

2
+

E

V.

E.

Δ

I.

M.

τυπωθήτω

Πανελλήνιο Συνέδριο

Ενωσης
Ερευνητών

Διδακτικής των Μαθηματικών

Τυπικά και άτυπα μαθηματικά:
χαρακτηριστικά, σχέσεις και αλληλεπιδράσεις
στο πλαίσιο της μαθηματικής εκπαίδευσης

Πρακτικά Συνεδρίου

23-25 νοεμβρίου 2007

Δημοκρίτειο Πανεπιστήμιο Θράκης

Σχολή Επιστημών της Αγωγής

Αλεξανδρούπολη

carme2007.edu.duth.gr

2ο Συνέδριο της Ένωσης Ερευνητών Διδακτικής των Μαθηματικών

**Τυπικά και άτυπα μαθηματικά: χαρακτηριστικά, σχέσεις
και αλληλεπιδράσεις στο πλαίσιο της μαθηματικής εκπαίδευσης**

Αλεξανδρούπολη, 23 – 25 Νοεμβρίου 2007

**Δημοκρίτειο Πανεπιστήμιο Θράκης
Σχολή Επιστημών της Αγωγής**

5. Η εφαρμογή του λογισμικού τρισδιάστατης γεωμετρίας Origami Nets στη διδασκαλία του αναπτύγματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου
X. Λοϊζού, N. Μουσούλιδης 478
6. «Το μάθημα δεν είναι μόνο αριθμοί, είναι και πράγματα»:
 αλγεβρικά πλακίδια και «αδύναμοι» μαθητές
M. Μαρμαρά, K. Χατζηκυριάκου 488
7. Χρήση ομαδικού ιστολογίου για την υποστήριξη διαδικασιών μάθησης με σχεδιασμό. Η περίπτωση φοιτητών που σχεδιάζουν μαθησιακές δραστηριότητες γεωμετρίας για τεχνολογικά περιβάλλοντα
Γ. Φεσάκης, K. Τάτσης, A. Δημητρακοπούλου 498
8. Πλοήγηση και γεωμετρικές κατασκευές με χρήση τρισδιάστατου υπολογιστικού περιβάλλοντος
Γ. Ψυχάρης, X. Κυνηγός 509

Θεματική ενότητα IV : Η εκπαίδευση των εκπαιδευτικών για μια κοινωνικο-πολιτισμική οπτική της μαθηματικής εκπαίδευσης

1. Οργάνωση και αξιολόγηση προγράμματος επαγγελματικής ανάπτυξης στη στατιστική εκπαίδευση
Γ. Ανδρεάδης, Θ. Χατζηπαντελής 523
2. Διερευνώντας τη γνώση των εκπαιδευτικών μέσω υποθετικών σεναρίων διδασκαλίας: ένα παράδειγμα από τη διδασκαλία των ορίων
Θ. Ζαχαριάδης, E. Μπιζά, E. Ναρδή 534
3. Τα αριθμητικά συστήματα στο πλαίσιο της επιμόρφωσης των εκπαιδευτικών πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης
K. Νικολαντωνάκης 545
4. Η συνεργασία μεταξύ εκπαιδευτικών και ερευνητών στο πλαίσιο μιας κοινότητας διερεύνησης των διδακτικών πρακτικών στα μαθηματικά: μια μελέτη
X. Σακονίδης, Δ. Πόταρη, A. Μαναρίδης, P. Χατζηγούλα 556
5. Πεποιθήσεις των εκπαιδευτικών της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης για τα μαθηματικά και τη διδασκαλία τους
X. Σακονίδης, A. Κλώθου 568

ΠΛΟΗΓΗΣΗ ΚΑΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΕΣ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΤΡΙΣΔΙΑΣΤΑΤΟΥ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΟΥ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΟΣ

Γ. Ψυχάρης, Χ. Κυνηγός
Εργαστήριο Εκπαιδευτικής Τεχνολογίας, ΕΚΠΑ
gpsych@ppp.uoa.gr, kynigos@ppp.uoa.gr

Στο άρθρο αυτό παρουσιάζονται αποτελέσματα που αφορούν την εμπλοκή 12χρονων μαθητών σε διαδικασίες πλοήγησης και κατασκευής γεωμετρικών σχημάτων στον τρισδιάστατο χώρο. Οι μαθητές εργάστηκαν σε ομάδες χρησιμοποιώντας ένα τρισδιάστατο υπολογιστικό περιβάλλον που διαθέτει διασυνδεόμενες αναπαραστάσεις συμβολικής έκφρασης και δυναμικού χειρισμού γεωμετρικών αντικειμένων. Στα ενρήματα καταγράφεται η σταδιακή νοηματοδότηση του τρισδιάστατου χώρου μέσα από την κατασκευή και το δυναμικό χειρισμό δισδιάστατων γεωμετρικών σχημάτων.

Εισαγωγή

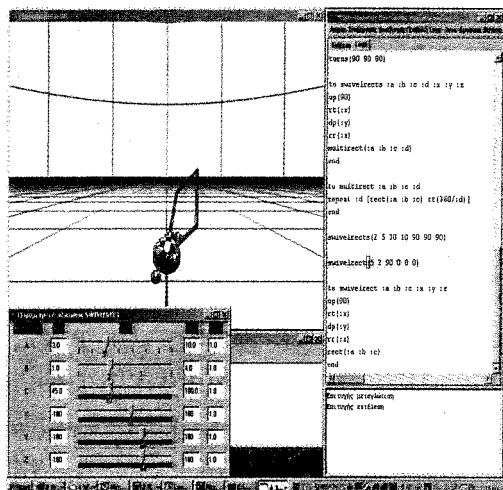
Στο παρόν άρθρο παρουσιάζουμε αποτελέσματα από μια πιλοτική έρευνα μικρής έκτασης με στόχο τη διερεύνηση των διαδικασιών πλοήγησης και κατασκευής γεωμετρικών σχημάτων σε τρισδιάστατο εικονικό υπολογιστικό περιβάλλον. Κύριο σημείο εστίασης αποτέλεσαν οι διαδικασίες κατασκευής και χειρισμού δισδιάστατων γεωμετρικών αντικειμένων που μελετήθηκαν στο πλαίσιο της νοηματοδότησης του τρισδιάστατου χώρου σε σχέση με δισδιάστατες αναπαραστάσεις μέσα από τη χρήση των διαθέσιμων υπολογιστικών εργαλείων. Στην έρευνα συμμετείχαν δύο ομάδες 12χρονων μαθητών που εργάστηκαν χρησιμοποιώντας την πρώτη έκδοση του υπολογιστικού περιβάλλοντος MachineLab TurtleWorlds (MaLT) [1], ο σχεδιασμός του οποίου βασίζεται στη διασύνδεση αναπαραστάσεων συμβολικής έκφρασης και δυναμικού χειρισμού γεωμετρικών αντικειμένων στον τρισδιάστατο χώρο (Kynigos & Latsi in press). Το MaLT έρχεται να προστεθεί στον διαρκώς αυξανόμενο αριθμό υπολογιστικών περιβαλλόντων που αφορούν τη διδασκαλία και τη μάθηση της γεωμετρίας του χώρου μέσα από την άρση παλιών εμποδίων αναπαράστασης και τη διάθεση νέων μέσων στους μαθητές (Yeh & Nason 2004, Cabrilog 2005, Christou et al. 2005). Τα μέσα αυτά σχετίζονται με ειδικά σχεδιασμένες λειτουργικότητες που επιτρέπουν τη μετακίνηση σε εικονικούς τρισδιάστατους χώρους αλλά και την κατασκευή γεωμετρικών αντικειμένων σε αυτούς, παρέχοντας δυνατότητες κιναισθητικού χειρισμού και μετασχηματισμού τους όπως και αλλαγής της οπτικής γωνίας

παρατήρησής τους από διαφορετικά σημεία. Έτσι, όροι όπως πλοήγηση (*navigation*) και εξεικόνιση (*visualization*) έρχονται στο προσκήνιο στην προσπάθεια να περιγραφούν οι λειτουργικότητες των αντίστοιχων υπολογιστικών περιβαλλόντων αλλά και οι δυναμικές διαδικασίες κατασκευής της μαθηματικής γνώσης κατά την αλληλεπίδραση των μαθητών με τις δομές και τις έννοιες που βρίσκονται ενσωματωμένες στις διαθέσιμες οπτικές μαθηματικές αναπαραστάσεις (Cuoco & Cursio 2001). Στο χώρο της διδακτικής των μαθηματικών ο όρος πλοήγηση αναφέρεται στη δυνατότητα μετακίνησης μέσω μιας οπτικής αναπαράστασης του τρισδιάστατου χώρου και μπορεί να συνοδεύεται από διαδικασίες αναζήτησης διαδρομής και κατεύθυνσης που περιλαμβάνουν τόσο τον καθορισμό της θέσης όσο και την εύρεση τρόπων μετακίνησης σε διαφορετικές θέσεις. Σε μια πρόσφατη κατηγοριοποίηση του συνόλου των αλληλεπιδράσεων των μαθητών με οπτικές μαθηματικές αναπαραστάσεις στα υπολογιστικά περιβάλλοντα (Sedig & Sumner 2006) η πλοήγηση κατατάσσεται στις θεμελιώδεις αλληλεπιδράσεις, καθώς σχετίζεται με τη μεταφορά της χρήσης του ανθρώπινου σώματος κατά την αλληλεπίδρασή του με το φυσικό κόσμο (π.χ. περπάτημα) και έτσι θεωρείται ισχυρό εργαλείο στην προοπτική της νοηματοδότησης των οπτικών αναπαραστάσεων που αφορούν τη μελέτη του τρισδιάστατου χώρου. Η εξεικόνιση, από την άλλη, αναφέρεται στην αμοιβαία διασύνδεση μεταξύ της πρόσβασης σε αντικείμενα μέσω των αισθήσεων και της δημιουργίας εσωτερικών νοητικών κατασκευών (Zimmermann & Cunningham 1991). Μάλιστα, η συγκεκριμένη διασύνδεση μπορεί να περιγραφεί προς δύο κατευθύνσεις: “είτε ως νοητική κατασκευή αντικειμένων που κάποιος προσλαμβάνει ως εξωτερικά ως προς αυτόν είτε ως κατασκευή αντικειμένων ή γεγονότων σε κάποιο εξωτερικό μέσο (όπως χαρτί ή οθόνη υπολογιστή) που κάποιος επινοεί χρησιμοποιώντας τη σκέψη του.” (Zazkis, Dubinsky & Dautermann 1996, σελ. 144). Στο πλαίσιο αυτό αποκτά κεντρικό ρόλο η σχέση της αλληλεπίδρασης μαθητών-υπολογιστικών εργαλείων με την κατασκευή της μαθηματικής γνώσης. Αναγνωρίζοντας τον ισχυρό ρόλο που κατέχουν η διαίσθηση και η σωματική εμπλοκή στη συγκεκριμένη σχέση, οι Nemirovsky και Noble (1997) περιγράφουν την αλληλεπίδραση των μαθητών με ένα υπολογιστικό περιβάλλον ως μια διαδικασία κατασκευής ενός νοητικού «χώρου» («lived-in-space») - η φύση και τα χαρακτηριστικά του οποίου είναι αναδυόμενα και καθορισμένα με την εμπειρία των συμμετεχόντων- ενώ η σχέση εξεικόνισης και κατασκευής μαθηματικού νοήματος γίνεται αντιληπτή ως μια δυναμική διαδικασία διασύνδεσης του «εξωτερικού» (π.χ. των αναπαραστάσεων) με το «εσωτερικό» (π.χ. τη σκέψη ενός μαθητή).

Με δεδομένη, λοιπόν, την αλληλοδιαπλοκή της εξεικόνισης με τις εσωτερικές διαδικασίες κατασκευής της μαθηματικής γνώσης, οι δυνατότητες κιναισθητικής

πρόσβασης και χειρισμού μαθηματικών αναπαραστάσεων στα υπολογιστικά περιβάλλοντα που αφορούν τον τρισδιάστατο χώρο έχουν ενισχύσει το ερευνητικό ενδιαφέρον να μελετηθούν υπό νέο πρίσμα κεντρικά ζητήματα που αφορούν τη διδασκαλία και τη μάθηση εννοιών της γεωμετρίας του χώρου, όπως για παράδειγμα η σχέση των διαισθήσεων και των εμπειριών των μαθητών με τη νοητική αναπαράσταση του τρισδιάστατου χώρου (Clements & Battista 1992) ή οι δυσκολίες που συνοδεύουν τη συσχέτιση δισδιάστατων και τρισδιάστατων αναπαραστάσεων (Gutiérrez 1996). Στο επίκεντρο του ενδιαφέροντός μας στην παρούσα έρευνα βρέθηκε ο μετασχηματισμός της εμπειρίας χρήσης του υπολογιστικού περιβάλλοντος στη σταδιακή νοηματοδότηση του τρισδιάστατου χώρου μέσα από διαδικασίες κατασκευής και χειρισμού δισδιάστατων γεωμετρικών σχημάτων.

Το υπολογιστικό περιβάλλον

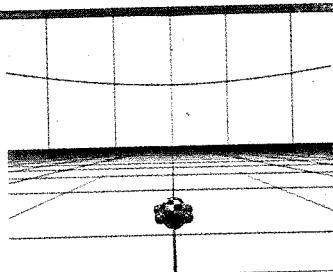


Εικόνα 1: Γεωμετρική κατασκευή στο MaLT με έξι μεταβλητές.

αριστερά-δεξιά κατά ν μοίρες» («leftroll-rightroll n degrees» ή «up-dp n degrees») και «στρέφομαι

(2) **Σκηνή.** Αποτελεί μια εικονική προσομοίωση του τρισδιάστατου χώρου όπου εμφανίζεται το γραφικό αποτέλεσμα των εντολών για μια γεωμετρική κατασκευή ως το ίχνος που αφήνει κατά τη μετακίνησή της ένα τρισδιάστατο μοντέλο χελώνας. Η χελώνα είναι σχεδιασμένη με τέτοιο τρόπο ώστε να διακρίνεται το κεφάλι της και άρα ο προσανατολισμός της, ενώ το ίχνος της αναπαρίσταται ως μια λεπτή κυλινδρική γραμμή που μπορεί να είναι επιλέξιμη από το χρήστη. (3) **Μονοδιάστατος μεταβολέας.** Είναι το εργαλείο δυναμικού χειρισμού των μεταβλητών μεγεθών μιας

γεωμετρικής κατασκευής που επιτυχάνεται μέσα από το σύρσιμο ειδικών λωρίδων κύλισης που αποκαλούνται μεταβολείς και αντιστοιχούν στην κάθε μεταβλητή. Μαζί με τη μεταβολή των τιμών μιας μεταβλητής αναπαρίσταται και η αντίστοιχη αλλαγή που επισυμβαίνει στο γραφικό αποτέλεσμα.



Εικόνα 2: Η αρχική θέση της χειλώνας.

Η σκηνή στο MaLT δεν αναπαριστά το φυσικό κόσμο αλλά την προοπτική προβολή ενός εικονικού τρισδιάστατου χώρου. Αυτό σημαίνει ότι το μέγεθος των αντικειμένων μειώνεται όσο προχωράμε προς το εσωτερικό, στο βάθος του οποίου φαίνεται η γραμμή του ορίζοντα. Οι παράλληλες μεταξύ τους εγκάρσιες ευθείες που είναι κάθετες στη γραμμή του ορίζοντα, φαίνεται να τέμνονται σε κάποιο σημείο της, ενώ οι παράλληλες με αυτήν παραμένουν παράλληλες σχηματίζοντας με τις εγκάρσιες την «πλακόστρωση» του ορίζοντιου επιπέδου. Η εμφάνιση

της χειλώνας στο υπολογιστικό περιβάλλον γίνεται με την εκτέλεση μιας οποιασδήποτε εντολής, ενώ η αρχική της θέση βρίσκεται σε ένα επίπεδο παράλληλο προς το ορίζοντιο και με κατεύθυνση προς το εσωτερικό της οθόνης (Εικόνα 2).

Σχεδιασμός και μεθοδολογία της έρευνας

Η έρευνα που παρουσιάζεται εδώ αποτελεί μέρος των πιλοτικών ερευνών που έγιναν για την προετοιμασία μιας μεγάλης κλίμακας έρευνας με χρήση του MaLT σε δημόσια ελληνικά σχολεία που θα ακολουθήσει κατά την ακαδημαϊκή χρονιά 2007-08. Στην έρευνα συμμετείχαν τέσσερις μαθητές της έκτης τάξης ενός δημοτικού σχολείου της Αθήνας, οι οποίοι χωρίστηκαν σε ζεύγη και απασχολήθηκαν για έξι ώρες το καθένα. Η έρευνα έλαβε χώρα στο εργαστήριο υπολογιστών του σχολείου, ενώ η επιλογή των μαθητών έγινε με βάση το ενδιαφέρον τους για συμμετοχή σε αυτή. Έτσι, ως μεθοδολογικό πλαίσιο υιοθετήθηκε η μελέτη περίπτωσης (Yin 1994) που περιελάμβανε σχεδίαση πειράματος (Cobb et al. 2003) και συμμετοχική παρατήρηση δύο ερευνητριών για την καταγραφή ανθρώπινων δραστηριοτήτων που λαμβάνουν χώρα σε πραγματικό χρόνο. Οι δραστηριότητες διαρθρώθηκαν σε δύο φάσεις: την εισαγωγική και τη φάση της κατασκευής ορθογωνίων. Στην πρώτη φάση, μετά από τη συνοπτική παρουσίαση των εντολών κίνησης και στροφής της χειλώνας από τις ερευνήτριες, τα παιδιά κλήθηκαν να μετακινήσουν τη χειλώνα σε διαφορετικά σημεία της τρισδιάστατης σκηνής και ακολούθως να προσπαθήσουν να την επαναφέρουν στο ίδιο σημείο χρησιμοποιώντας απλές εντολές. Στην επόμενη φάση, έγινε εισαγωγή

στην έννοια της διαδικασίας στη Logo και τα παιδιά κλήθηκαν να κατασκευάσουν ορθογώνια σε διαφορετικά σημεία της σκηνής. Ακολούθως, οι ερευνήτριες παρουσίασαν τον τρόπο χρήσης των μεταβλητών σε μία διαδικασία και το δυναμικό χειρισμό τους με τη χρήση του μεταβολέα. Έτσι, στο τελευταίο μέρος των δραστηριοτήτων ζητήθηκε από τα παιδιά η χρήση μεταβλητών για την κατασκευή και το δυναμικό χειρισμό ορθογωνίων διαφορετικών μεγεθών στην τρισδιάστατη σκηνή. Όλες οι συναντήσεις βιντεοσκοπήθηκαν και απομαγνητοφωνήθηκαν για την ανάλυση.

Μέθοδος ανάλυσης

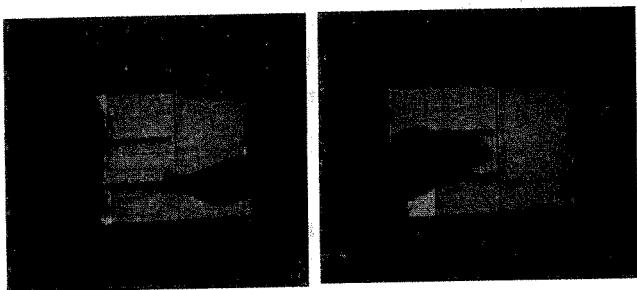
Στην ανάλυση υιοθετήθηκε η φαινομενολογική προσέγγιση σύμφωνα με την οποία οι ερμηνείες των ερευνητών εστιάστηκαν στην αλληλεπίδραση των παιδιών με τις προσφερόμενες αναπαραστάσεις και στα νοήματα που αναπτύσσουν από τη δική τους σκοπιά με στόχο τη δυνατότητα περιγραφής της σταδιακής δημιουργίας του νοητικού χώρου που αναδύθηκε μέσα από την εμπειρία χρήσης των υπολογιστικών εργαλείων («lived-in space», Nemirovsky & Noble 1997). Ιδιαίτερα ενδιέφερε η εξαγωγή επεισοδίων που εξελίσσονταν με άξονα τη λεκτική και τη σωματική εμπλοκή των παιδιών (π.χ. με χειρονομίες ή με χρήση άλλων αντικειμένων) κατά την περιγραφή της πλοήγησης στον τρισδιάστατο χώρο, όπως και τα αναδυόμενα νοήματα που αφορούσαν τη συσχέτιση μεταξύ των εικονιζόμενων γεωμετρικών αντικειμένων και του τρισδιάστατου χώρου.

Αποτελέσματα

Δισδιάστατα επίπεδα στον τρισδιάστατο χώρο

Η αφετηρία νοηματοδότησης του τρισδιάστατου χώρου συνδυασμένη με την αναγνώριση και τη διάκριση δισδιάστατων επιπέδων ανέκυψε από τις οπτικές και κιναισθητικές εμπειρίες των μαθητών κατά τα αρχικά στάδια πλοήγησης της χελώνας στην τρισδιάστατη σκηνή του MaLT. Το οριζόντιο επίπεδο στο οποίο εμφανίζεται αρχικά η χελώνα θεωρήθηκε από τους μαθητές ως μια μεταφορά του επιπέδου του εδάφους, παρότι στην πραγματικότητα η μετακίνηση λαμβάνει χώρα σε ένα οριζόντιο επίπεδο παράλληλο προς αυτό. Κατά το πρώτο δίωρο και οι δύο ομάδες μαθητών επέλεξαν να μετακινήσουν τη χελώνα είτε στο συγκεκριμένο οριζόντιο επίπεδο κατασκευάζοντας απλές τεθλασμένες γραμμές (ομάδα A) είτε στο επίπεδο της οθόνης (κάθετο στο οριζόντιο) κατασκευάζοντας οικεία γεωμετρικά σχήματα όπως π.χ. ένα μοντέλο του γράμματος T (ομάδα B), παρότι το ζητούμενο από την ερευνήτρια αφορούσε την πλοήγηση σε διαφορετικά σημεία της τρισδιάστατης σκηνής και επιστροφή στο σημείο εκκίνησης (αναφέροντας

ενδεικτικά την προσομοίωση της τροχιάς απογείωσης-προσγείωσης ενός αεροπλάνου). Πέρα από την απαραίτητη ανάγκη εξοικείωσης των παιδιών με τις νέες εντολές στροφής στο χώρο, η προτίμηση αυτή θα μπορούσε επίσης να ερμηνευτεί με βάση το γεγονός ότι οι μαθητές ήταν ελάχιστα εξοικειωμένοι με γεωμετρικές κατασκευές στον τρισδιάστατο χώρο και άρα με τις συμβάσεις που χρησιμοποιούνται κατά την αναπαράστασή τους στο δισδιάστατο επίπεδο της οθόνης (Lowrie 2002). Η εξεικόνιση του χώρου σε αυτό το στάδιο χαρακτηρίστηκε από την αναγνώριση των συγκεκριμένων δισδιάστατων επιπέδων στα οποία έλαβε χώρα η πλοϊγηση, εμπεριέχοντας όμως μια άτυπη αναγνώριση ενός τρισορθογώνιου συστήματος συντεταγμένων βάσει του οποίου καθορίζεται η θέση τους. Τα παιδιά της ομάδας B, για παράδειγμα, χρησιμοποίησαν από την αρχή την εντολή up (90) για τη μετακίνηση της χελώνας από το οριζόντιο επίπεδο στο κάθετό του επίπεδο της οθόνης λόγω της εξοικείωσής τους με τη συνήθη εικόνα προβολής της οθόνης («το κάναμε ώστε να το βλέπουμε [ενν. καλύτερα] εμείς»).



Εικόνα 3: Αναπαράσταση των επιπέδων των ορθογωνίων με τις παλάμες.

τα ορθογώνια που σχεδίασαν στο επίπεδο της οθόνης ως «όρθια» και τα αντίστοιχα ορθογώνια στο οριζόντιο επίπεδο ως «ξαπλωτά» χρησιμοποιώντας μάλιστα τις παλάμες τους για να δηλώσουν τη θέση τους στο χώρο αλλά και τη μεταξύ τους σχέση, αισθητοποιώντας με αυτόν τον τρόπο νοητικές εικόνες της δομής του τρισδιάστατου χώρου που διαμόρφωσαν (Εικόνα 3).

Η γωνία ως δυναμική ποσότητα μετακίνησης σε διαφορετικά επίπεδα στο χώρο

Οι χρήσεις και οι ερμηνείες των προσφερόμενων στροφών από τα παιδιά βρέθηκαν στο επίκεντρο της ανάλυσης, καθώς σχετίζονται άμεσα με την αλλαγή επιπέδων και, άρα, με την εισαγωγή στον τρισδιάστατο χώρο. Η μετακίνηση της χελώνας στην τρισδιάστατη σκηνή του MaLT απαιτεί μια δυναμική πρόσληψη της γωνίας ως στροφής μέσα από τη σύνθεση δύο σχημάτων: της στροφής ως κίνησης του σώματος και της στροφής ως μέτρησης (σε μοίρες) στην οποία αντιστοιχεί μια

αριθμητική τιμή (Clements et al. 1996). Παρότι η μετακίνηση στον εικονικό τρισδιάστατο χώρο μέσω ενός τρισδιάστατου μοντέλου χελώνας μοιάζει να βρίσκεται πλησιέστερα σε καθημερινές κιναισθητικές εμπειρίες των παιδιών, η ανάλυση των δεδομένων φέρνει στο προσκήνιο νέα ζητήματα και προκλήσεις σχετικά με την αντίληψη της γωνίας ως στροφής από τους μαθητές. Πιο συγκεκριμένα, η μεταφορά του συντονισμού του ανθρώπινου σώματος με τη χελώνα μοιάζει να είναι πλησιέστερη στη δισδιάστατη παρά στην τρισδιάστατη γεωμετρία, καθώς οι κινήσεις του ανθρώπου στον τρισδιάστατο χώρο δεν αντιστοιχούν επακριβώς στους ποικίλους συνδυασμούς αλλαγής επιπέδου και κίνησης που μπορεί να εκτελέσει η χελώνα στο MaLT. Η δυσκολία αυτή καταγράφηκε και στην παρούσα έρευνα και εκφράστηκε μέσα από τις δυσκολίες των παιδιών να κατανοήσουν το νόημα ύπαρξης των εντολών στροφής (roll) του σώματος της χελώνας γύρω από τον άξονα «κεφάλι-ουρά» (πρ προς τα δεξιά, lr προς τα αριστερά). Από την άλλη, η πλοήγηση στην τρισδιάστατη σκηνή του MaLT φαίνεται να ευνόησε την ανάδυση ενός νέου πλαισίου αναφοράς (Yakimanskaya et al. 1991) με βάση το οποίο αναπτύχθηκαν οι ερμηνείες των μαθητών για την πλοήγηση στον τρισδιάστατο χώρο και αφορούσε την αντιμετώπιση της χελώνας ως κινούμενης οντότητας και, άρα, τον καθορισμό του προσανατολισμού της με βάση την κατεύθυνση του κεφαλιού της. Στο πλαίσιο αυτό τα παιδιά και των δύο ομάδων θεώρησαν απαραίτητη την εντολή up (90) για την κατασκευή σχημάτων στο επίπεδο της οθόνης (Πίνακας 1, Διαδικασία 1). Όταν η ερευνήτρια παρακίνησε τα παιδιά να σκεφτούν περισσότερο δυναμικά τη συγκεκριμένη εντολή καλώντας τα να περιγράψουν τι θα συνέβαινε στο σχήμα για διαφορετικές τιμές της, οι μαθητές της Ομάδας B ενεπλάκησαν σε μια φανταστική μετακίνηση του ορθογωνίου σε διαφορετικές θέσεις που αναπαρήγαγαν με τη μετακίνηση μιας παλάμης τους από το δάπεδο προς τα πάνω.

E: Με την up (90) τι είχε κάνει [ενν. η χελώνα];

M2: [Δείχνει με την παλάμη το επίπεδο της οθόνης] Μας το είχε σηκώσει έτσι.

E: Αν βάλουμε dr όχι 90 αλλά 45, πώς νομίζετε ότι θα γίνει;

M2: Περίπου στη μέση.

E: Αν βάλουμε 50;

M1: Εντάξει, όχι στη μέση. [Δείχνοντας με την παλάμη] Λίγο παραπάνω από τη μέση.

to orth	to orth :a :b :c	to orth :a :b :c :d
up(90)	up(90)	up(:d)
fd(5)	fd(:a)	fd(:a)
rt(90)	rt(:c)	rt(:c)
fd(7)	fd(:b)	fd(:b)
rt(90)	rt(:c)	rt(:c)
fd(5)	fd(:a)	fd(:a)
rt(90)	rt(:c)	rt(:c)
fd(7)	fd(:b)	fd(:b)
rt(90)	rt(:c)	rt(:c)
end	end	end

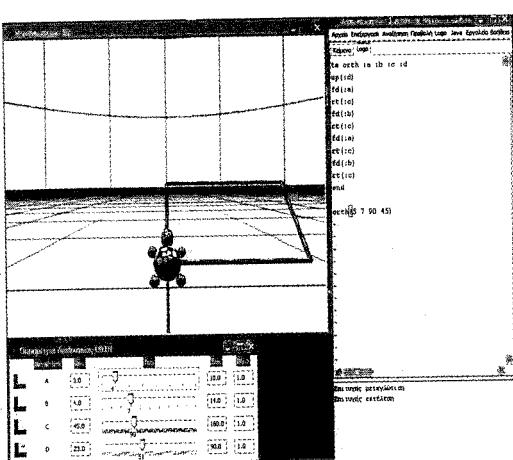
Διαδικασία 1

Διαδικασία 2

Διαδικασία 3

Πίνακας 1: Οι διαδικασίες κατασκευής ορθογωνίου σε διαδοχικές φάσεις (Ομάδα B).

που αντιστοιχεί στη μεταβλητή :d επιτυγχάνοντας το δυναμικό «σήκωμα» του ορθογωνίου από το οριζόντιο επίπεδο (Εικόνα 4).



Εικόνα 4. Δυναμική μετακίνηση του ορθογωνίου στο χώρο.

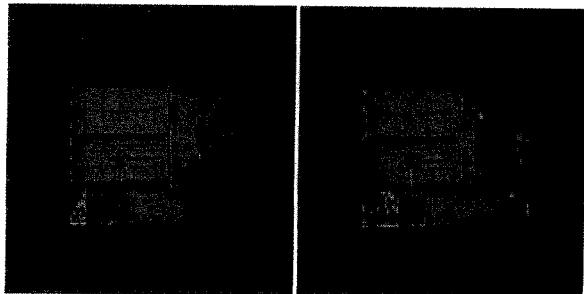
Η παραπάνω διαδικασία αναπαράστασης απέκτησε περισσότερο δυναμικό χαρακτήρα όταν ακολούθως μεταφέρθηκε στο υπολογιστικό περιβάλλον. Καθώς οι μαθητές της Ομάδας B που είχαν ήδη χρησιμοποιήσει μεταβλητές στη διαδικασία κατασκευής ορθογωνίου (Πίνακας 1, Διαδικασία 2), δοκίμασαν αμέσως την αντικατάσταση της σταθερής τιμής 90 στην αρχική εντολή up με μια νέα μεταβλητή d (Πίνακας 1, Διαδικασία 3). Στο απόσπασμα που ακολουθεί, τα παιδιά της συγκεκριμένης ομάδας μετακινούν το μεταβολέα

M1: [Κινώντας το μεταβολέα :d] Αν το βάλουμε πιο πάνω, θα σηκωθεί ... Αν το βάλουμε πιο κάτω, θα κατέβει. Νάτο.

Εδώ, η νοηματοδότηση της γωνίας ως μεταβαλλόμενης ποσότητας στροφής συνδυάζεται με τη δυναμική μετάβαση σε διαφορετικά επίπεδα του τρισδιάστατου χώρου και την ταυτόχρονη οπτικοποίηση της μετακίνησης μιας δισδιάστατης αναπαράστασης στο «εσωτερικό» της σκηνής. Το επεισόδιο αυτό σηματοδοτεί την έναρξη των αναδυόμενων διαδικασιών μετάβασης από το δισδιάστατο στον τρισδιάστατο μέσα από τη συνδυασμένη χρήση συμβολικής έκφρασης και δυναμικού χειρισμού.

Δυναμικός χειρισμός και προσομοίωση τρισδιάστατων αντικειμένων

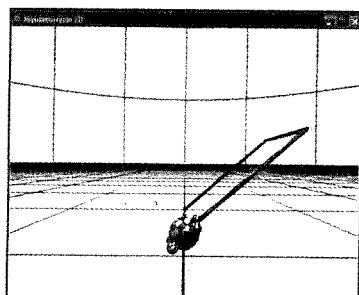
Η σταδιακή εξοικείωση των παιδιών με τη χρήση μεταβλητών και μεταβολέων δημιουργησε πρόσφορο έδαφος για την περαιτέρω επέκταση του πειραματισμού τους σχετικά με την αλλαγή της θέσης του ορθογωνίου στο χώρο. Σε αντίθεση με τους μαθητές της Ομάδας Α που δυσκολεύτηκαν να ενσωματώσουν τις εντολές περιστροφής στο χώρο σε διαδικασίες κατασκευής, οι μαθητές της Ομάδας Β συνέδεσαν την αναγνώριση της δυνατότητας στροφής του ορθογωνίου με πραγματικά αντικείμενα που περιλαμβάνουν συνεχή στροφή στο χώρο (π.χ. φύλλο πόρτας). Η ερευνήτρια άδραξε την ευκαιρία και τα ρώτησε αν θα μπορούσαν να στρέψουν το ορθογώνιο που κατασκεύασαν με τρόπο που να αναπαριστά το άνοιγμα ενός φύλλου πόρτας. Τότε, οι συγκεκριμένοι μαθητές συνέδεσαν για πρώτη φορά το ζητούμενο με τη χρήση των εντολών περιστροφής (roll), καθώς η αναπαράσταση με την παλάμη της περιστροφικής κίνησης της χελώνας που είχαν επιχειρήσει νωρίτερα τους θύμιζε την κίνηση του κινούμενου φύλλου της πόρτας.



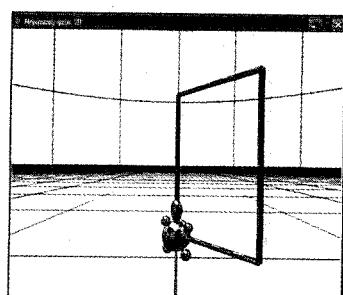
Εικόνα 5: Αναπαράσταση της θέσης και της κατεύθυνσης περιστροφής του ορθογωνίου με χρήση αντικειμένου.

Έτσι, προκειμένου να κατανοήσουν τη διασύνδεση των στροφών της χελώνας με τον τρόπο μετακίνησης του επιπέδου του ορθογωνίου στο χώρο, χρησιμοποιήσαν τη θήκη των κασετών της βιντεοκάμερας για την αναπαράστασή του (Εικόνα 5). Ο επακόλουθος πειραματισμός των μαθητών με το υπολογιστικό περιβάλλον περιελάμβανε τη λανθασμένη ενσωμάτωση μιας εντολής περιστροφής -της *rr (:d)*- ως αρχικής στη Διαδικασία 3 του Πίνακα 1,

η οποία αντικατέστησε την εντολή *up (:d)*.



Εικόνα 6.



Εικόνα 7.

Η δυναμική μετακίνηση του μεταβολέα *:d* οδήγησε στην περιστροφή του ορθογωνίου σε άξονα κάθετο προς το επίπεδο της οθόνης («γυρίζει σαν ρόδα», Εικόνα 6), ενώ οι επάλληλες δοκιμές, που βασίστηκαν τόσο στις εναλλαγές της ακολουθίας των εντολών όσο και στη χρήση της κασέτας, οδήγησαν τα παιδιά στο συμπέρασμα ότι για την αναπαράσταση του

της κασέτας, οδήγησαν τα παιδιά στο συμπέρασμα ότι για την αναπαράσταση του

ανοίγματος της πόρτας προηγείται αρχική στροφή της χελώνας «προς τα πάνω» και ακολουθεί η περιστροφή. Έτσι, στη νέα διαμόρφωση της Διαδικασίας 3 με χρήση μιας ακόμη μεταβλητής προηγήθηκε αρχικά η εντολή `up` (:d) και ακολούθησε η `rr` (:g). Θέτοντας $d=90$, η μετακίνηση του μεταβολέα `:g` οδήγησε στην επιθυμητή περιστροφή του ορθογωνίου με άξονα παράλληλο προς το επίπεδο της οθόνης (Εικόνα 7).

E: Πώς την έκανες όρθια πόρτα;

M1: Γιατί αλλάξαμε το roll. Όταν βάζουμε το roll, πρώτο πηγαίνει έτσι [δείχνει με την κασέτα την περιστροφή της Εικόνας 6] ... άρα το βάλαμε κάθετα ...

Συμπεράσματα

Η ανάλυση των δεδομένων της παρούσας πιλοτικής μελέτης αναδεικνύει δύο κατηγορίες αποτελεσμάτων. Στην πρώτη μπορεί να αναφερθεί η ποικιλία που χαρακτήρισε την εμπλοκή των μαθητών και τις διαισθήσεις που ανέπτυξαν τόσο στη διαδικασία πλοήγησης της χελώνας στον τρισδιάστατο χώρο όσο και κατά την κατασκευή γεωμετρικών σχημάτων. Τα προσφερόμενα εργαλεία επέτρεψαν τη σταδιακή νοηματοδότηση του εικονικού τρισδιάστατου χώρου ως χώρου πλοήγησης, κατασκευής, εξεικόνισης και δυναμικού χειρισμού γεωμετρικών αντικειμένων. Οι τρεις ομάδες επεισοδίων που παρουσιάστηκαν στα αποτελέσματα θα μπορούσε να θεωρηθεί ότι φωτίζουν μονοπάτια της δημιουργίας ενός μεταβατικού χώρου διασύνδεσης δισδιάστατου και τρισδιάστατου. Στην πρώτη ομάδα η νοηματοδότηση του τρισδιάστατου χώρου διαρθρώθηκε με άξονα δύο οικεία στα παιδιά επίπεδα: το οριζόντιο και το κάθετό του επίπεδο της οθόνης. Στη δεύτερη ομάδα η δυνατότητα χρήσης μεταβλητών και δυναμικού χειρισμού των αναπαριστώμενων μεγεθών διευκόλυνε την εξεικόνιση της γωνίας ως δυναμικής στροφής στο χώρο και έτσι τη μετακίνηση στον τρισδιάστατο χώρο. Στην τρίτη ομάδα επεισοδίων η ίδια δυνατότητα οδήγησε στην περαιτέρω οικειοποίηση του τρισδιάστατου χώρου μέσα από την αντιστοίχιση των κατασκευαζόμενων δυναμικών προσομοιώσεων με καταστάσεις-αντικείμενα της καθημερινής εμπειρίας που περιλαμβάνουν στροφή. Στη δεύτερη κατηγορία αποτελεσμάτων καταγράφονται αδυναμίες της ομάδας A να ανταποκριθεί στο απαιτούμενο επίπεδο συμβολικής έκφρασης και ιδιαίτερα στη νοηματοδότηση των εντολών περιστροφής. Έτσι, μελλοντικές έρευνες θα πρέπει να λάβουν υπόψη δύο παραμέτρους: (α) την ανάγκη εξοικείωσης των παιδιών με τα είδη των στροφών στο χώρο και (β) το έντονο ενδιαφέρον των παιδιών για την προσομοίωση αντικειμένων ή καταστάσεων της καθημερινής εμπειρίας που ενσωματώνουν διαφορετικά είδη στροφής.

Σημειώσεις. Το MaLT αναπτύσσεται στο πλαίσιο του έργου ReMath «Representing Mathematics with Digital Media», <http://remath.cti.gr>, European Community, 6th Framework Programme, Information Society Technologies (IST), IST-4-26751-STP, 2005-2008. Στην παρούσα έρευνα χρησιμοποιήθηκε η πρώτη έκδοσή του.

Ευχαριστίες. Ευχαριστούμε τις ερευνήτριες Μ. Λάτση, Ε. Αλεξοπούλου και Σ. Κίτσου για τη συνεισφορά τους στην έρευνα.

Βιβλιογραφία

- Cabrilog (2005) *Cabri 3D* (http://www.cabri.com/v2/pages/en/products_cabri3d.php).
- Christou, C., Pittalis, M., Mousoulides, N. & Jones, K. (2005). Developing 3D dynamic geometry software: theoretical perspectives on design. In F. Olivero & R. Sutherland (eds) *Visions of Mathematics Education: Embedding Technology in Learning* (pp. 69-77). Bristol, UK, University of Bristol.
- Clements, D. H., & Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial reasoning. In A. Douglas & Grouws (eds) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 420-64). New York: Macmillan and Reston, NCTM.
- Clements, D., Battista, M. T., Sarama, J. & Swaminathan, S. (1996). Development of turn and turn measurement concepts in a computer environment. *Educational Studies in Mathematics*, 30, 313-337.
- Cobb P., Confrey J., DiSessa A., Lehrer R., and Schauble L. (2003). Design Experiments in Educational Research. *Educational Researcher*, Vol. 32-1, 9-13.
- Cuoco, A. A. & Cursio, F. R. (Eds.) (2001). *The Roles of Representation in School Mathematics: 2001 Yearbook*. Reston: NCTM.
- Gutiérrez, A. (1996). Visualization in 3-dimensional geometry: In search of a framework. *Proceedings of the 20th PME Conference*, Vol. 1, pp. 3-19, Valencia.
- Kynigos, C., & Latsi, M. (in press). Turtle's navigation and manipulation of geometrical figures constructed by variable processes in 3d simulated space. *Proceedings of the 11th Eurologo Conference*, Bratislava, Slovakia.
- Lowrie, T. (2002). The influence of visual and spatial reasoning in interpreting simulated 3D worlds. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 7, 301-318.
- Nemirovsky, R. & Noble, T. (1997). Mathematical visualization and the place where we live. *Educational Studies in Mathematics*, (33)2: 99-131.
- Sedig, K. & Sumner, M. (2006). Characterising interaction with visual mathematical representations, *Int. Journal of Computers for Mathematical Learning*, 11: 1-55.
- Yakimanskaya, I. S., Wilson, P. S. & Davis, E. J. (1991). *The Development of Spatial Thinking in Schoolchildren*, NCTM.
- Yeh, A. & Nason, R. (2004). Knowledge building of 3D geometry concepts and processes within a virtual reality learning environment. *Proceedings of World Conference on Educational Multimedia, Hypermedia and Telecommunications*, Chesapeake, VA: AACE, 2175-2182.
- Yin, R. K. (1994). *Case Study Research: Design and Methods*. Sage Publications.

Zazkis, R., Dubinsky, E. & Dautermann, J. (1996). Using visual and analytic strategies: A study of students' understanding of permutation and symmetry groups. *Journal of Research in Mathematics Education*, 27(4), 435–457.

Zimmermann, W. & Cunningham, S. (1991). *Visualisation in Teaching and Learning Mathematics*, Washing: Mathematical Association of America.