

Από τα πιο επίκαιρα διεθνώς ζητήματα της Διδακτικής των Μαθηματικών είναι η επίδραση των οικογενειακών πρακτικών στη μάθηση και στη διδασκαλία, αλλά και αντίστροφα η επίδραση της σχολικής, μαθηματικής κουλτούρας στις οικογενειακές πρακτικές. Η Ελλὰδα έχει μια μακρόχρονη και ιδιόμορφη παράδοση οικογενειακών και παρα-εκπαιδευτικών πρακτικών που αλληλεπιδρούν με το πλάνο και το περιεχόμενο της μαθηματικής εκπαίδευσης.

Το φαινόμενο διευρύνεται τα τελευταία χρόνια με τη διάδοση της εξωσχολικής χρήσης διδακτικού υλικού, ψηφιακών και δικτυακών εφαρμογών. Για την κατανόηση του κρίσιμου αυτού φαινομένου και τη βελτίωση του εκπαιδευτικού σχεδιασμού, παρουσιάζουμε σε αυτόν το τόμο, εβδομήντα επιστημονικές εργασίες και ερευνητικά αποτελέσματα που παρουσιάστηκαν στο συνέδριο *Μαθηματική εκπαίδευση και Οικογενειακές πρακτικές* της Ένωσης Ερευνητών Διδακτικής Μαθηματικών (ΕΝΕΔΙΜ) στο Πανεπιστήμιο Αιγαίου στη Ρόδο.

Οι εργασίες, κατανέμονται σε πέντε θεματικές ενότητες: Οικονέμεια και Μαθηματική Εκπαίδευση, Μαθηματική Δραστηριότητα, Διδακτικό Υλικό για τα Μαθηματικά, Αξιοποίηση των Τ.Π.Ε. στη Μαθηματική Εκπαίδευση, Γενικές Εργασίες.

Το 3^ο Συνέδριο της Ενεδιμ πραγματοποιήθηκε με την ευγενή χορηγία των:

- ΔΗΜΟΣ ΚΑΛΛΙΘΕΑΣ, ΔΗΜΟΣ ΡΟΔΟΥ, ΝΟΜΑΡΧΙΑΚΗ ΑΥΤΟΔΙΟΙΚΗΣΗ ΔΩΔΕΚΑΝΗΣΟΥ
- ΑΝΩΤΑΤΗ ΣΧΟΛΗ ΤΟΥΡΙΣΤΙΚΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΩΝ ΡΟΔΟΥ (ΑΣΤΕΡ)
- CONTIKI, CAFE RESTAURANT
- PANE DI CARO
- ALPHA BANK ΡΟΔΟΥ
- ΑΛΦΑΒΗΤΑΡΙ, ΒΙΒΛΙΟΧΑΡΤΟΠΩΛΕΙΟ ΔΗΜΟΥΡΓΙΑ, ΠΡΟΤΥΠΑ ΚΕΝΤΡΑ ΠΡΟΣΧΟΛΙΚΗΣ ΑΓΩΓΗΣ & ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ ΤΟ ΣΤΕΚΙ, ΒΙΒΛΙΟΧΑΡΤΟΠΩΛΕΙΟ UNIVERSITY PRESS
- EMERY, ΠΟΤΟΠΟΙΙΑ ΒΑΠ Π. ΚΟΥΤΙΟΣ ΑΒΕΕ NARKISSOS, ΑΝΘΟΠΩΛΕΙΟ ΧΑΛΙΚΙΑΣ ΑΕΒΕ, ΒΙΟΤΕΧΝΙΑ ΕΤΟΙΜΩΝ ΕΝΔΥΜΑΤΩΝ
- CLASSIC CAFE SWEDCO CAFE, ΣΟΥΗΔΙΚΟΣ ΦΟΥΡΝΟΣ
- ΕΚΠΟΛΙΤΙΣΤΙΚΟ ΣΩΜΑΤΕΙΟ ΕΛΛΗΝΙΚΩΝ ΧΟΡΩΝ



Πανεπιστήμιο Αιγαίου
Ρόδος, 2009

Μαθηματική Εκπαίδευση και Οικογενειακές Πρακτικές

Πρακτικά
3^{ου} Συνεδρίου



Ένωση Ερευνητών Διδακτικής των Μαθηματικών

Πρακτικά 3^{ου} Συνεδρίου

Μαθηματική Εκπαίδευση και Οικογενειακές Πρακτικές

Επιμέλεια

Φραγκίσκος Καλαβάσης
Σόνια Καφούση
Μαρία Χιονίδου-Μοσκοφόγλου
Χρυσάνθη Σκουμπουρδή
Γιώργος Φεσάκης

Πανεπιστήμιο Αιγαίου
Ρόδος, 2009

Ανάπτυξη Νοημάτων Σχετικά με την Έννοια της Γωνίας Μέσω Γεωμετρικών Κατασκευών στον Τρισδιάστατο Χώρο

Μαρία Λάτση¹, Γιώργος Ψυχάρης², Χρόνης Κονηγός³

^{1,2,3}Εργαστήριο Εκπαιδευτικής Τεχνολογίας, Ε.Κ.Π.Α.

Περίληψη

Η κατασκευή νοημάτων για την έννοια της γωνίας στον τρισδιάστατο γεωμετρικό χώρο μελετήθηκε κατά τη διάρκεια της εφαρμογής ειδικά σχεδιασμένων γεωμετρικών δραστηριοτήτων στην τάξη. 13χρονοι μαθητές ενεπλάκησαν στην διερεύνηση της μαθηματικής φύσης των γωνιών χειριζόμενοι τα αντικείμενα τρισδιάστατων προσομοιώσεων. Οι μαθητές δούλεψαν σε ομάδες των δύο χρησιμοποιώντας ένα ειδικά σχεδιασμένο υπολογιστικό περιβάλλον που συνδυάζει το συμβολισμό (μέσω προγραμματισμού) και το δυναμικό χειρισμό των γραφικών αναπαράστάσεων γεωμετρικών αντικειμένων. Τα ευρήματα αποκαλύπτουν τον προοδευτικό συντονισμό διαφορετικών πτυχών της γωνίας στον τρισδιάστατο χώρο που διευκολύνθηκε από τη χρήση των διαθέσιμων εργαλείων.

Λέξεις κλειδιά: γωνία, τρισδιάστατος γεωμετρικός χώρος, δυναμικός χειρισμός, Logo.

1. Θεωρητικό πλαίσιο

Στο παρόν άρθρο αναφερόμαστε σε μια έρευνα [1] τάξης που είχε ως στόχο την διερεύνηση των νοημάτων που κατασκευάστηκαν από 13χρονους μαθητές γυμνασίου σχετικά με την έννοια της γωνίας στον τρισδιάστατο γεωμετρικό χώρο κατά την εμπλοκή τους σε δραστηριότητες κατασκευής και χειρισμού γεωμετρικών σχημάτων που σχεδιάζονταν με χρήση γλώσσας προγραμματισμού. Οι μαθητές συνεργάστηκαν σε ομάδες των δύο χρησιμοποιώντας το *MaLT (MachineLab Turtleworlds)* (http://etl.ppp.uoa.gr/_content/download/index_download.htm), ένα υπολογιστικό περιβάλλον για γεωμετρικές κατασκευές, το οποίο συνδυάζει το συμβολισμό μέσω μιας ειδικά σχεδιασμένης έκδοσης της Logo με το δυναμικό χειρισμό γραφικά αναπαριστώμενων μαθηματικών αντικειμένων στον τρισδιάστατο χώρο (Kynigos & Latsi, 2007).

Οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές όσον αφορά στην έννοια της γωνίας έχει τεκμηριωθεί στη διεθνή βιβλιογραφία. Τα αποτελέσματα των αντίστοιχων ερευνών υπογραμμίζουν δύο βασικούς παράγοντες οι οποίοι επηρεάζουν τον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές αντιλαμβάνονται τις γωνίες: την παρουσία ή μη των δύο γραμμών που αποτελούν τις πλευρές της και τη νοερή σύλληψη της στροφής ως μια σχέση μεταξύ δύο 'ενδείξεων-κατευθύνσεων' (headings) ευθύγραμμων τμημάτων (Clements et al., 1996). Στον τρισδιάστατο χώρο και σε δραστηριότητες της

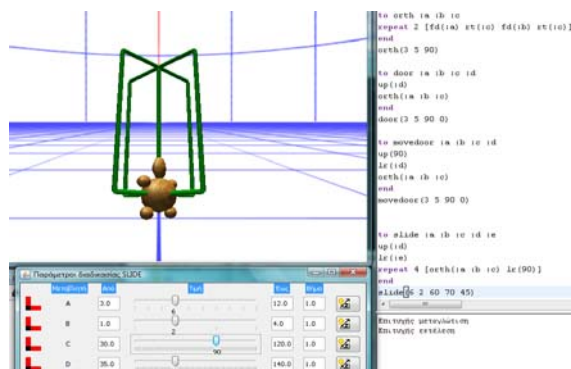
καθημερινής ζωής οι δυσκολίες των μαθητών να αναγνωρίσουν τα βασικά στοιχεία μιας γωνίας αυξάνονται σημαντικά. Για παράδειγμα, στην περίπτωση του ανοίγματος και κλεισίματος μιας πόρτα ενέχεται η κλασική αναπαράσταση της γωνίας στο δισδιάστατο χώρο, με τη διαφορά ότι οι πλευρές της περιεχομένης τρισδιάστατης γωνίας είναι ορθογώνια παραλληλόγραμμα. Επιπλέον, η στροφή στον τρισδιάστατο χώρο μπορεί να θεωρηθεί ως μια πιο εξεζητημένη έννοια καθώς η στροφή δεν αφήνει ίχνος και η αρχική ‘ένδειξη–κατεύθυνση’ πρέπει να κρατηθεί στη μνήμη. Επίσης, η έρευνα αναδεικνύει σημαντικές δυσκολίες των μαθητών στο να συντονίσουν τις διαφορετικές πτυχές της έννοιας της γωνίας οι οποίες περιέχονται στα διάφορα φυσικά περικείμενα και οι οποίες περιλαμβάνουν επικλινείς επιφάνειες, στροφές, διασταυρώσεις, γωνίες, κ.λπ. (Mitchelmore & White, 1998). Λαμβάνοντας υπόψη τα παραπάνω οι Mitchelmore και White (2000) υπογραμμίζουν ότι η ανάπτυξη της έννοιας της γωνίας στην αφαιρετική της μορφή εξαρτάται κυρίως από το βαθμό που τα διάφορα φυσικά περικείμενα στα οποία απαντάται η έννοια θα διασυνδεθούν “μέσω της συστηματικής προσπάθειας να διερευνηθεί ο περιβάλλον χώρος με μαθηματικό τρόπο” (σελ. 233).

Υπό το πρίσμα των παραπάνω δεδομένων θεωρούμε ότι είναι χρήσιμο να προσεγγίσουμε την έννοια της γωνίας σε σχέση με τις έννοιες που σχετίζονται με αυτήν, τις καταστάσεις στις οποίες μπορεί να χρησιμοποιηθεί και τις διαθέσιμες αναπαραστάσεις, δηλαδή με τους όρους του Vergnaud (1996), ως ένα *νοητικό πεδίο*. Για παράδειγμα, μια έννοια στενά συνδεδεμένη με την έννοια της γωνίας είναι αυτή της στροφής, μια κατάσταση στην οποία μπορεί να χρησιμοποιηθεί μπορεί να προκύψει στο πλαίσιο μιας ειδικά σχεδιασμένης δραστηριότητας (π.χ. η προσομοίωση του ανοίγματος και κλεισίματος μιας πόρτας), ενώ οι διαθέσιμες αναπαραστάσεις μπορεί να βασίζονται στη χρήση χαρτιού και μολυβιού ή στη χρήση υπολογιστικών εργαλείων.

Υπό το πρίσμα της θεωρίας δόμησης της γνώσης μέσω κατασκευών (Constructionism, Harel & Papert, 1991) στην παρούσα έρευνα οι στόχοι μας ήταν (α) να συσχετίσουμε την κατασκευή νοημάτων σχετικών με την έννοια της γωνίας στον τρισδιάστατο χώρο με σχετικές καθημερινές εμπειρίες των παιδιών και (β) να σχεδιάσουμε ένα πλαίσιο στο οποίο θα είχαμε τη δυνατότητα να μελετήσουμε το αν και με ποιους τρόπους οι μαθητές καταφέρνουν να συντονίσουν διαφορετικές πτυχές της έννοιας της γωνίας στον τρισδιάστατο χώρο. Ειδικότερα, η έρευνα εστιάστηκε στον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές αντιλαμβάνονται τη γωνία (α) ως *γεωμετρικό σχήμα*, που σχηματίζεται μεταξύ δύο γεωμετρικών αντικειμένων, τα οποία μπορεί να είναι είτε ευθύγραμμα τμήματα (στα δισδιάστατα γεωμετρικά σχήματα) είτε δισδιάστατα γεωμετρικά σχήματα (στον τρισδιάστατο χώρο, π.χ. διέδρες γωνίες); (β) ως *δυναμική ποσότητα*, που μπορεί να συμβολιστεί με μεταβλητή αναπαριστώντας τόσο την αλλαγή κατεύθυνσης ως στροφή όσο και το αποτέλεσμα αυτής της στροφής και (γ) ως *μέτρο* που αναπαρίσταται από έναν αριθμό.

2. Το υπολογιστικό περιβάλλον

Το MaLT μπορεί να θεωρηθεί ως ένας τρισδιάστατος μικρόκοσμος στον οποίο η πλοήγηση στο χώρο συνδυάζεται με την κατασκευή γεωμετρικών σχημάτων και τη δυνατότητα δυναμικού χειρισμού των μεταβλητών μεγεθών τους.



Εικόνα 1: Προσομοίωση περιστρεφόμενης πόρτας στο MaLT.

Στην παρούσα έρευνα χρησιμοποιήθηκαν οι παρακάτω διασυνδεδεμένες ‘περιοχές’ του περιβάλλοντος (Εικόνα 1): (1) *Logo*. Αποτελεί το πεδίο συμβολικής έκφρασης με χρήση μιας ειδικά σχεδιασμένης έκδοσης της γλώσσας Logo για γεωμετρικές κατασκευές στον τρισδιάστατο χώρο στην οποία έχουν ενσωματωθεί τέσσερις νέες εντολές στροφής: ‘κλίση_πάνω/κάτω n μοίρες’ (*‘uppitch-downpitch n degrees’* ή *‘up-dp n degrees’*) και ‘περιστροφή_αριστερά/δεξιά κατά n μοίρες’ (*‘leftroll-rightroll n degrees’* ή *‘lr-rr n degrees’*). (2) *Σκηνή*. Αποτελεί μια εικονική προσομοίωση του τρισδιάστατου χώρου όπου εμφανίζεται το γραφικό αποτέλεσμα των εντολών για μια γεωμετρική κατασκευή ως το ίχνος που αφήνει κατά τη μετακίνησή της ένα τρισδιάστατο μοντέλο χελώνας. (3) *Μονοδιάστατος μεταβολέας (ή μεταβολέας)*. Είναι το εργαλείο δυναμικού χειρισμού των μεταβλητών μεγεθών μιας γεωμετρικής κατασκευής που επιτυγχάνεται μέσα από το σύρσιμο ειδικών λωρίδων κύλισης, που αποκαλούνται μεταβολείς, και αντιστοιχούν στην κάθε μεταβλητή. Μαζί με τη μεταβολή των τιμών μιας μεταβλητής αναπαρίσταται και η αντίστοιχη αλλαγή που προκαλεί η συγκεκριμένη μεταβολή στο γραφικό αποτέλεσμα.

3. Πλαίσιο και σχεδιασμός της έρευνας

Η παρούσα έρευνα έλαβε χώρα στο 2^ο Γυμνάσιο Διαπολιτισμικής Εκπαίδευσης Ελληνικού στην Αθήνα. Σε αυτήν συμμετείχε ένα τμήμα 20 μαθητών της Α΄ Γυμνασίου και μία εκπαιδευτικός που είχε ταυτόχρονα και ρόλο ερευνήτριας. Το πείραμα διήρκεσε συνολικά 18 διδακτικές ώρες και απλώθηκε χρονικά σε χρονικό διάστημα δύο μηνών. Οι δραστηριότητες διαρθρώθηκαν σε δύο φάσεις. Στην πρώτη φάση επιδιώξαμε να φέρουμε στο προσκήνιο τη γωνία ως στροφή (η οποία αναπόφευκτα περιλαμβάνει και την έννοια της κατεύθυνσης) στον τρισδιάστατο

χώρο συνδέοντάς την με εμπειρίες από την κίνηση στο χώρο, όπως το περπάτημα ή η πλοήγηση ενός αεροπλάνου. Στην 1^η δραστηριότητα ζητήθηκε από τους μαθητές να κινήσουν την χελώνα ελεύθερα στον τρισδιάστατο χώρο και στη συνέχεια να τη φέρουν πίσω στην αρχική της θέση, ενώ στη 2^η δραστηριότητα τους ζητήθηκε μαθητές να καθοδηγήσουν τη χελώνα έτσι, ώστε να αναπαραστήσουν την απογείωση και την προσγείωση ενός αεροπλάνου. Στη δεύτερη φάση των δραστηριοτήτων η γωνία προσεγγίστηκε ως δυναμική ποσότητα μέσα από την προσομοίωση πραγματικών τρισδιάστατων αντικειμένων. Ειδικότερα, στην 3^η δραστηριότητα ζητήθηκε από τους μαθητές να κατασκευάσουν παραλληλόγραμμα με χρήση παραμετρικών διαδικασιών σε δύο τουλάχιστον διαφορετικά επίπεδα της Σκηνης, ώστε να προσομοιώσουν τα παράθυρα ενός εικονικού δωματίου. Στην 4^η δραστηριότητα ζητήθηκε από τους μαθητές να προσομοιώσουν το άνοιγμα και το κλείσιμο μιας πόρτας, ενώ στην 5^η δραστηριότητα τους ζητήθηκε να χρησιμοποιήσουν το μεταβολέα για να πειραματιστούν με τις μεταβολές των πέντε μεταβλητών μιας ειδικά σχεδιασμένης παραμετρικής διαδικασίας, ώστε να κατασκευάσουν και να ‘κινήσουν’ το μοντέλο μιας περιστρεφόμενης πόρτας.

4. Μέθοδος συλλογής και ανάλυσης των δεδομένων

Κατά τη διάρκεια της εφαρμογής των δραστηριοτήτων ένας δεύτερος ερευνητής συμμετείχε ως συνερευνητής. Η μεθοδολογική προσέγγιση που υιοθετήθηκε στηρίχτηκε στη συμμετοχική παρατήρηση ανθρώπινων δραστηριοτήτων οι οποίες λαμβάνουν χώρα σε πραγματικό χρόνο. Οι ερευνητές παρενέβαιναν στις εργασίες των μαθητών θέτοντας ερωτήσεις και ενθαρρύνοντάς τους να εξηγήσουν με ξεκάθαρο τρόπο τις ιδέες και τις στρατηγικές τους. Για την καταγραφή των εργασιών στον υπολογιστή χρησιμοποιήσαμε ένα ειδικά σχεδιασμένο λογισμικό το οποίο επιτρέπει την ταυτόχρονη καταγραφή των λεγομένων των μαθητών και όλων των ενεργειών τους στην οθόνη του υπολογιστή. Κατά την ανάλυση έγινε απομαγνητοφώνηση όλων των ηχητικών καταγραφών τριών ομάδων μαθητών, οι οποίες αποτελέσαν τις ομάδες εστίασης, καθώς και επιλεγμένων μαθησιακών επεισοδίων από την εργασία όλων των ομάδων στην τάξη.

Στη ανάλυση υιοθετήθηκε η φαινομενολογική προσέγγιση σύμφωνα με την οποία οι ερμηνείες των ερευνητών εστιάστηκαν στην αλληλεπίδραση των παιδιών με τις προσφερόμενες αναπαραστάσεις και στα νοήματα που αυτά ανέπτυξαν από τη δική τους σκοπιά με στόχο τη δυνατότητα περιγραφής της δημιουργίας του νοητικού χώρου που αναδόθηκε σταδιακά μέσα από την εμπειρία χρήσης των υπολογιστικών εργαλείων (*“lived-in space”*, Nemirovsky & Noble, 1997). Ιδιαίτερα ενδιέφερε η εξαγωγή επεισοδίων που (α) ήταν χαρακτηριστικά του τρόπου αλληλεπίδρασης των μαθητών με τα διαθέσιμα υπολογιστικά εργαλεία, και (β) αποτύπωναν ξεκάθαρα πτυχές του τρόπου με τον οποίο οι μαθητές κατασκεύαζαν νοήματα σχετικά με τις διάφορες πτυχές της έννοιας της γωνίας στον τρισδιάστατο χώρο (π. χ. ως γεωμετρικό σχήμα, ως δυναμική ποσότητα και μέτρο).

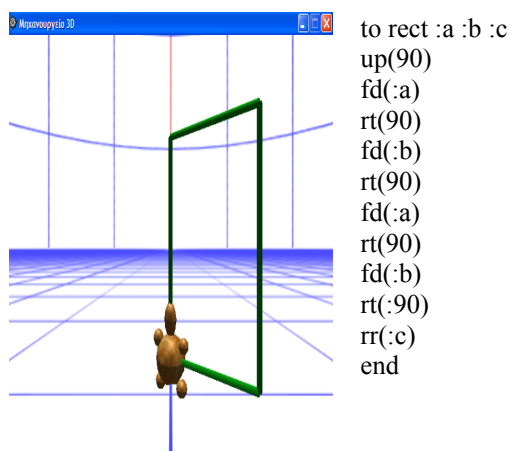
ντολής up για να κερδίσουν ύψος παρά τα αντίθετα γραφικά αποτελέσματα στην οθόνη του υπολογιστή. Η προτίμηση των μαθητών στο να κινούν την χελώνα σε ένα μόνο επίπεδο (κατά τη διάρκεια της 1^{ης} δραστηριότητας) ή η δυσκολία τους στο συντονισμό της στροφής της χελώνας και του ίχνους της με την έννοια της γωνίας ως κλίση (κατά τη διάρκεια της 2^{ης} δραστηριότητας) συνδέεται πιθανόν και με το γεγονός ότι οι μαθητές - συνηθισμένοι να δουλεύουν με δισδιάστατες αναπαραστάσεις - έχουν δυσκολίες στο να αντιληφθούν είτε τις συμβάσεις που χρησιμοποιούνται για να αναπαρασταθεί ένα τρισδιάστατο αντικείμενο στην οθόνη του υπολογιστή (Lowrie, 2002) είτε τις συμβάσεις που υπόκεινται της κίνησης μιας οντότητας – εδώ της χελώνας – στον προσομοιούμενο τρισδιάστατο χώρο. Όπως θα φανεί στη επόμενη παράγραφο η προσομοίωση τρισδιάστατων γεωμετρικών αντικειμένων ως αποτέλεσμα της χρήσης μεταβλητών επηρέασε σημαντικά τις προσπάθειες των παιδιών να συντονίσουν τις διαφορετικές πτυχές της γωνίας και να συλλάβουν νοερά τη γωνία στον τρισδιάστατο χώρο ως αλλαγή κατεύθυνσης (στροφής) με συγκεκριμένο μέτρο.

5.2. Η γωνία ως δυναμική ποσότητα κατά την προσομοίωση τρισδιάστατων αντικειμένων

Στην 3^η δραστηριότητα η ανάγκη σχεδιασμού σχημάτων σε διαφορετικά επίπεδα του τρισδιάστατου χώρου συντέλεσε στο να επικεντρώσουν οι μαθητές την προσοχή τους όχι τόσο στις προσανατολισμένες στροφές μεταξύ γραμμών και επιπέδων αλλά στις προσανατολισμένες στροφές μεταξύ δύο όμοιων γεωμετρικών σχημάτων, γεγονός που σχετίζεται με τη νοερή σύλληψη των διεδρων γωνιών στον τρισδιάστατο χώρο. Για παράδειγμα, οι περισσότερες ομάδες μαθητών αναγνώρισαν ότι για να κατασκευαστούν παράθυρα σε δυο διαδοχικούς τοίχους (επίπεδα με μαθηματικούς όρους) ήταν αναγκαία η χρήση των εντολών 'tr/lr' ή 'up/dp'. Στη διάρκεια της κατασκευαστικής διαδικασίας οι μαθητές εύκολα αναγνώρισαν τη διέδρη γωνία που οριζόταν από τα δύο διαδοχικά παράθυρα (παραλληλόγραμμα) και χρησιμοποίησαν την οικεία σε αυτούς μαθηματική ορολογία από τη διδαχθείσα δισδιάστατη γεωμετρία για να την περιγράψουν. Παρόλ' αυτά, όλες οι ομάδες των μαθητών είχαν δυσκολίες στην αναγνώριση του μεγέθους της εν λόγω γωνίας. Για παράδειγμα, οι μαθητές της ομάδας Β χαρακτήρισαν τη διέδρη γωνία που σχεδίασε η χελώνα ως οξεία και όχι ως ορθή, όπως συνέβαινε, παρότι οι ίδιοι είχαν δώσει την εντολή leftroll 90 στη χελώνα προτού σχεδιάσουν το δεύτερο παράθυρο. Φαίνεται ότι οι μαθητές εστίασαν περισσότερο στα οπτικά χαρακτηριστικά της γραφικής αναπαράστασης και ότι μπερδεύτηκαν από την 'παραμόρφωση' της διέδρης γωνίας ως αποτέλεσμα της χρήσης ενός σημείου φυγής στη γραμμή του ορίζοντα της Σκηνής, το

οποίο χρησιμοποιείται για να δώσει την αίσθηση του βάθους στις αναπαραστάσεις.

Παρόλα αυτά, η χρήση των δύο νέων ειδών στροφής σε συνδυασμό με τη διερεύνηση από μέρους των μαθητών της γωνίας ως δυναμικής ποσότητας, το μέγεθος της οποίας μπορούσαν να χειριστούν δυναμικά και να μεταβάλλουν γραμμικά χρησιμοποιώντας τις λειτουργικότητες του μεταβολέα, διευκόλυνε περαιτέρω τη νοερή σύλληψη των διαφορετικών επιπέδων στον τρισδιάστατο χώρο. Για παράδειγμα, στην 4^η δραστηριότητα (εικόνα 3 παρακάτω) οι μαθητές αποφάσισαν να χρησιμοποιήσουν όχι ένα σταθερό μέγεθος στροφής αλλά μια μεταβλητή μετά την εντολή `rightroll (rr)` έτσι ώστε να προσομοιώσουν το άνοιγμα και το κλείσιμο μιας πόρτας.



Εικόνα 3. Η προσομοίωση του ανοίγματος και κλεισίματος μιας πόρτας με την παραμετρική διαδικασία 'rect'.

Η χρήση του μεταβολέα επέτρεψε στους μαθητές να δουν τις κατασκευές τους από διαφορετικές προοπτικές, οι οποίες πιθανόν να ελαχιστοποίησαν τις 'παραμορφώσεις' των στατικών τρισδιάστατων αναπαραστάσεων και να ώθησαν τους μαθητές να εστιάσουν στο μέγεθος της στροφής της χελώνας στον κώδικα Logo. Όσο περισσότερο οι μαθητές εξοικειώνονταν με τις συμβάσεις που χρησιμοποιούνταν στον τρισδιάστατο χώρο, τόσο περισσότερο γίνονταν και πιο ικανοί στο να συντονίζουν τα οπτικά χαρακτηριστικά των γωνιών στην οθόνη του υπολογιστή με το μέγεθός τους, σε σχέση με τις στροφές που πραγματοποιούσε η χελώνα. Για παράδειγμα, κατά τη διάρκεια του δυναμικού χειρισμού της περιστρεφόμενης πόρτας (5^η δραστηριότητα) οι μαθητές μπόρεσαν να υπερπηδήσουν τις δυσκολίες που αντιμετώπισαν στην προηγούμενη φάση και να αναγνωρίσουν τις τέσσερις διαδοχικές ορθές διέδρες γωνίες που σχηματίζονταν μεταξύ των τεσσάρων παραλληλογράμμων γύρω από την κοινή τους πλευρά (δες εικόνα 1).

Πίνακας 1: Ο κώδικας της διαδικασίας ‘slide’ και απόσπασμα διαλόγου μαθητών.

to slide :a :b :c :d :e up(:d) lr(:e) repeat 4 [repeat 2[fd(:a) rt(:c) fd(:b) rt(:c)] lr(90)] end	<i>Μαθ1:</i> Εδώ πρέπει να μετακινήσουμε πρώτα, είναι η γωνία του ορθογωνίου [δείχνει και μετακινεί το μεταβολέα :c] για να γίνει έτσι [ενν. πόρτα] και μετά μάλλον εδώ για να γυρίσει έτσι [δείχνει και μετακινεί το μεταβολέα :d]. Για να δούμε. <i>Μαθ2:</i> Ναι σίγουρα με αυτό στρίβει γύρω γύρω αφού έχει lr. <i>Μαθ1:</i> Ναι, αλλά δε μας νοιάζει μόνο να γυρίζει, θέλουμε και να έρθει και πιο κάτω. <i>Μαθ2:</i> Να αλλάζω εδώ [δείχνει την τελική τιμή της μεταβλητής :c. Βάζει τελική τιμή :c=90 στον αντίστοιχο μεταβολέα] <i>Μαθ1:</i> Ναι, 90 είναι καλά. Τώρα με αυτό [μετακινεί το μεταβολέα :d] γυρίζει κανονικά γύρω-γύρω [δείχνει τις γωνίες μεταξυ των επιπέδων].
--	---

Πειραματιζόμενοι με τις αλλαγές τιμών των μεταβολέων της διαδικασίας ‘slide’, η οποία και δόθηκε έτοιμη (5^η δραστηριότητα) στους μαθητές για να κατασκευάσουν το μοντέλο μιας περιστρεφόμενης πόρτας, οι μαθητές της ομάδας Β σταδιακά εμφανίστηκαν ικανοί να νοηματοδοτήσουν διαφορετικές πτυχές της έννοιας της γωνίας ταυτόχρονα. Το παραπάνω απόσπασμα (Πίνακας 1) σε συνδυασμό με τον αντίστοιχο κώδικα σε γλώσσα Logo υποδηλώνει ότι οι μαθητές κατασκεύαζαν νοήματα σχετικά με την έννοια της γωνίας (α) ως συστατικό στοιχείο γεωμετρικών σχημάτων το οποίο ορίζεται και παραμένει σταθερό (μεταβλητή :c), (β) ως μέσο για τη μετακίνηση από το οριζόντιο στο κατακόρυφο επίπεδο, σε σχέση με τον άξονα θέασης του χρήστη, όπου η γωνία ορίζεται και πάλι και παραμένει σταθερή (μεταβλητή :d) και (γ) ως μέσο συνεχούς αλλαγής επιπέδων στον τρισδιάστατο χώρο (μεταβλητή :e) γύρω από τον κοινό άξονα των τεσσάρων παραλληλογράμμων (Εικόνα 1).

6. Συμπεράσματα

Τα παραπάνω επεισόδια αναδεικνύουν τη διαλεκτική σχέση μεταξύ της εξέλιξης των αλληλεπιδράσεων των μαθητών με τα διαθέσιμα εργαλεία και της σταδιακής εστίασής τους στις γωνιακές σχέσεις που περιλαμβάνονταν στις γεωμετρικές κατασκευές και προσομοιώσεις των συγκεκριμένων δραστηριοτήτων. Καθώς οι μαθητές ενεπλάκησαν με την πλοήγηση της χελώνας στο MaLT ήρθαν σε επαφή με μαθηματικές έννοιες που σχετίζονται με την έννοια της γωνίας μέσα από την κατασκευή και το δυναμικό χειρισμό δισδιάστατων γεωμετρικών αντικειμένων στον τρισδιάστατο χώρο και μέσω διαδικασιών κατασκευής υποθέσεων, πειραματισμού και αναστοχασμού πάνω στις εμπειρικές παρατηρήσεις της γραφικής ανατροφοδότησης στην οθόνη του υπολογιστή. Για παράδειγμα, οι μαθητές της ομάδας Β ερχόμενοι αντιμέτωποι με τις αναπαραστασιακές συμβάσεις του MaLT, μπόρεσαν

σταδιακά όχι μόνο να κατασκευάσουν διέδρες γωνίες που ορίζονταν από παραλληλόγραμμα σε διαφορετικά επίπεδα, αλλά και να προσεγγίσουν τη γωνία ως δυναμική ποσότητα για την προσομοίωση τρισδιάστατων αντικειμένων (π.χ. πόρτας) μέσα από τη χρήση μεταβλητών. Η συγκεκριμένη εμπειρία φάνηκε να συντέλεσε καθοριστικά στο συντονισμό των διαφορετικών πτυχών των γωνιακών σχέσεων (Mitchelmore & White, 2000) από τους μαθητές της συγκεκριμένης ομάδας όπως φάνηκε στην επακόλουθη δραστηριότητα κατασκευής της περιστρεφόμενης πόρτας όπου η γωνία νοηματοδοτήθηκε ως γεωμετρικό σχήμα με σταθερό μέτρο (π.χ. μεταξύ δύο γεωμετρικών σχημάτων) και ως δυναμική ποσότητα με μεταβλητό μέγεθος. Η παραπάνω ανάλυση περιγράφει την ανάπτυξη της έννοιας της γωνίας σε σχέση με αλληλένδετα στάδια αφαίρεσης, τα οποία μπορεί να θεωρηθούν ότι αναπαριστούν σταδιακά μια πιο εκλεπτυσμένη ταξινόμηση των εμπειριών των παιδιών στηριγμένη στην αλληλεπίδρασή τους με τα διαθέσιμα εργαλεία.

7. Σημειώσεις

1. Η έρευνα έλαβε χώρα στα πλαίσια του ευρωπαϊκού έργου “ReMath” (Representing Mathematics with Digital Media), European Community, 6th Framework Programme, Information Society Technologies, IST-4-26751-STP, 2005-2008 (<http://remath.cti.gr>).

8. Ευχαριστίες

Ευχαριστούμε την Στέλλα Κίτσου για τη συνεισφορά της στη συλλογή και την επεξεργασία των δεδομένων.

9. Βιβλιογραφία

- Clements, D., Battista, M. T., Sarama, J., & Swaminathan, S. (1996). Development of turn and turn measurement concepts in a computer-based instructional unit. *Educational Studies in Mathematics*, 30, 313-337.
- Harel, I. & Papert, S. (1991). *Constructionism: Research Reports and Essays*. Ablex. Publishing Corporation. Norwood, New Jersey.
- Kynigos, C. & Latsi, M. (2007). Turtle's navigation and manipulation of geometrical figures constructed by variable processes in 3d simulated space. *Informatics in Education*, Vol. 6, No. 2, 359-372.
- Lowrie, T. (2002). The influence of visual and spatial reasoning in interpreting simulated 3d worlds. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 7, 301-318.
- Mitchelmore, M. C. & White, P. (1998). Recognition of angular similarities between familiar physical situations. In A. Olivier & K. Newstead (Eds.), *Proceedings of the 20th PME Conference*, (Vol. 3, pp. 271-278). Stellenbosch.

- Mitchelmore, M. C. & White, P. (2000). Development of angle concepts by progressive abstraction and generalisation. *Educational Studies in Mathematics*, 41: 209–238.
- Nemirovsky, R. & Noble, T. (1997). Mathematical visualization and the place where we live. *Educational Studies in Mathematics*, (33)2: 99-131.
- Vergnaud, G. (1996). The theory of conceptual fields. In L. Steffe, P. Nesher, P. Cobb, G. Goldin & B. Greer (Eds.), *Theories of Mathematical Learning* (pp. 221-238). LEA.