συνέχεια κάθε επεισόδιο κατηγοριοποιήθηκε με βάση τον τύπο δραστηριότητας των παιδιών κατά την ανάπτυξη μαθηματικών νοημάτων. Τέλος, η μελέτη των βιντεοταινιών οδήγησε στην ομαδοποίηση των ενεργειών των παιδιών με βάση τη χρήση των διαθέσιμων υπολογιστικών πεδίων.

Η εξομάλυνση

Χρησιμοποιούμε τον όρο *Εξομάλυνση* για την περιγραφή της δραστηριότητας, σύμφωνα με την οποία, τα παιδιά, μη αποδεχόμενα τις μορφές του υπό κατασκευή γράμματος, προσπαθούν να το τροποποιήσουν με βάση μια αποδεκτή από τα ίδια φόρμα. Μεγάλο μέρος των επεισοδίων αυτών περιλαμβάνει τον έλεγχο των δεδομένων και την επανάληψη της κατασκευής μετά από σχετικές διορθωτικές ενέργειες. Στα επεισόδια που παρουσιάζονται ακολούθως οι ενέργειες εξομάλυνσης διαχωρίζονται με βάση το αποκαλούμενο *διορθωτικό πεδίο* στο οποίο ανήκουν. Ο όρος αυτός αναφέρεται στο εμφανές, ή μη, πλαίσιο στο οποίο πραγματοποιούνται οι διορθωτικές ενέργειες και χαρακτηρίζεται από το κριτήριο ή κίνητρο για τη διόρθωση της εκάστοτε γεωμετρικής κατασκευής.

Επεισόδιο 1 - Διορθωτικό πεδίο: Η ατελής μεγέθυνση του προτύπου

Στο επόμενο παράδειγμα, η εξομάλυνση συνδέεται με την διαπίστωση της αλληλεξάρτησης μεγεθών, υποθέματος της κατασκευής όμοιων σχημάτων. Οι μαθητές, εδώ, έχουν κατασκευάσει άλφα με χρήση τριών μεταβλητών για τα μήκη του γράμματος, με τη διαδικασία που φαίνεται στο σχήμα 2. Έχει προηγηθεί η κατασκευή ενός αρχικού άλφα, χωρίς τη χρήση μεταβλητών και είναι αυτό που τα παιδιά θα επιχειρήσουν σε επόμενο στάδιο να αυξομειώσουν αναλογικά. Το γράμμα αυτό, που θα αποκαλούμε *πρότυπο* του άλφα, έχει κατασκευαστεί για τις σταθερές τιμές 75, 30 και 37 (βλ. σχήμα 1).

Στη διαδικασία που φαίνεται στο σχήμα 1, το 75 αντιστοιχεί στη μεταβλητή χ, το 30 στην ψ και το 37 στην υ. Στην οθόνη έχει κατασκευαστεί το πρότυπο του άλφα και οι τρεις μεταβολείς βρίσκονται στις σχετικές τιμές. Ο Μ1 κινεί για πρώτη φορά τους μεταβολείς. Ενώ σέρνει το μεταβολέα του χ, ο Μ2 προτείνει να τον τοποθετήσει στο 150.

Μεταβάλλοντας τη συγκεκριμένη μεταβλητή, που αντιστοιχεί στα πλάγια τμήματα, ο Μ1 διαπιστώνει ότι πρέπει να αλλάξει και τις υπόλοιπες καθώς το πρότυπο χαλάει (σχήμα 2).

417. *Ε* *Τώρα εδώ, όπως κινείς τον πρώτο μεταβολέα, τι συμβαίνει;*

418. *Μ1* *Μεγαλώνει η πλευρά ...*

419. *Ε* *75 ποιο είναι τώρα;*

420. *Μ1* *Το μήκος.*

421. *Ε* *Ποιο μήκος;*

422. *Μ1* *[Δείχνοντας τα πλάγια τμήματα του άλφα] Αυτό εδώ.*

423. *Μ2* *[Στον Μ1] Πήγαινέ το στο 150.*

424. *Μ1* *[Το σχήμα χαλάει] Αλλά πρέπει να μεγαλώσω και αυτό εδώ πέρα [ενν. το υ].*

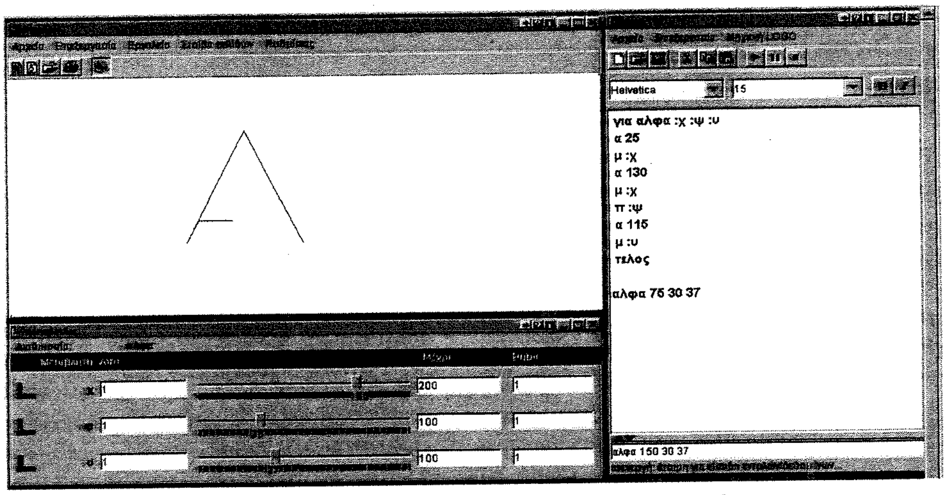
425. *Ε* *[Στον Μ1 που μετακινεί το μεταβολέα του υ] Τι αλλάζεις εκεί τώρα με το ύψιλον;*

426. *Μ1* *Τώρα άλλαζα με το ύψιλον και αυτή εδώ πέρα την ... [ενν. πλευρά ή μεταβολέα].*

427. *Ε* *Ναι, αλλά το άλφα σου αυτό, βγήκε τώρα αυτή η γραμμούλα πολύ χαμηλή.*

[Ο Μ1, χωρίς να μιλήσει, μετακινεί και το μεταβολέα του ψ μεγαλύτερη τιμή, 'ανεβάζοντας' έτσι την οριζόντια γραμμή στο σχήμα].

(Βιντεοσκόπηση ομάδας εστίασης)



Σχήμα 2: Το πρότυπο του άλφα χαλάει με τη μετακίνηση της μεταβλητής χ.

Εδώ, η διορθωτική διαδικασία έχει αφετηρία το 'χάλασμα' του αρχικού σχήματος με το μεγάλωμα των πλάγιων τμημάτων του άλφα, όταν ο μεταβολέας του χ τοποθετείται στην τιμή 150. Μέσω αυτής της ενέργειας εικονοποιείται η αλληλεξάρτηση των εμπλεκόμενων μεγεθών και η εξομάλυνση συνεχίζεται με την κατάλληλη αλλαγή του μήκους του οριζόντιου τμήματος του άλφα, ώστε να εφαρμόσει σωστά στα πλάγια τμήματα. Με τις αλλαγές αυτές, όμως, έχει αλλάξει και το σημείο εκκίνησης για το σχεδιασμό του οριζόντιου τμήματος, που εκφράζει η μεταβλητή ψ. Έτσι, στο άλφα που προκύπτει το οριζόντιο τμήμα έχει σχεδιαστεί δυσανάλογα χαμηλά, πράγμα που επισημαίνει ο Ε. (γραμμή 427). Με αυτό τον τρόπο ανοίγει ένα νέο διορθωτικό πεδίο εξομάλυνσης για την ανύψωση της οριζόντια πλευράς, κάτι που πραγματοποιεί ο Μ1 μετακινώντας τον τρίτο μεταβολέα σε μεγαλύτερη τιμή.

Προς το παρόν η αλλαγή των μεταβλητών δεν είναι αναλογική και τα παιδιά φαίνεται να δίνουν προτεραιότητα στην σχεδίαση μιας αποδεκτής φόρμας του νέου μεγαλύτερου μεγέθους γράμματος. Εδώ, καταγράφουμε τη βαθμιαία εστίαση των μαθητών στην ύπαρξη αλληλεξάρτησης των εμπλεκόμενων μεγεθών και όχι στο είδος της. Η αξιοποίηση της εμπειρίας αυτής στην περαιτέρω διερεύνηση της κατασκευής φαίνεται στο επόμενο επεισόδιο.

Επεισόδιο 2 - Διορθωτικό πεδίο: Η διατήρηση του λόγου ομοιότητας

Η διαδικασία κατασκευής του άλφα είναι και πάλι αυτή που φαίνεται στο σχήμα 1. Τα παιδιά, που έχουν αρχίσει να εξοικειώνονται με τις αλλαγές των αριθμητικών τιμών και την μετακίνηση των μεταβολέων, προχωρούν σε 'κατευθυνόμενες' αλλαγές και εξομάλυνση του σχήματος. Ο Μ1, που χειρίζεται το πληκτρολόγιο, έχει προηγουμένως πειραματιστεί μετακινώντας τους μεταβολείς στο διπλάσιο και το μισό των αρχικών του σταθερού προτύπου. Μάλιστα, έχει ορίσει ως τιμή έναρξης σε κάθε μεταβολέα το μισό της αρχικής τιμής του προτύπου και ως τιμή λήξης το διπλάσιό της, όπως φαίνεται στα όρια τιμών των μεταβολέων στο σχήμα 1. Στο απόσπασμα που ακολουθεί ο Μ1 'χαλάει' το σχήμα βάζοντας έναν-έναν τους μεταβολείς στη μικρότερη τιμή.

454.	*Ε*	*[Στον Μ1] Τι αλλάζεις τώρα;*
455.	*Μ1*	*Το βάζω στο μικρότερο μέγεθος. [Χαλάει προς στιγμήν το σχήμα κινώντας κάθε μεταβολέα στη μικρότερη τιμή].*
456.	*Μ2*	*Άρα, πρέπει να μελετήσουμε τη σχέση για να βρούμε το σωστό.*
457.	*Ε*	*Ποια σχέση;*
458.	*Μ2*	*Τη σχέση των τριών αριθμών. Για να μπορέσουμε να βρούμε μια σχέση,*
459.		*αν μπορέσουμε, ώστε να μην χρειάζεται κάθε φορά να το σκεφτόμαστε.*

(Βιντεοσκόπηση ομάδας εστίασης)

Είναι αξιοσημείωτος, εδώ, ο τρόπος με τον οποίο κάθε μαθητής εκφράζει μαθηματικά νοήματα στο πλαίσιο της διερεύνησης των τρόπων σχεδιασμού της ζητούμενης κατασκευής. Ο Μ1 βάζοντας τα συγκεκριμένα όρια στους μεταβολείς πετυχαίνει την κατασκευή όμοιου σχήματος με την κατακόρυφη τοποθέτηση και των τριών μεταβολέων στο ίδιο σημείο της λωρίδας κύλισης: με την μετακίνησή τους στο μεσαίο σημείο κάθε λωρίδας κατασκευάζεται το πρότυπο, ενώ και στα δύο άκρα το όμοιο σχήμα με πλευρές το μισό και το διπλάσιο του προτύπου αντίστοιχα. Εδώ, γίνεται εμφανές με ποιο τρόπο η διαισθητική προσέγγιση της αναλογίας μορφοποιείται (Noss & Hoyles, 1996) μέσω των εργαλείων του υπολογιστικού περιβάλλοντος. Ο Μ2, από την άλλη, μιλώντας για σχέση (γραμμή 456) αναφέρεται στη συσχέτιση των εκάστοτε τριάδων αριθμών μεταξύ τους, ώστε το πρόβλημα της κατασκευής να λυθεί για όλες τις μετέπειτα προσπάθειες (γραμμή 459). Το αναδυόμενο νόημα εδώ, σχετίζεται με το είδος της σχέσης αλληλεξάρτησης μεταξύ των μεγεθών της κατασκευής, βήμα απαραίτητο για την μετέπειτα εύρεση του λόγου ομοιότητας. Η διαδικασία αυτή έχει ολοκληρωθεί στο επόμενο επεισόδιο.

Επεισόδιο 3 - Διορθωτικό πεδίο: Η γραφική ασυνέχεια των συμμεταβαλλόμενων μεγεθών

Εδώ, τα παιδιά έχουν κατασκευάσει το αυξομειούμενο άλφα με μια μεταβλητή χ. Για τα μεταβλητά μήκη έχουν διαιρέσει τη μεταβλητή χ με συντελεστές που προέκυψαν από την διαίρεση των σταθερών τιμών των μηκών του προτύπου: χ=75, ψ=30 και υ=37. Οι τιμές 2,5 και 2,03 προέκυψαν από τα πηλίκα 75:30 και 75:37 αντίστοιχα. Στη δεύτερη τιμή έγινε στρογγυλοποίηση από τους μαθητές. Η παράσταση χ/2,03 αντιστοιχεί στο μήκος του οριζόντιου τμήματος.

Καθώς ο Μ1 μετακινεί το μοναδικό μεταβολέα του χ σε όλο και μεγαλύτερες τιμές ο ερευνητής επισημαίνει ότι το οριζόντιο τμήμα μοιάζει να μην εφαρμόζει ακριβώς στην πλάγια γραμμή στην οποία καταλήγει (σχήμα 3).

251. Ε Δεν κλείνει όμως καλά η γραμμή. Μένει ένα κενό εκεί;

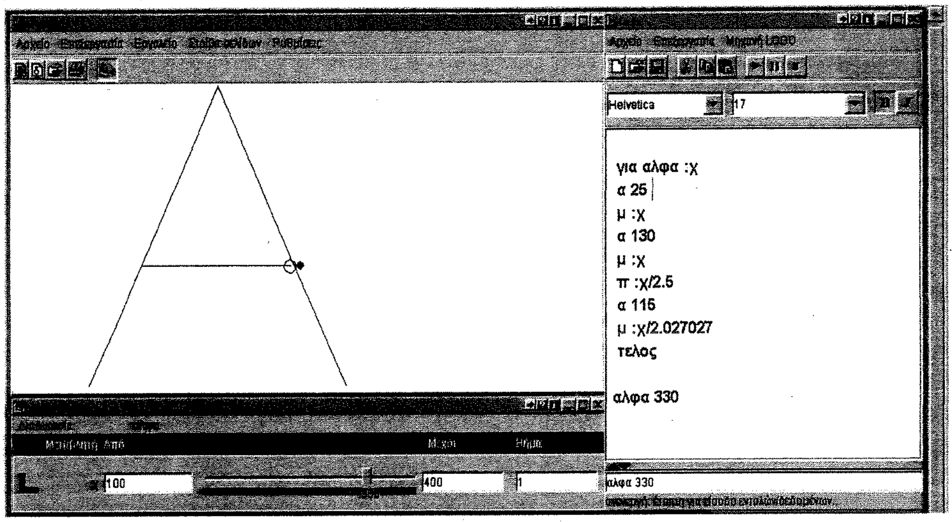
252. Μ2 Ναι.

253. Μ1 Επειδή 2,03 ήτανε στρογγυλοποιημένο ... δεν μπορεί, θα ήτανε 2,27.

254. Ε Πώς θα γίνει όμως να το κλείσετε καλά;

255. Μ2 Πρέπει να κάνουμε πιο ακριβή ... διαίρεση.

(Βιντεοσκόπηση ομάδας εστίασης)



Σχήμα 3: Το αυξομειούμενο άλφα με μία μεταβλητή.

Μετά την επισήμανση του ερευνητή, τα παιδιά κάνουν αμέσως σύνδεση με την αριθμητική τιμή 2,03 και με την ακρίβεια της διαίρεσης από την οποία προέκυψε. Αφού επιβεβαιώνουν ότι το αποτέλεσμα της διαίρεσης είναι 2,027027..., βάζουν στη θέση του παρονομαστή το νούμερο 2,027027, θεωρώντας ότι είναι πιο κοντά στο πραγματικό αποτέλεσμα.

291. Ε Τι είναι αυτό το νούμερο παιδιά;

292. Μ2 75 δια 37. Το βάλαμε όλο για να μην υπάρχει μια κενή γραμμή εδώ πέρα.

293. Μ1 Ναι, γιατί εδώ, όταν το μεταβάλλαμε αυτή τη γραμμή, δεν έκλεινε εντελώς.

294. Μ2 Καλύτερη είναι όμως η διαφορά. Πριν είχε πιο πολύ.

295. Μ1 Να το κάνουμε ακόμα πιο πολύ.

296. Μ2 [Βάζοντας κι άλλο 027στον αριθμό 2,027027 στον παρονομαστή] Κι άλλο ένα μηδέν δύο εφτά.

(Βιντεοσκόπηση ομάδας εστίασης)

Από την πλευρά του μαθηματικού περιεχομένου το πεδίο στο οποίο λαμβάνει χώρα η διορθωτική διαδικασία είναι αυτό της δυναμικής συμμεταβολής των πλευρών όμοιων γεωμετρικών σχημάτων με σταθερό λόγο ομοιότητας. Το ότι το μέτρο του λόγου των συγκεκριμένων μεγεθών δεν επιτρέπει ακριβή ταύτιση των τμημάτων στο γράφημα, οδηγεί στον έλεγχο της διαίρεσης και μετέπειτα στην καλύτερη δυνατή προσέγγιση. Έτσι, το 'πιο πολύ' του Μ2 (γραμμή 295) μοιάζει να αναφέρεται τόσο στο συμβολικό μέγεθος της προσέγγισης (περισσότερα ψηφία) όσο και στην καλύτερη δυνατή ακρίβεια στο σχήμα. Στην πραγματικότητα, η τιμή 37 για το οριζόντιο μήκος στο πρότυπο δεν είναι ακριβής. Στο ισοσκελές τρίγωνο που σχηματίζουν τα πλάγια τμήματα και το οριζόντιο (με γωνία κορυφής 50°) η βάση και οι ίσες πλευρές είναι ασύμμετρα μεγέθη. Το σχήμα στο πρότυπο φάνηκε να κλείνει γιατί οι αρχικές τιμές ήταν μικρές και αλλαγές σε αυτή την κλίμακα δεν γίνονται αντιληπτές στην οθόνη. Η ίδια διαδικασία όμως θα παρατηρείτο ακόμα και αν είχε τεθεί για μήκος η επόμενη ακέραια τιμή, το 38, που είναι πιο κοντά στην πραγματική. Για μεγάλες τιμές του χ η ελάχιστη αυτή διαφορά θα φαινόταν και πάλι στο σχήμα. Εδώ, επισημαίνουμε όχι το μέτρο και την ακρίβεια της προσέγγισης, αλλά τη διαφαινόμενη διασύνδεση συμβολικής και γραφικής αναπαράστασης μέσα από τη μετεξέλιξη της εξομάλυνσης σε δραστηριότητα δυναμικής προσέγγισης της μεταβλητότητας των συμμεταβαλλόμενων μεγεθών.

Συζήτηση

Στα επεισόδια που προηγήθηκαν παρουσιάστηκαν διαφορετικές πτυχές της δραστηριότητας εξομάλυνσης κατά τη εργασία των παιδιών για το σχεδιασμό των ζητούμενων γεωμετρικών κατασκευών. Μέσω της εξέλιξης της εξομάλυνσης καταγράφεται η ύπαρξη διαλεκτικής σχέσης μεταξύ της συγκεκριμένης δραστηριότητας και της εστίασης των παιδιών σε ιδιότητες και σχέσεις. Η εκάστοτε απόπειρα εξομάλυνσης σχετίζεται άμεσα με την αντίστοιχη εξέλιξη στο 'κοίταγμα' του σχήματος από τα παιδιά και την συνακόλουθη έμφαση σε ιδιότητες και σχέσεις που διέπουν τις γεωμετρικές κατασκευές. Στο πρώτο επεισόδιο το διορθωτικό κριτήριο βασίστηκε στην οπτική αναγνώριση της αλληλεξάρτησης των μεγεθών της κατασκευής και δεν διασυνδέθηκε αμέσως με κάποιας μορφής αναλογικότητα. Στο δεύτερο επεισόδιο, τα παιδιά έδειξαν να αποκτούν έλεγχο της διορθωτικής διαδικασίας με βάση συγκεκριμένα κριτήρια (διπλασιασμός και υποδιπλασιασμός των μηκών) ώστε ανέκυψε η ανάγκη αριθμητικής συσχέτισης των μεγεθών της κατασκευής για την μετέπειτα αυξομείωσή της. Στο τρίτο επεισόδιο, η εξομάλυνση είχε πιο σύνθετο χαρακτήρα και σχετίστηκε με τη δυναμική προσέγγιση της μεταβολής των αλληλεξαρτώμενων πλευρών του αυξομειούμενου σχήματος.

Σε αυτό το πλαίσιο, η εξομάλυνση αναδύεται ως μια διαρκώς εξελισσόμενη δραστηριότητα με διττό τρόπο: από τη μια μέσω αυτής καταγράφεται η εξέλιξη της αίσθησης των μαθητών για τις προϋποθέσεις της αυξομείωσης των γεωμετρικών κατασκευών, ενώ από την άλλη η αύξηση της αναγνώρισης λόγων και αναλογιών ενισχύει προοδευτικά την αποτελεσματικότητά της ως διορθωτικής μεθόδου. Όσο η αίσθηση για την αυξομείωση και τους τρόπους επίτευξής της εγκαθίστατο στην πρακτική των παιδιών, τόσο πιο αποτελεσματικές γίνονταν οι διορθωτικές τους απόπειρες. Θα πρέπει να σημειωθεί, επίσης, ότι η επίτευξη της τελικής κατασκευής του αυξομειούμενου σχήματος δεν σηματοδοτεί το οριστικό τέλος της εξομάλυνσης ούτε και των διαδικασιών ανάπτυξης νοημάτων. Αρκεί να επιστρέψουμε στο τρίτο επεισόδιο. Εκεί, παρόλο που τα παιδιά εμφανίζονται με σύνθετες αλγεβρικές δυνατότητες έκφρασης βλέπουν ότι η προσεγγιστική διαδικασία του οριζόντιου τμήματος του άλφα μπορεί να είναι με μια έννοια οριακή καθώς το σχήμα και πάλι δεν κλείνει ακριβώς για μεγάλες τιμές της μοναδικής μεταβλητής. Το στοιχείο αυτό μπορεί να αποτελέσει μέρος ενός νέου διορθωτικού πεδίου σε μια καινούργια διορθωτική διαδικασία που, ενδεχομένως, θα ακολουθήσει.

Η συγκεκριμένη μελέτη είναι στενά συνδεδεμένη με δύο παράγοντες: το υπολογιστικό περιβάλλον και το σενάριο κατασκευής της γραμματοσειράς. Το υπολογιστικό περιβάλλον, λόγω σχεδιασμού, ευνοεί τις αλληλεπιδράσεις ανάμεσα στα διασυνδεόμενα πεδία αναπαράστασης μιας αναλογικής σχέσης. Η συνοχή που παρέχει σχετίζεται τόσο με την παράμετρο του χώρου (πολλαπλότητα αναπαραστάσεων) όσο και με την παράμετρο του χρόνου (ταυτόχρονη προβολή). Κατά την εξέλιξη της εξομάλυνσης η διασύνδεση συμβολικής έκφρασης και γραφικής αναπαράστασης γινόταν αμεσότερη και συνθετότερη γεγονός που καταγράφεται σταδιακά στα τρία προηγούμενα επεισόδια. Σε αυτή τη διαδικασία η χρήση του μεταβολέα μορφοποιήθηκε σε αυτή του αναλυτικού εργαλείου διασύνδεσης των διαφορετικών αναπαραστάσεων της αναλογίας και της πειραματικής διαδικασίας με τα αποτελέσματα των κατασκευών. Η δεύτερη παράμετρος που λαμβάνουμε σοβαρά υπόψη είναι αυτή του σεναρίου της γραμματοσειράς. Το σενάριο αυτό, που αποτέλεσε τη βάση του σχεδιασμού δραστηριοτήτων, χαρακτηρίζεται από έναν εμφανή στόχο: την κατασκευή αυξομειούμενων γραμμάτων που δεν θα 'χαλάνε' με την αυξομείωση, γεγονός που συμβαδίζει με την λειτουργικότητα μιας γραμματοσειράς εντός και εκτός υπολογιστή. Κατά την εξέλιξη της δραστηριότητας στην τάξη φάνηκε ότι ο κρίκος σύνδεσης στόχου και εργαλείων ήταν ιδιαίτερα παραγωγικός όσον αφορά την ανακάλυψη των απαραίτητων ιδιοτήτων και σχέσεων για την ολοκλήρωση των ζητούμενων κατασκευών. Έτσι, το πλαίσιο για την εμπλοκή των μαθητών στην κατασκευαστική διαδικασία και την επακόλουθη ανάπτυξη μαθηματικών νοημάτων μοιάζει να καλλιεργήθηκε κυρίως μέσω της συσχέτισης στόχου και χρήσης των κατασκευών παρά από το μαθηματικό περιεχόμενο καθαυτό (Ainley et al. 2001).

Βιβλιογραφία

Ainley, J., Pratt, D. & Nardi, E. (2001) Normalising: Children's activity to construct meanings for trend, Educational Studies in Mathematics, 45: 131-146.

Ainley, J. & Pratt, D. (2002) Purpose and utility in pedagogic task design, Proceedings of the 26th PME Conference, Norwich, England, Vol. 2., pp. 17-24.

Behr, M., Harel, G., Post, T. & Lesh, R. (1987) Theoretical analysis: Structure and hierarchy, missing value proportion problems, Proceedings of the 11th PME, Vol. II, 269-274, Montreal.

Cobb, P., Yackel, E. & McClain, K. (eds.) (2000) Symbolizing and Communicating in Mathematics Classrooms, Lawrence Erlbaum Associates.

Cobb, P. (2000) The importance of a situated view of learning to the design of research and instruction, in Boaler, J. (ed.) Multiple Perspectives of Mathematics Teaching and Learning, Ablex Publishing, Westport, CT, USA, pp. 45-82.

Dubinsky, E. (2000) Meaning and formalism in mathematics, International Journal of Computers for Mathematical Learning, 5: 211-240.

Goetz, J. P. and LeCompte, M. D. (1984) Ethnography and Qualitative Design in Educational Research, Academic Press, London.

Harel, I. and Papert, S. (eds) (1991) Constructionism: Research Reports and Essays, Ablex Publishing Corporation, Norwood, New Jersey.

Hart, K. M. (Ed.) (1981) Children's Understanding of Mathematics, John Murray, London.

Hart, K. M. (1984) Ratio: Children's strategies and errors. Windsor: NFER-Nelson.

Hoyles, C. & Sutherland, R. (1989) Logo Mathematics in the Classroom, London, Routledge.

Hoyles, C., Noss, R. & Sutherland, R. (1989) The Ratio and Proportion Microworld, Final report of the Microworlds project, Vol. III, Institute of Education, University of London.

Hoyles, C. (2001) From describing to designing mathematical activity: The next step in developing the social approach to research in maths education, Educational Studies in Maths 46: 273-286.

Kuchemann, D. (1991) The effect of setting and numerical content on the difficulty of ratio tasks, Proceedings of the 15th PME Conference, Vol. II, Paris.

Kynigos, C., Koutlis, M. & Hatzilacos, T. (1997) Mathematics with component-oriented exploratory software, International journal of Computers for Mathematical Learning, 2, 229-250.

Kynigos C. (2002) Generating cultures for mathematical microworld development in a multi-organisational context, Journal of Educational Computing Research. Baywood Publishing Co. Inc. (1 and 2), 183-209.

Noss, R. & Hoyles, C. (1996) Windows on Mathematical Meanings, Kluwer Academic Publishers.

Tourniaire, F. & Pulos, S. (1985) Proportional reasoning: A review of the literature, Educational Studies in Mathematics, 16, pp. 181-204.

Vergnaud, G. (1987) About constructivism, Proceedings of the 11th PME Conference, Dordrecht, 43-54, Montreal.