

Από τα πιο επίκαιρα διεθνώς ζητήματα της Διδακτικής, των Μαθηματικών είναι η επίδραση των οικογενειακών πρακτικών στη μάθηση και στη διδασκαλία, αλλά και αντίστροφα η επίδραση της σχολικής, μαθηματικής κουλτούρας στις οικογενειακές πρακτικές. Η Ελλἀδα έχει μια μακρόχρονη και ιδιόμορφη παράδοση οικογενειακών και παρα-εκπαιδευτικών πρακτικών που αλληλεπιδρούν με το πλάισιο και το περιεχόμενο της μαθηματικής εκπαίδευσης.

Το φαινόμενο διευρύνεται τα τελευταία χρόνια με τη διάδοση της εξωσχολικής χρήσης διδακτικού υλικού, ψηφιακών και δικτυακών εφαρμογών. Για την κατανόηση του κρίσιμου αυτού φαινομένου και τη βελτίωση του εκπαιδευτικού σχεδιασμού, παρουσιάζουμε σε αυτόν το τόμο, εβδομήντα επιστημονικές εργασίες και ερευνητικά αποτελέσματα που παρουσιάστηκαν στο συνέδριο *Μαθηματική εκπαίδευση και Οικογενειακές πρακτικές* της Ένωσης Ερευνητών Διδακτικής, Μαθηματικών (ΕΝΕΔΙΜ) στο Πανεπιστήμιο Αιγαίου στη Ρόδο.

Οι εργασίες, κατανέμονται σε πέντε θεματικές ενότητες: Οικγένεια και Μαθηματική Εκπαίδευση, Μαθηματική Δραστηριότητα, Διδακτικό Υλικό για τα Μαθηματικά, Αξιοποίηση των Τ.Π.Ε. στη Μαθηματική Εκπαίδευση, Γενικές Εργασίες.

Το 3^ο Συνέδριο της Ενεδιμ πραγματοποιήθηκε με την ευγενή χορηγία των:

- ΔΗΜΟΣ ΚΑΛΛΙΘΕΑΣ, ΔΗΜΟΣ ΡΟΔΟΥ, ΝΟΜΑΡΧΙΑΚΗ ΑΥΤΟΔΙΟΙΚΗΣΗ ΔΩΔΕΚΑΝΗΣΟΥ
- ΑΝΩΤΑΤΗ ΣΧΟΛΗ ΤΟΥΡΙΣΤΙΚΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΩΝ ΡΟΔΟΥ (ΑΣΤΕΡ)
- CONTIKI, CAFE RESTAURANT
- PANE DI CARO
- ALPHA BANK ΡΟΔΟΥ
- ΑΛΦΑΒΗΤΑΡΙ, ΒΙΒΛΙΟΧΑΡΤΟΠΩΛΕΙΟ ΔΗΜΟΥΡΓΙΑ, ΠΡΟΤΥΠΑ ΚΕΝΤΡΑ ΠΡΟΣΧΟΛΙΚΗΣ ΑΓΩΓΗΣ & ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ ΤΟ ΣΤΕΚΙ, ΒΙΒΛΙΟΧΑΡΤΟΠΩΛΕΙΟ UNIVERSITY PRESS
- EMERY, ΠΟΤΟΠΟΙΙΑ ΒΑΠ Π. ΚΟΥΤΙΟΣ ΑΒΕΕ NARKISSOS, ΑΝΘΟΠΩΛΕΙΟ ΧΑΛΙΚΙΑΣ ΑΕΒΕ, ΒΙΟΤΕΧΝΙΑ ΕΤΟΙΜΩΝ ΕΝΔΥΜΑΤΩΝ
- CLASSIC CAFE SWEDCO CAFE, ΣΟΥΗΔΙΚΟΣ ΦΟΥΡΝΟΣ
- ΕΚΠΟΛΙΤΙΣΤΙΚΟ ΣΩΜΑΤΕΙΟ ΕΛΛΗΝΙΚΩΝ ΧΩΡΩΝ



Πανεπιστήμιο Αιγαίου
Ρόδος, 2009

Μαθηματική Εκπαίδευση και Οικογενειακές Πρακτικές

Πρακτικά
3^{ου} Συνεδρίου



Ένωση Ερευνητών Διδακτικής των Μαθηματικών

Πρακτικά 3^{ου} Συνεδρίου

Μαθηματική Εκπαίδευση και Οικογενειακές Πρακτικές

Επιμέλεια

Φραγκίσκος Καλαβάσης
Σόνια Καφούση
Μαρία Χιονίδου-Μοσκοφόγλου
Χρυσάνθη Σκουμπουρδή
Γιώργος Φεσάκης

Πανεπιστήμιο Αιγαίου
Ρόδος, 2009

Οι Εξισώσεις ως Μαθηματικά Αντικείμενα στο Πλαίσιο της Κατασκευής και του Ελέγχου Προσομοιώσεων Κίνησης

Μουστάκη Φωτεινή¹, Ψυχάρης Γιώργος², Κονηγός Χρόνης³

^{1,2,3}Εργαστήριο Εκπαιδευτικής Τεχνολογίας, Πανεπιστήμιο Αθηνών

Περίληψη

Στο παρόν άρθρο παρουσιάζεται μία έρευνα σχολικής τάξης που εστιάζεται στη διαδικασία κατασκευής νοημάτων από μαθητές μέσα από την εμπλοκή τους με δραστηριότητες κατασκευής και ελέγχου προσομοιώσεων κίνησης με τη χρήση αλγεβρικών εξισώσεων σε ειδικά σχεδιασμένο υπολογιστικό περιβάλλον. Στα αποτελέσματα καταγράφονται οι μετακινήσεις των μαθητών σε διαφορετικά στάδια αφαίρεσης (εσωτερίκευση, συμπίκνωση, υποστασιοποίηση) που καταλήγουν στη θεώρηση της εξίσωσης ως αφηρημένο μαθηματικό αντικείμενο.

Λέξεις Κλειδιά: Προσομοιώσεις Κίνησης, Εξισώσεις, Λειτουργική και Δομική Θεώρηση, Υποστασιοποίηση

1. Θεωρητικό πλαίσιο

Στην παρούσα εργασία αναφερόμαστε σε μία έρευνα [1] που διενεργήθηκε σε σχολική τάξη και είχε σκοπό τη μελέτη των μαθηματικών νοημάτων που κατασκεύαζαν οι μαθητές κατά την εμπλοκή τους σε δραστηριότητες ελέγχου και κατασκευής μοντέλων με τη χρήση αλγεβρικών εξισώσεων. Οι μαθητές συνεργάστηκαν σε ομάδες των δύο ή τριών ατόμων χρησιμοποιώντας το διερευνητικό λογισμικό MoPiX (<http://www.lkl.ac.uk/mopix/>) (Winters et al., 2006). Το MoPiX επιτρέπει στους μαθητές να κατασκευάσουν εικονικά μοντέλα αποτελούμενα από αντικείμενα των οποίων οι ιδιότητες και οι συμπεριφορές καθορίζονται και ελέγχονται από εξισώσεις που αποδίδονται σε αυτά. Στην έρευνα αυτή υιοθετήσαμε τη θεωρία δόμησης της γνώσης μέσω κατασκευών (Constructionism, Harel and Papert, 1991) και εστιαστήκαμε κατά κύριο λόγο στους τρόπους με τους οποίους η κατασκευή των νοημάτων για το περιεχόμενο και η δομή των εξισώσεων συντέλεσε στο να αντιμετωπίζουν οι μαθητές τις εξισώσεις ως αφηρημένα μαθηματικά αντικείμενα.

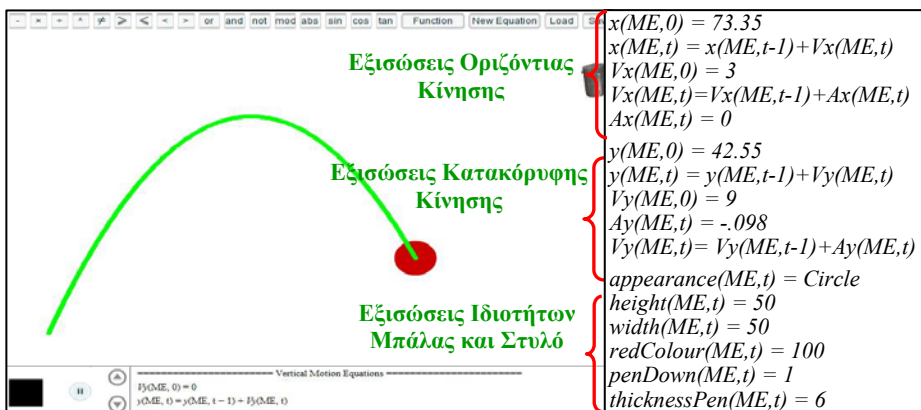
Η αναγνώριση του νοήματος των συμβόλων σε μία εξίσωση, ο ρόλος των συμβόλων στις γενικεύσεις οι οποίες εκφράζονται μέσω των εξισώσεων και οι τρόποι με τους οποίους μια συγκεκριμένη διάταξη συμβόλων σε μία εξίσωση σηματοδοτεί ένα συγκεκριμένο νόημα, αποτελούν θεμελιώδη στοιχεία για τη μαθηματική αλλά και την επιστημονική σκέψη γενικότερα. Η υπάρχουσα έρευνα έχει δείξει ότι η χρήση του συμβολικού φορμαλισμού στο πλαίσιο των παραδοσιακών προσεγγίσε-

ων της διδασκαλίας των εξισώσεων ως μέρος των μαθηματικών της κίνησης ή της μηχανικής, αποτελεί εμπόδιο για πολλούς μαθητές που εμπλέκονται με τη μελέτη εννοιών των ανώτερων μαθηματικών (Dubinsky, 2000). Μην έχοντας την ευκαιρία να αλληλεπιδράσουν με τις χρησιμοποιούμενες στατικές αναπαραστάσεις (π.χ. πίνακες και γραφήματα), οι μαθητές αποτυγχάνουν να συνδέσουν τις σχέσεις που περιγράφονται μέσω αυτών των αναπαραστάσεων με την εκτεταμένη χρήση μαθηματικών εκφράσεων (diSessa, 1993). Αντίστοιχες έρευνες στο πεδίο της διδακτικής μαθηματικών, που αφορούν τη φύση των εξισώσεων και τους τρόπους με τους οποίους αυτές μπορούν να γίνουν κατανοητές από τους μαθητές, έχουν αναδείξει δύο κύριες στάσεις που οι μαθητές υιοθετούν απέναντι στις εξισώσεις: τη *λειτουργική* (*operational, process-oriented*) και τη *δομική* (*structural, object-oriented*) (Kieran, 1992; Sfard, 1991). Η λειτουργική στάση σχετίζεται κατά κύριο λόγο με μια επιφανειακή «ανάγνωση» της εξίσωσης που εστιάζεται στην εκτέλεση υπολογιστικών διαδικασιών, ακολουθώντας μία συγκεκριμένη σειρά πράξεων (π.χ. εκτέλεση πράξεων για τον υπολογισμό αριθμητικών τιμών). Η δομική στάση, από την άλλη πλευρά, σχετίζεται με την αντίληψη της ίδιας της εξίσωσης ως αφηρημένο αντικείμενο, δηλαδή, ως ένα αυτοτελές αντικείμενο με τις δικές του ιδιότητες και εννοιολογικά χαρακτηριστικά.

Η περαιτέρω επεξεργασία της διάκρισης μεταξύ της λειτουργικής και της δομικής στάσης και των τρόπων με τους οποίους οι μαθητές κατανοούν τις αλγεβρικές εκφράσεις (συμπεριλαμβανομένων και των εξισώσεων) από ερευνητές της διδακτικής των μαθηματικών έφερε στο προσκήνιο την ιδέα της σταδιακής μετακίνησης των μαθητών από λειτουργικές σε περισσότερο δομικές θεωρήσεις. Η μετακίνηση αυτή έχει θεωρηθεί ως κατεξοχήν αφαιρετική διαδικασία και έχει περιγραφεί με τον όρο *υποστασιοποίηση* (*reification*) (Sfard, 1991). Η θεωρία της υποστασιοποίησης περιγράφει τρία στάδια εννοιολογικής ανάπτυξης μέσω των οποίων οι μαθητευόμενοι τελικά οδηγούνται στην κατασκευή μίας νέας μαθηματικής έννοιας. Στο πρώτο επίπεδο –το στάδιο της *εσωτερίκευσης* (*interiorisation*)- ο μαθητευόμενος ασχολείται με διαδικασίες που περιλαμβάνουν την εκτέλεση πράξεων σε στοιχειώδη μαθηματικά αντικείμενα μέσω των οποίων έρχεται στην επιφάνεια μια νέα έννοια. Στο δεύτερο επίπεδο –το στάδιο της *συμπύκνωσης* (*condensation*)- ο μαθητευόμενος είναι σε θέση να συμπυκνώνει διαδικασίες και να τις αντιμετωπίζει ως ένα ενιαίο όλο (ως μία ένότητα). Στο τρίτο επίπεδο, που αντιστοιχεί στο στάδιο της υποστασιοποίησης, ο μαθητευόμενος είναι σε θέση να αντιμετωπίσει τις μαθηματικές έννοιες ως αντικείμενα μιας συγκεκριμένης εννοιολογικής κατηγορίας που έχουν τη δική τους υπόσταση και να τις χρησιμοποιήσει ως ‘αντικείμενα’ για νοητικές διεργασίες ανώτερου επιπέδου που μπορεί να αποτελούν τον προπομπό για την κατασκευή καινούργιων εννοιών. Στην παρούσα έρευνα ο κεντρικός μας ερευνητικός στόχος ήταν να μελετήσουμε την κατασκευή των νοημάτων από τους μαθητές στο πλαίσιο διαδικασιών υποστασιοποίησης (εσωτερίκευση, συμπύκνωση και υποστασιοποίηση) που εμφανίστηκαν να είναι αλληλένδετες με τη χρήση των εξισώσεων για τη δημιουργία και τον έλεγχο μοντέλων κίνησης.

2. Το υπολογιστικό περιβάλλον

Το MoPiX (Winters et al., 2006) αποτελεί ένα περιβάλλον το οποίο δίνει τη δυνατότητα στο χρήστη να μοντελοποιήσει και να προσομοιώσει καταστάσεις και φαινόμενα, όπως είναι η κίνηση και η κρούση αντικειμένων. Για να προσδώσει συμπεριφορές και ιδιότητες στα αντικείμενα που συμμετέχουν στην προσομοίωση, ο χρήστης τους αποδίδει εξισώσεις που μπορεί να υπάρχουν ήδη στη «Βιβλιοθήκη» του περιβάλλοντος ή εξισώσεις που τις κατασκευάζει ο ίδιος. Οι εξισώσεις του MoPiX ενσωματώνουν τόσο κλασσικούς συμβολισμούς (π.χ. V_x , x , t), όσο και φραστικές διατυπώσεις που προέρχονται από τον προγραμματισμό ή τη φυσική γλώσσα (π.χ. Circle, and/or/not). Καθώς οι εξισώσεις αποτελούν συναρτήσεις του χρόνου, το περιβάλλον υπολογίζει συνεχώς τις τιμές των μεγεθών που εμπλέκονται στις εξισώσεις, δημιουργώντας στη «Σκηνή» το οπτικό αποτέλεσμα μίας προσομοίωσης.



Σχήμα 1: Οι εξισώσεις που έχουν αποδοθεί στην κόκκινη μπάλα φαίνονται δεξιά.

Το MoPiX προσφέρει μία ισχυρή οπτική αναπαράσταση των εξισώσεων ως υποδοχών στις οποίες μπορεί να τοποθετηθούν αριθμοί, μεταβλητές και σχέσεις, επιτρέποντας στους μαθητές να κάνουν εύκολα συνδέσεις μεταξύ της δομής μίας εξίσωσης και των ποσοτήτων που αναπαρίστανται σε αυτή. Σε αντίθεση με άλλα περιβάλλοντα προσομοίωσης, ο χρήστης του MoPiX έχει πρόσβαση στη *βαθιά δομή* (diSessa, 2000) των μοντέλων που προσομοιώνονται αφού οι εξισώσεις που αποδίδονται στα αντικείμενα δεν αποτελούν απροσπέλαστα «μαύρα κουτιά» (Kynigos, 2004). Γυρίζοντας ανάποδα τα αντικείμενα, οι εξισώσεις που τους έχουν αποδοθεί γίνονται άμεσα προσβάσιμες, ώστε ο χρήστης να μπορεί να τις εξετάσει, να τις διαγράψει ή να τις επεξεργαστεί κατάλληλα. Δοκιμάζοντας διαφορετικές εξισώσεις και ενεργοποιώντας κάθε φορά την προσομοίωση, ο χρήστης μπορεί να μοντελοποιήσει τις καταστάσεις που επιθυμεί να εξερευνήσει και στη συνέχεια να τις οπτικοποιήσει, συνδέοντας, έτσι, τη συμβολική αναπαράσταση (μαθηματικός φορμαλισμός των εξισώσεων) με τη οπτική αναπαράσταση (προσομοίωση). Η παρατή-

ρηση και η συνεχής και σταδιακή εκσφαλμάτωση και βελτίωση του μοντέλου, δίνει τη δυνατότητα στο μαθητή να κατασκευάσει νοήματα σχετικά με μαθηματικές έννοιες ή έννοιες της φυσικής που εμπλέκονται στο υπό προσομοίωση φαινόμενο.

3. Δραστηριότητες

Για την πρώτη φάση των δραστηριοτήτων αναπτύξαμε το μικρόκοσμο «Κόκκινη Μπάλα» που αποτελούνταν από μία και μόνο κόκκινη μπαλίτσα η οποία εκτελούσε μία συνδυασμένη κίνηση στον άξονα X και Y (Σχήμα 1). Από τους μαθητές ζητήθηκε να εκτελέσουν το μοντέλο, να παρατηρήσουν την προσομοίωση και να συζητήσουν με τους συμμαθητές τους τη συμπεριφορά της μπάλας. Για να κεντρίσουμε το ενδιαφέρον τους, ώστε να αρχίσουν και οι ίδιοι να χρησιμοποιούν τις εξισώσεις της «Βιβλιοθήκης», τους ζητήσαμε να δημιουργήσουν ένα νέο αντικείμενο και να προσπαθήσουν να αναπαράξουν την κίνηση της κόκκινης μπάλας αναμένοντας, έτσι, να αποδομήσουν το μοντέλο κίνησης της, μελετώντας ταυτόχρονα και τις εξισώσεις που είχαν αποδοθεί σε αυτή. Καθώς είχαμε επιλέξει η ταχύτητα της μπαλίτσας να είναι αρκετά μικρή, περιμέναμε, στο τέλος αυτής της φάσης, οι μαθητές να αρχίσουν να τροποποιούν το αρχικό μοντέλο και να περιγράφουν μέσα από νέες εξισώσεις, νέες συμπεριφορές κίνησης για τα αντικείμενά τους.

Για τη δεύτερη φάση των δραστηριοτήτων αναπτύξαμε ένα μισοψημένο μικρόκοσμο (Kynigos, 2007), ένα μικρόκοσμο, δηλαδή, που εμπεριέχει μία ενδιαφέρουσα ιδέα, αλλά ο σχεδιασμός του είναι ημιτελής ώστε να 'προκαλεί' τους μαθητές να τον αποδομήσουν και να τον τροποποιήσουν. Ο μικρόκοσμος του «Ζογκλέρ» αποτελούνταν από τρία αντικείμενα: μια κόκκινη μπάλα και δύο ρακέτες. Η συμπεριφορά της μπάλας ήταν όμοια με εκείνης του προηγούμενου μικρόκοσμου, με τη διαφορά ότι σε αυτή την περίπτωση μπορούσε να προσκρούει στις ρακέτες και να απομακρύνεται από αυτές με συγκεκριμένο τρόπο, ενώ οι ρακέτες μπορούσαν να μετακινηθούν με το ποντίκι επιτρέποντας στους μαθητές να επιτύχουν με παιγνιώδη τρόπο κρούσεις με τη μπάλα. Αρχικά ζητήθηκε από τους μαθητές να παίξουν με τα αντικείμενα και να συζητήσουν με τους συμμαθητές τους τις συμπεριφορές που παρατηρούσαν. Σε δεύτερη φάση ζητήσαμε από τους μαθητές να προσπαθήσουν να αλλάξουν τον «Ζογκλέρ», ώστε να ενσωματώσουν δικές τους ιδέες, αναμένοντας ταυτόχρονα να εμπλακούν σε διαδικασίες αποδόμησης του αρχικού μικρόκοσμου συνδέοντας συγκεκριμένες συμπεριφορές με συγκεκριμένες εξισώσεις, και να τον ανακατασκευάσουν εφαρμόζοντας τις δικές τους στρατηγικές.

4. Μέθοδος

Στην έρευνα, που έλαβε χώρα σε ένα Τ.Ε.Ε. της Αθήνας, συμμετείχαν 8 μαθητές της Γ' τάξης της ειδικότητας Μηχανικών Εργαλειομηχανών του τομέα Μηχανολόγων Μηχανικών, μία εκπαιδευτικός της αντίστοιχης ειδικότητας που είχε ταυτόχρονα και ρόλο ερευνητριας καθώς και ένας ακόμα ερευνητής. Η έρευνα διενεργήθηκε στο εργαστήριο υπολογιστών που διαθέτει το σχολείο για 25 διδακτικές ώρες

σε χρονικό διάστημα δύο μηνών κατά τη διάρκεια των οποίων οι μαθητές εργάστηκαν με το υπολογιστικό περιβάλλον MoPiX σε ομάδες των δύο ή τριών ατόμων και ενεπλάκησαν με τις παραπάνω δραστηριότητες. Η μεθοδολογική προσέγγιση που υιοθετήθηκε βασίστηκε στη συμμετοχική παρατήρηση των δραστηριοτήτων των μαθητών σε πραγματικό χρόνο. Οι ερευνητές παρενέβαιναν στις συζητήσεις των μαθητών μόνο για να τους θέσουν καίρια ερωτήματα, να τους ενθαρρύνουν ώστε να επεξηγήσουν στα υπόλοιπα μέλη της ομάδας ή και σε άλλες ομάδες της τάξης τις στρατηγικές που ακολουθούσαν, να τους παροτρύνουν εκφράσουν και να υλοποιήσουν τις ιδέες τους. Η συλλογή δεδομένων έγινε με τη βοήθεια ενός λογισμικού που επέτρεπε την ταυτόχρονη καταγραφή ήχου και εικόνας από τον υπολογιστή που είχε στη διάθεσή της η κάθε ομάδα μαθητών.

Για την ανάλυση των δεδομένων απομαγνητοφωνήθηκαν πλήρως οι διάλογοι δύο ομάδων εστίασης, ενώ χρησιμοποιήθηκαν και επεισόδια από άλλες ομάδες τα οποία θεωρήθηκαν ενδιαφέροντα από τους ερευνητές. Μονάδα ανάλυσης αποτέλεσε το θεματικό επεισόδιο, το οποίο ορίστηκε ως ένα απόσπασμα διαλόγων και πράξεων των μαθητών γύρω από κάποιο συγκεκριμένο θέμα. Τα επεισόδια επιλέχθηκαν με τέτοιο τρόπο ώστε να αναδεικνύουν τη διαδικασία νοηματοδότησης των εξισώσεων από τους μαθητές και ταυτόχρονα να περιγράφουν τη σχέση των νοημάτων αυτών με τη μετάβαση των μαθητών στα διαφορετικά στάδια (εσωτερίκευσης, συμπύκνωσης και υποστασιοποίησης) που καταλήγουν στη θεώρηση της εξίσωσης ως αντικείμενο.

5. Αποτελέσματα

5.1 Λειτουργική αντίληψη των εξισώσεων – Η φάση της εσωτερίκευσης

Οι μαθητές της Ομάδας Β, αναζητώντας στη «Βιβλιοθήκη» εξισώσεις που θα έκαναν το αντικείμενό τους να κινείται στον κατακόρυφο άξονα, όπως ακριβώς η «Κόκκινη Μπάλα», απέδωσαν στο αντικείμενό τους την εξίσωση " $V_y(ME,0)=0$ " η οποία ορίζει την ταχύτητα του αντικειμένου κατά Y να είναι 0 (δεύτερο μέλος της εξίσωσης) τη χρονική στιγμή 0 (πρώτο μέλος της εξίσωσης).

- M2 Πάτα λίγο play. Δεν έκανες τίποτα το έβαλες απλά στο 0 να είναι 0. Στην αρχική θέση να είναι 0 η ταχύτητά του. Δεν του έκανες τίποτα. Δεν άλλαξε δηλαδή να κατέβει κάτω.
- M1 Ναι, ναι.
- M2 Αυτό σου λέω, άλλαξέ το. Βάλε μία αρχική, να του βάλουμε μία αρχική ταχύτητα καλύτερα;
- E2 Ότι θέτε.
- M2 Βάλε αρχική ταχύτητα 3. Αυτό που πείραζες προηγουμένως. Με τη διαφορά ότι στο ίσον θα βάλουμε 3. Εκεί. Πήγαινε το πάνω. [Την κάνουν $V_y(ME,0)=3$ και ξεκινούν την προσομοίωση]
- M1 Όχι. Βλακεία. Για να αλλάξουμε ταχύτητα, να την βάλουμε πιο μεγάλη...

Εκκινώντας την προσομοίωση, οι μαθητές συνειδητοποίησαν ότι η εξίσωση που χρησιμοποίησαν δεν είχε το αναμενόμενο αποτέλεσμα, αφού το αντικείμενό τους δεν είχε μετακινηθεί στον άξονα Υ. Η παρατήρηση αυτή ήταν αρκετή για να δώσει το έναυσμα για μία σειρά αλλαγών στο δεύτερο μέλος της εξίσωσης. Αντικαθιστώντας κάθε φορά την υπάρχουσα αριθμητική τιμή με μία νέα, οι μαθητές προέβησαν στη διαδοχική δημιουργία αρκετών νέων εξισώσεων τις οποίες και δοκίμαζαν μέσα από την προσομοίωση. Ωστόσο, η διαδικασία αυτή φαίνεται να ήταν μάλλον μηχανική. Έχοντας ως μόνη διαφορά την αριθμητική τιμή στο δεύτερο μέλος, όλες οι νέες εξισώσεις ήταν της μορφής “ $V_y(ME,0)=$ ___”, εξισώσεις, δηλαδή, που όριζαν την ταχύτητα του αντικειμένου αποκλειστικά και μόνο *τη χρονική στιγμή 0* και συνεπώς δεν ήταν δυνατό να έχουν κάποια εμφανή επίδραση στην κίνηση του αντικειμένου. Παρόλα αυτά, οι μαθητές συνέχιζαν να δημιουργούν και να δοκιμάζουν τέτοιες εξισώσεις, μία διαδικασία που υποδηλώνει μία περισσότερο *λειτουργική* αντιμετώπιση της έννοιας της εξίσωσης. Οι συνεχείς αντικαταστάσεις καταδεικνύουν ότι οι μαθητές έβλεπαν τον όρο “ $V_y(ME,0)$ ” στο πρώτο μέλος ως μία άγνωστη ποσότητα (ένα «άγνωστο x») που θα έπρεπε κάθε φορά να είναι ισούται με μία συγκεκριμένη αριθμητική τιμή στο δεύτερο μέλος (“ $x=$ ___”), αδιαφορώντας για τη δομή του όρου και για το νόημα που κάθε ένα από τα σύμβολά του εξέφραζε.

5.2 Λειτουργική αντίληψη των εξισώσεων – Η φάση της συμπύκνωσης

Έχοντας καθορίσει το νόημα των συμβόλων στην εξίσωση “ $V_y(ME,0)=0$ ”, οι ίδιοι μαθητές, συνεχίζοντας τους πειραματισμούς τους, άρχισαν να αναζητούν τρόπους να κάνουν την ταχύτητα του αντικειμένου τους να είναι σταθερή και συνεχώς ίση με 3.

- M2 Πως μπορούμε να βάλουμε χρόνο 2, 3 εδώ πέρα; [*δείχνει την εξίσωση*]
- M1 Σε t μηδέν, ίσο με 3.
- M2 Αυτό θέλει σύμβολο;
- E2 Θέλει σύμβολο; Καλή ερώτηση. Δηλαδή πως θα το εκφράσετε;
- M2 Με σύμβολα συνήθως εκφράζουμε αυτό που δεν μπορούμε να γράψουμε ακριβώς.
- M1 Συν... t. [*Γράφει $V_y(ME,t)=3$*]. Δηλαδή εγώ το βλέπω αυτό το σύμβολο [*ενν. το t*].
- M2 Και ξέρω ότι είναι το άπειρο.

Στο παραπάνω απόσπασμα οι μαθητές φαίνεται να έχουν μετακινήσει το ενδιαφέρον τους από το δημιουργούν νέες εξισώσεις επεμβαίνοντας απλά σε αριθμητικές τιμές, στο να χρησιμοποιούν μεταβλητές και να κατασκευάζουν συναρτησιακές σχέσεις. Αν και θα μπορούσαν να ακολουθήσουν τη στρατηγική της προηγούμενης φάσης και να αντικαθιστούν μηχανικά τις αριθμητικές τιμές στο πρώτο μέλος της

εξίσωσης με νέες (για να ορίσουν την ταχύτητα σε διαφορετικές χρονικές στιγμές), οι μαθητές εδώ προβληματίζονται για το πώς θα καταφέρουν να ενσωματώσουν όλες τις χρονικές στιγμές (αριθμητικές τιμές) σε μία εξίσωση που θα περιέγραφε την ταχύτητα σε κάθε χρονική στιγμή. Η προσέγγιση αυτή τους οδήγησε στο να εισάγουν ένα νέο σύμβολο, το “ t ”, το οποίο «όταν θα το έβλεπαν θα ήξεραν ότι αναπαριστά το άπειρο», δημιουργώντας έτσι μία συναρτησιακή σχέση ανάμεσα σε δύο μεταβαλλόμενες ποσότητες: την ταχύτητα και το χρόνο. Συμβολίζοντας όλες τις στιγμές με “ t ” –ένα σύμβολο που συμπεριλαμβάνεται στο «λεξιλόγιο» του MoPiX– οι μαθητές φαίνεται να «συμπυκνώνουν» τη διαδικασία της συνεχούς αντικατάστασης αριθμητικών τιμών με νέες για τον ορισμό μίας ποσότητας στη χρήση συμβόλων ως μεταβλητών.

5.3 Δομική αντίληψη των εξισώσεων – Η φάση της υποστασιοποίησης

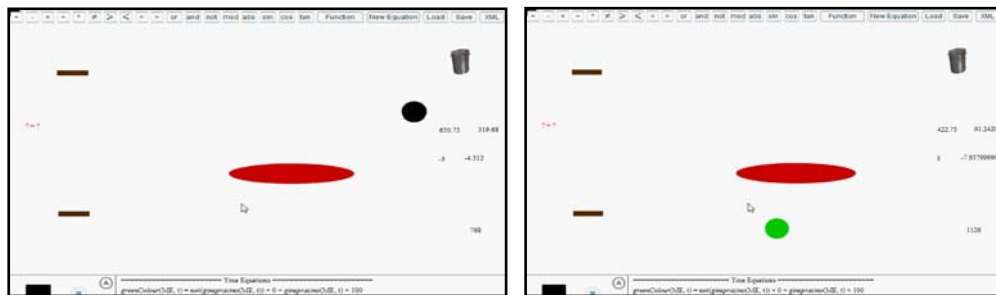
Οι μαθητές της Ομάδας Α, στη διαδικασία της αλλαγής του «Ζογκλέρ», δεν περιορίστηκαν απλά στην επεξεργασία εξισώσεων, όπως στις δύο προηγούμενες φάσεις, αλλά προέβησαν και στην κατασκευή δύο νέων, ξεκινώντας από σχεδόν μηδενική βάση. Η ιδέα που θέλησαν οι μαθητές να υλοποιήσουν ήταν να γίνεται η μπάλα πράσινη, όταν αυτή θα βρίσκεται σε «Υ χαμηλότερο» από αυτό της έλλειψης.

- M1 Όταν βρίσκεται [η μπάλα] σε χαμηλότερο Υ από το τάδε [της έλλειψης], ξέρω εγώ...
- E1 Ξέρετε σκέφτομαι.... Η μπαλίτσα καταλαβαίνει ότι είναι πάνω ή κάτω από την έλλειψη;
- M2 Αυτό θα της δώσουμε..... θα της ορίσουμε τα Υ
- M1 Αυτό. Το είμαι κάτω. Πως θα το γράψουμε;
- M2 Με τα Υ. Με τα Υ. Δηλαδή: όταν το Υ είναι στο 401, είναι κόκκινο, όταν είναι στο 400 παρά κάτι είναι πράσινο. Κατάλαβες;

Οι μαθητές εδώ φαίνεται να αποφασίζουν για δύο διαφορετικά στοιχεία της νέας εξίσωσης: για το *περιεχόμενο* (τα σύμβολα με τα οποία θα εκφράσουν τις εμπλεκόμενες ποσότητες) και για τη *δομή* της (τα σύμβολα με τα οποία θα εκφράσουν τις σχέσεις ανάμεσα στις εμπλεκόμενες ποσότητες). Καθώς στο λεξιλόγιο του MoPiX δεν υπάρχει σύμβολο που να εκφράζει το «γίνε πράσινο κάτω από ορισμένες συνθήκες», οι μαθητές επινόησαν ένα νέο σύμβολο, το “ $\text{gineprasino}(\text{ME}, t)$ ”, που τοποθέτησαν στο πρώτο μέλος της εξίσωσης, αφήνοντας το δεύτερο κενό, για να περιγράψουν εκεί τη συνθήκη αλλαγής χρώματος. Συμβολίζοντας τη θέση της έλλειψης κατά Υ με ένα σταθερό αριθμό (274), της μπάλας με τη μεταβαλλόμενη ποσότητα “ $y(\text{ME}, t)$ ” και τη σχέση μεταξύ τους με «μικρότερο ή ίσο», η εξίσωση που δημιούργησαν τελικά ήταν η “ $\text{gineprasino}(\text{ME}, t) = y(\text{ME}, t) \leq 274$ ”. Καθώς, όμως, η εξίσωση αυτή δεν ήταν αρκετή για να μετατρέπεται το χρώμα της μπάλας σε πράσινο -περιέγραφε μόνο το γεγονός στο οποίο θα ανταποκρινόταν η μπάλα (Υ μικρότερο από της έλλειψης) και όχι τη συμπεριφορά της αφού θα είχε πραγματο-

ποιηθεί το γεγονός- οι μαθητές ξεκίνησαν να κατασκευάζουν μία δεύτερη εξίσωση.

Μία εξίσωση της «Βιβλιοθήκης» που εξηγούσε τι συνέβαινε στην ταχύτητα της μπάλας αμέσως μετά τη σύγκρουσή της με τα τοιχώματα της «Σκηνής» βοήθησε τους μαθητές σε αυτή την κατεύθυνση. Αναγνωρίζοντας μία αντιστοιχία ανάμεσα στις δύο περιπτώσεις, οι μαθητές πήραν την εξίσωση της ταχύτητας, αφαίρεσαν το περιεχόμενο της και κρατώντας ίδια τη δομή της, τη χρησιμοποίησαν ως οδηγό για να περιγράψουν το τι θα συνέβαινε στο χρώμα της μπάλας όταν αυτή θα βρισκόταν κάτω από την έλλειψη. Η εξίσωση που δημιούργησαν εμπεριείχε το νέο σύμβολο “gineprasio(ME,t)”, αριθμητικές τιμές για το ποσοστό του πρασίνου χρώματος (0 και 100) και το σύμβολο που χρησιμοποιεί το MoPiX για την απόδοση πράσινου χρώματος σε ένα αντικείμενο, το “greenColour(ME,t)”. Η τελική εξίσωση είχε τη μορφή “greenColour(ME,t) = not(gineprasio(ME,t))×0 + gineprasio(ME,t)×100”.



Σχήμα 2: Το διαφορετικό χρώμα στη μπάλα ανάλογα με τη θέση της κατά Y.

Το παραπάνω επεισόδιο φαίνεται να σηματοδοτεί τη μετάβαση των μαθητών από λειτουργικές σε περισσότερο δομικές θεωρήσεις για την έννοια της εξίσωσης. Για την κατασκευή των δύο εξισώσεων, οι μαθητές, σε αυτή τη φάση, επινόησαν ένα νέο σύμβολο που είχε νόημα για εκείνους, χειρίστηκαν και εισήγαγαν στις εξισώσεις τους σύμβολα που ήδη υπήρχαν στο λεξιλόγιο του MoPiX ώστε αναπαραστήσουν τις εμπλεκόμενες ποσότητες, επινόησαν μία νέα δομή για να περιγράψουν τις σχέσεις μεταξύ των εμπλεκόμενων ποσοτήτων και «αντέγραψαν» μια υπάρχουσα δομή αφού αναγνώρισαν μία αντιστοιχία ανάμεσα στη συμπεριφορά που εξέφραζε η υπάρχουσα και η υπό κατασκευή εξίσωση. Οι διαδικασίες αυτές καταδεικνύουν μία ποιοτική αλλαγή στις θεωρήσεις των μαθητών αφού πλέον φαίνεται να αντιμετωπίζουν τις εξισώσεις του MoPiX ως αυτοτελή μαθηματικά αντικείμενα.

Αξιοσημείωτο είναι ότι, κατά την κατασκευή της δεύτερης εξίσωσης, φαίνεται να συνυπάρχουν οι λειτουργικές και δομικές θεωρήσεις. Βλέποντας το “y(ME,t)≤274” σαν μία υπολογιστική διαδικασία σύγκρισης ανάμεσα σε δύο αριθμούς, οι μαθητές ενσωμάτωσαν στη δεύτερη εξίσωση το “gineprasio(ME,t)”, αντιμετωπίζοντάς το ταυτόχρονα ως το αποτέλεσμα αυτή της σύγκρισης αλλά και ως ένα αυτόνομο αλ-

γεβρικό αντικείμενο με τη δική του υπόσταση. Το γεγονός αυτό αναδεικνύει το συμπληρωματικό χαρακτήρα των δύο αντιλήψεων και φαίνεται να συμβάλει ενισχυτικά στη θεώρηση των εξισώσεων ως αντικειμένων.

6. Συμπέρασμα

Στην παρούσα έρευνα η δυνατότητα απευθείας αλληλεπίδρασης με το φορμαλισμό των εξισώσεων στο MoPiX αλλά και η απόδοση συγκεκριμένων συμπεριφορών σε αντικείμενα της «Σκηνής» μέσα από την κατασκευή νέων εξισώσεων φάνηκε να ευνόησε την εννοιολογική εμπλοκή των μαθητών σε αφαιρετικές διαδικασίες (εσωτερίκευσης, συμπύκνωσης και υποστασιοποίησης) αναφορικά με τη νοηματοδότηση των εξισώσεων ως αντικειμένων. Οι διαδικασίες αυτές συνδυάστηκαν με τη σταδιακή εστίαση των μαθητών στη δομή των εξισώσεων και χαρακτηρίστηκαν από την εναλλαγή και τη διασύνδεση των θεωρήσεων διαδικασίας και αντικειμένου (Sfard, 1991). Συμπερασματικά, σύμφωνα με τη θεωρία δόμησης της γνώσης μέσω κατασκευών που υιοθετήσαμε, η υποστασιοποίηση των εξισώσεων στο συγκεκριμένο πλαίσιο δεν εμφανίστηκε ως μια αυστηρά ιεραρχημένη πορεία κατανόησης συγκεκριμένων μαθηματικών εννοιών, αλλά ως μια δυναμική διαδικασία κατασκευής νοημάτων που οριοθετήθηκε από τα χαρακτηριστικά των διαθέσιμων εργαλείων, τη δυνατότητα των μαθητών να αλληλεπιδρούν με τον προσφερόμενο φορμαλισμό και να έχουν άμεση ανατροφοδότηση μέσω της οπτικής αναπαράστασης της εκάστοτε προσομοίωσης.

7. Σημειώσεις

Η έρευνα διεξήχθη στο πλαίσιο του ευρωπαϊκού έργου “ReMath” (Representing Mathematics with Digital Media), European Community, 6th Framework Programme, Information Society Technologies, IST-4-26751-STP, 2005-2008 (<http://remath.cti.gr>).

8. Βιβλιογραφία

- diSessa, A. (1993). The many faces of a computational medium: Teaching the mathematics of motion. In B. Jaworski (Ed.), *Proceedings of the conference Technology in Mathematics Teaching* (pp. 23–38). Birmingham, England: University of Birmingham.
- diSessa, A. (2000). *Changing Minds, Computers, Learning and Literacy*. Cambridge, MA: MIT Press.
- Dubinsky, E. (2000). Meaning and formalism in mathematics. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 5 (3), 211–240.
- Harel, I., & Papert, S. (1991). *Constructionism: Research Reports & Essays*. Norwood, US: Ablex Publishing Corporation.

- Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 390–419). New York: Macmillan.
- Kynigos, C. (2004) A black and white box approach to user empowerment with component computing, *Interactive Learning Environments*, Carfax Pubs, Taylor & Francis Group, Vol. 12, 1–2, 27–71. (2)
- Kynigos, C. (2007). Half-Baked Logo Microworlds as Boundary Objects in Integrated Design. *Informatics in Education*, 6 (2), 335–359.
- Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1–36.
- Winters, N., Kahn, K. Nikolic, D., & Morgan, C. (2006). Design sketches for MoPiX: A mobile game environment for learning mathematics. LKL, Technical Report.