

# ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ ΝΟΗΜΑΤΟΔΟΤΗΣΗΣ ΤΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΕΥΣΗΣ ΜΕΣΩ ΜΟΤΙΒΩΝ

Αγγελική Ζούπα & Γιώργος Ψυχάρης

Μαθηματικό Τμήμα ΕΚΠΑ

mekcapsaki@hotmail.com gpsych@math.uoa.gr

## ΠΕΡΙΛΗΨΗ

*Στο παρόν άρθρο παρουσιάζεται μια έρευνα που εστιάζεται στη διερεύνηση της κατασκευής νοημάτων για τη μαθηματική γενίκευση από μαθητές της Α' γυμνασίου κατά την εμπλοκή τους σε δραστηριότητες ελέγχου και κατασκευής μοτίβων σε ειδικά σχεδιασμένο υπολογιστικό περιβάλλον. Στα αποτελέσματα καταγράφεται η εννοιολογική εμπλοκή των μαθητών σε αφαιρετικές διαδικασίες που ευνοήθηκαν από τις δραστηριότητες που σχεδιάστηκαν για τους μαθητές και την ανατροφοδότηση του υπολογιστικού περιβάλλοντος.*

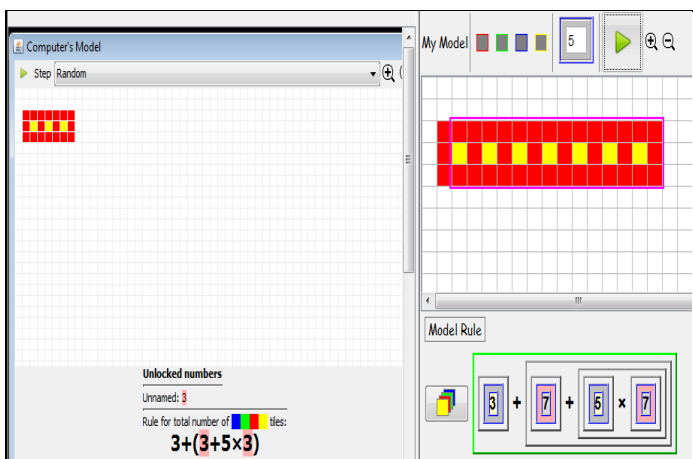
## ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Στην παρούσα εργασία παρουσιάζουμε αποτελέσματα από μια μικρής έκτασης έρευνα που στόχευε στη διερεύνηση της νοηματοδότησης της μαθηματικής γενίκευσης από μαθητές της Α' γυμνασίου κατά την εμπλοκή τους σε δραστηριότητες ελέγχου και κατασκευής μοτίβων (patterns). Οι μαθητές συνεργάστηκαν σε ομάδες των δύο ατόμων χρησιμοποιώντας το διερευνητικό λογισμικό eXpresser (Noss et al., 2009) που παρέχει τη δυνατότητα κατασκευής μοτίβων με τετραγωνάκια διαφορετικών χρωμάτων. Το eXpresser επιτρέπει στους μαθητές να χρησιμοποιήσουν εικονικές μεταβλητές για να αναπαράγουν τις κατασκευές τους για διαφορετικό αριθμό επαναλήψεων, να εκφράζουν σχέσεις γενίκευσης και να ελέγχουν την ορθότητά τους μέσα από κατάλληλη ανατροφοδότηση. Με αυτό τον τρόπο, το λογισμικό έχει ενσωματωμένο ένα είδος 'άλγεβρας' που στοχεύει στο να κάνει περισσότερο χειροπιαστή την έννοια της γενίκευσης προκαλώντας την εστίαση των μαθητών στη δομή της. Η προσέγγιση αυτή βρίσκεται στον αντίποδα της συνήθους διδασκαλίας της γενίκευσης στο σχολείο που βασίζεται στην εκμάθηση τεχνικών ή μεθόδων για την εύρεση του γενικού κανόνα μιας ακολουθίας με χρήση αριθμητικών ή εικονικών αναπαραστάσεων (π.χ. εύρεση συνολικού αριθμού στοιχείων σε διαφορετικές θέσεις της ακολουθίας), χωρίς δυνατότητα αιτιολόγησης της σύνδεσης ειδικού-γενικού αλλά και της ισχύος του γενικού κανόνα (Sutherland & Mason, 2005).

Η έννοια της γενίκευσης βρίσκεται στο επίκεντρο της μαθηματικής δραστηριότητας των μαθητών στο σχολείο, καθώς η εύρεση και η έκφραση γενικευμένων σχέσεων και κανόνων διατρέχει μεγάλο μέρος της διδασκαλίας των μαθηματικών – ιδιαίτερα στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Οι δραστηριότητες με μοτίβα έχει υποδειχτεί ότι προσφέρουν πλαίσια πρόσφορα για την μελέτη της γενίκευσης μέσω της άλγεβρας,

αλλά και των αντίστοιχων δυσκολιών που αναμένεται να έχουν οι μαθητές (Morelli, 1992). Η αλγεβρική γενίκευση ενός μοτίβου περιλαμβάνει τρία στάδια: την αναγνώριση μιας ομοιότητας, την επέκταση και γενίκευσή της για όλους τους επακόλουθους όρους και την έκφραση του αντίστοιχου αλγεβρικού τύπου (Radford, 2003). Οι συνήθειες δυσκολίες των μαθητών αφορούν στην αναγνώριση και έκφραση γενικευμένων μοτίβων, τη σύνδεση των αντίστοιχων αναπαραστάσεων, τη μετάβαση από τη φυσική στη συμβολική γλώσσα και την ανάπτυξη λανθασμένων επαγωγών αντί αλγεβρικών γενικεύσεων (Zazkis & Liljedahl, 2002; Rivera & Becker, 2008). Η έρευνα των Rivera και Becker (2008) έδειξε ότι μόνο το ένα πέμπτο των μαθητών Γυμνασίου μπορούσαν να χρησιμοποιήσουν άλγεβρα για να εκφράσουν τις γενικεύσεις μοτίβων που δίνονταν σε εικονική μορφή και μορφή πίνακα.

Στην παρούσα έρευνα χρησιμοποιήσαμε το λογισμικό eXpresser προκειμένου να εμπλέξουμε τους μαθητές στην κατασκευή και τον έλεγχο μοτίβων επιδιώκοντας ταυτόχρονα την εστίασή τους στη δομή της γενίκευσης και στην διάκριση του γενικού μέσω του ειδικού. Υιοθετήσαμε τη θεωρία δόμησης της γνώσης μέσω κατασκευών (Constructionism, Harel & Papert, 1991) και εστιαστήκαμε στους τρόπους με τους οποίους η κατασκευή νοημάτων για τη γενίκευση από τους μαθητές διαμεσολαβήθηκε από τα διαθέσιμα ψηφιακά εργαλεία ως διαδικασία μαθηματικής αφαίρεσης. Για τη μελέτη των αφαιρετικών διαδικασιών χρησιμοποιήσαμε τη θεωρία αφαίρεση εντός πλαισίου (Abstraction in Context, Hershkowitz et al., 2001) σύμφωνα με την οποία η κατασκευή νέας μαθηματικής γνώσης περιγράφεται μέσα από τρεις εννοιολογικές δράσεις των μαθητευομένων: *αναγνώριση (recognizing)* μιας μαθηματικής δομής ως κατάλληλης στο πλαίσιο μιας δραστηριότητας, *συγκερασμός (building-with)* στοιχείων της υπάρχουσας γνώσης για την επίτευξη ενός στόχου (π.χ. λύση ενός προβλήματος), *κατασκευή (constructing)* μιας νέας δομής και *παγιοποίηση (consolidation)* της νέας δομής στο πλαίσιο μιας νέας εφαρμογής. Στην παρούσα εργασία ο κεντρικός μας ερευνητικός στόχος ήταν να διερευνήσουμε τη νοηματοδότηση της γενίκευσης και τη συμβολική της έκφραση ως αφαιρετική διαδικασία που έλαβε χώρα κατά την αλληλεπίδραση των μαθητών με τα ψηφιακά εργαλεία για την κατασκευή και τον έλεγχο μοτίβων.



Σχ. 1 Μοτίβο στο eXpresser με 3 κόκκινα σταθερά τετράγωνα (1η στήλη) και μια δομική μονάδα με 5 κόκκινα τετράγωνα και 1 κίτρινο.

## ΤΟ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΟ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝ

Το eXpresser αποτελείται από δύο κύριες περιοχές: (α) μια περιοχή εργασίας (My Model, Σχ. 1 δεξιά στην οθόνη) για την κατασκευή και αναπαραγωγή (‘κίνηση’) μοτίβων για τυχαίο αριθμό επαναλήψεων και (β) μια περιοχή προβολής της αναπαραγωγής του μοτίβου που κατασκευάζεται στο My Model για διαφορετικό αριθμό επαναλήψεων (Computer’s Model, Σχ. 1 αριστερά στην οθόνη). Στην περιοχή My Model οι μαθητές μπορούν να κατασκευάσουν επαναλαμβανόμενα μοτίβα μέσα από την επανάληψη μιας σύνθεσης από τετράγωνα διαφορετικών χρωμάτων που ονομάζεται δομική μονάδα (building block) (Σχ. 1). Μέσα από την επιλογή τετραγώνων διαφορετικών χρωμάτων οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα να ορίσουν τη δομική μονάδα ενός μοτίβου και να καθορίσουν τις ιδιότητές της (π.χ. ο αριθμός των τετραγώνων ανά χρώμα). Σημειώνουμε ότι οι ποσότητες στο eXpresser (π.χ. ο αριθμός των επαναλήψεων του μοτίβου, ο συνολικός αριθμός τετραγώνων ανά χρώμα) μπορεί να είναι σταθεροί αριθμοί, που εμφανίζονται μέσα σε γκρι ορθογώνιο πλαίσιο, ή εικονικές μεταβλητές, η τρέχουσα τιμή των οποίων εμφανίζεται σε ροζ ορθογώνιο πλαίσιο. Οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα να μετατρέψουν ένα σταθερό αριθμό (γκρι πλαίσιο) σε εικονική μεταβλητή (ροζ πλαίσιο) ‘ξεκλειδώνοντάς’ τον με την εντολή Ξεκλείδωμα. Με το πάτημα του κουμπιού Play το πρόγραμμα αποδίδει τυχαίες τιμές στις εικονικές μεταβλητές που έχει ορίσει ο χρήστης.

Ένα μοτίβο κατασκευάζεται για πρώτη φορά μόνο για ένα συγκεκριμένο αριθμό επαναλήψεων. Σε αυτή την περίπτωση το μοτίβο εμφανίζεται χρωματισμένο στο My Model και στο Computer’s Model μόνο όταν οι μαθητές συμπληρώσουν σωστά στα ειδικά εικονίδια με ‘?’ (σχ. 3α) τον συνολικό αριθμό τετραγώνων από κάθε χρώμα για το συγκεκριμένο αριθμό επαναλήψεων. Σε αντίθετη περίπτωση και ως ένδειξη της ύπαρξης λάθους, το μοτίβο εμφανίζεται χωρίς χρώμα. Η δυναμική αναπαραγωγή

του μοτίβου (δηλ. η ‘κίνησή’ του) εξασφαλίζεται με την μετατροπή του αριθμού των επαναλήψεων του μοτίβου από σταθερό αριθμό σε εικονική μεταβλητή ‘ξεκλειδώνοντας’ τον αριθμό των επαναλήψεων στις Ιδιότητες Μοτίβου. Η μετατροπή αυτή σηματοδοτείται από το περιβάλλον με την αλλαγή του χρώματος του εικονιδίου που περιέχει την εκάστοτε τιμή της μεταβλητής από γκρι σε ροζ (σχ. 3β). Επομένως, η χρήση εικονικής μεταβλητής είναι αναγκαίος όρος για να μπορεί να αναπαραχθεί το μοτίβο για τυχαίους (και διαφορετικούς) αριθμούς επανάληψης στο My Model και στο Computer’s Model αντίστοιχα με το πάτημα του κουμπιού Play. Όπως θα δούμε και στα αποτελέσματα, για να εμφανιστεί το μοντέλο σωστά στο My Model (δηλ. χρωματισμένο) θα πρέπει οι μαθητές να κατασκευάσουν στις Ιδιότητες Μοτίβου κατάλληλες ‘αλγεβρικές’ εκφράσεις για το συνολικό αριθμό των τετραγώνων ανά χρώμα με χρήση της (ανεξάρτητης) εικονικής μεταβλητής που εκφράζει τον αριθμό των επαναλήψεων (σχ. 3στ). Θα πρέπει να σημειωθεί ότι ακόμη κι αν το μοντέλο εμφανίζεται σωστά στο My Model, αναπαράγεται για διαφορετικές τιμές επανάληψης χωρίς χρώμα στο Computer’s Model. Για να εμφανιστεί το μοτίβο σωστά για κάθε τυχαία επανάληψη στο My Model και στο Computer’s Model, θα πρέπει οι μαθητές να κατασκευάσουν μια ‘αλγεβρική’ έκφραση που αντιστοιχεί στον συνολικό αριθμό των τετραγώνων του μοτίβου στο ειδικό πλαίσιο Model Rule (σχ. 1 κάτω δεξιά)’. Τέλος, για τη συμμεταβολή δύο μοτίβων θα πρέπει να χρησιμοποιηθεί η ίδια εικονική (ροζ) μεταβλητή για την έκφραση του συνολικού αριθμού των τετραγώνων σε κάθε μοτίβο.

## ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ

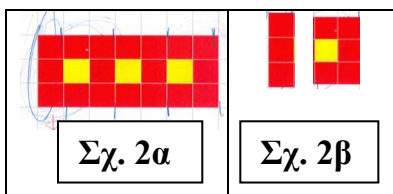
Οι δραστηριότητες διαρθρώθηκαν σε 5 φάσεις. Στην πρώτη φάση των δραστηριοτήτων ο μικρόκοσμος eXpresser αξιοποιήθηκε ως εργαλείο προβολής έτοιμων μοτίβων και οι μαθητές κλήθηκαν να εντοπίσουν τους μαθηματικούς τύπους που εκφράζουν τα συγκεκριμένα μοτίβα. Κατά τη διάρκεια αυτής της φάσης οι μαθητές παρατήρησαν τις διάφορες λειτουργίες του λογισμικού (π.χ. εικονικές μεταβλητές, κίνηση του μοτίβου) και δόθηκαν λαβές για συζητήσεις σχετικά με τον τρόπο λειτουργίας του. Στη φάση αυτή χρησιμοποιήθηκαν γραμμικά μοτίβα 1<sup>ου</sup> βαθμού της μορφής  $ax$  (δηλ. μοτίβα με ένα επαναλαμβανόμενο μέρος) και  $ax+b$  (δηλ. μοτίβα με σταθερό και επαναλαμβανόμενο μέρος). Στη δεύτερη φάση οι μαθητές κλήθηκαν να κατασκευάσουν τα δικά τους μοτίβα της μορφής  $ax+b$ . Στην τρίτη φάση δόθηκαν στους μαθητές αλγεβρικοί τύποι της μορφής  $ax$  και  $ax+b$  και τους ζητήθηκε να κατασκευάσουν στον eXpresser μοτίβα που αντιστοιχούν στους συγκεκριμένους τύπους. Στην τέταρτη φάση οι μαθητές κλήθηκαν να μετατρέψουν έτοιμα μοτίβα δοσμένα από τους ερευνητές σε άλλα μοτίβα τα οποία δίνονταν σε στατική εικόνα στο φύλλο εργασίας. Τέλος, στην πέμπτη φάση οι μαθητές παρατήρησαν και κατασκεύασαν γραμμικά μοτίβα δευτέρου βαθμού (π.χ.  $x^2+4x+4$ ).

## ΜΕΘΟΔΟΣ

Στην έρευνα συμμετείχαν έξι 13χρονοι μαθητές που μόλις είχαν αποφοιτήσει από την Α' Γυμνασίου από δύο διαφορετικά Γυμνάσια της Κέρκυρας. Οι μαθητές εργάστηκαν συνολικά 12 ώρες (60λ) με το υπολογιστικό περιβάλλον eXpresser σε ομάδες των δύο. Η ακολουθούμενη μέθοδος αντιστοιχεί σε μελέτη περίπτωσης με στοιχεία έρευνας σχεδιασμού (Cobb et al., 2003). Καθώς γνωρίζαμε ότι η επαφή των μαθητών με μοτίβα ήταν από ανύπαρκτη έως αποσπασματική μέχρι εκείνη τη στιγμή, αναμέναμε να δούμε αν και με ποιο τρόπο η αλληλεπίδρασή τους με τα διαθέσιμα ψηφιακά εργαλεία θα επηρέαζε τα νοήματα που θα δημιουργούσαν για τη γενίκευση. Η συλλογή δεδομένων έγινε με τη βοήθεια ψηφιακού μαγνητόφωνου και κάμερας. Για την ανάλυση των δεδομένων απομαγνητοφωνήθηκαν πλήρως οι διάλογοι των μαθητών. Μονάδα ανάλυσης αποτέλεσε το θεματικό επεισόδιο, το οποίο ορίστηκε ως ένα απόσπασμα διαλόγων και πράξεων των μαθητών γύρο από ένα συγκεκριμένο θέμα. Τα επεισόδια επιλέχθηκαν έτσι ώστε, σε πρώτο επίπεδο, να αναδεικνύονται οι διαδικασίες αναγνώρισης και έκφρασης της γενίκευσης από τους μαθητές και, σε δεύτερο επίπεδο, να περιγράφεται η εξέλιξη των εννοιολογικών δράσεων των μαθητών με όρους μαθηματικής αφαίρεσης. Στο παρόν άρθρο αναλύουμε επεισόδια από την εργασία μιας ομάδας δύο μαθητριών (Ομάδα 1: Αλεξάνδρα, Ιωάννα).

## ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

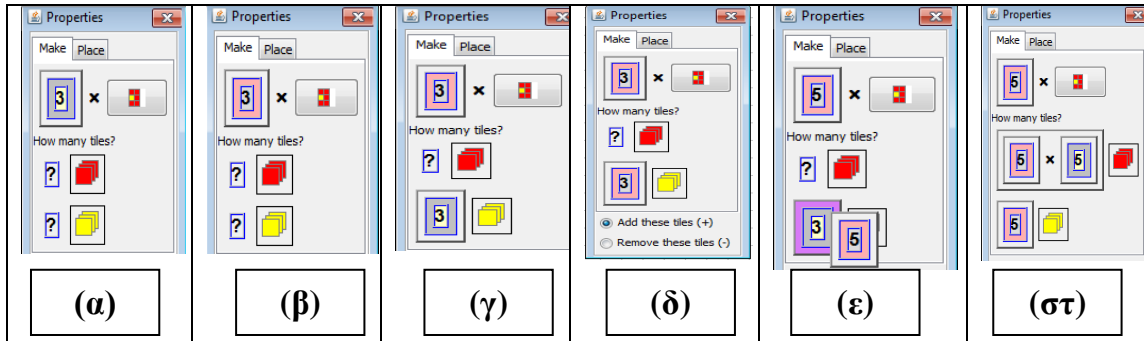
### Νοηματοδότηση της γενίκευσης μέσω της διάκρισης σταθερών και μεταβλητών



Το επεισόδιο αυτό έλαβε χώρα κατά τη δεύτερη φάση των δραστηριοτήτων όταν οι μαθητές έφτιαζαν τα πρώτα τους μοτίβα στο λογισμικό. Μέχρι τότε είχαν επεξεργαστεί έτοιμα (κατασκευασμένα από τους ερευνητές) μοτίβα μέσω των οποίων είχαν ανακαλύψει πολλές λειτουργίες

του λογισμικού, όπως για παράδειγμα τη δημιουργία εικονικών μεταβλητών ('ξεκλειδώνοντας' ένα σταθερό αριθμό) αλλά και το ότι ένα μοτίβο μπορεί να αναπαραχθεί ('κινήθει') για τυχαίες τιμές μόνο μέσω της χρήσης εικονικής μεταβλητής. Σε αυτή τη δραστηριότητα οι μαθητές κλήθηκαν να κατασκευάσουν στο λογισμικό το πρώτο τους μοτίβο που εμφανίζεται στο σχ. 2α. Αρχικά οι δύο μαθήτριες της ομάδας 1 αναγνώρισαν ότι αποτελείται από δύο μέρη: 3 σταθερά κόκκινα τετράγωνα και μια δομική μονάδα με 5 κόκκινα τετράγωνα και 1 κίτρινο (σχ. 2β). Αφού επέλεξαν τα 6 συγκεκριμένα τετράγωνα και τα όρισαν ως δομική μονάδα επέλεξαν το 3 ως αρχική τιμή των επαναλήψεων της και στο My model εμφανίστηκε το μοτίβο του σχ. 2α. Με το πάτημα του κουμπιού Play, το μοτίβο παρέμεινε ακίνητο καθώς δεν είχε χρησιμοποιηθεί εικονική μεταβλητή. Ως απάντηση, οι μαθήτριες ξεκλείδωσαν τον αριθμό των επαναλήψεων στο ειδικό ορθογώνιο εικονίδιο στο οποίο εμφανίζονται οι αντίστοιχες τιμές της επανάληψης δημιουργώντας έτσι μια (ροζ) εικονική μεταβλητή (σχ. 3β πάνω). Για τον σωστό χρωματισμό του μοτίβου κατά την κίνησή του, έπρεπε στη συνέχεια να εκφραστούν

με την συγκεκριμένη μεταβλητή ο αριθμός των κόκκινων και κίτρινων τετραγώνων και οι αντίστοιχες εκφράσεις να τοποθετηθούν στις κενές θέσεις με ένδειξη “?” δίπλα από κάθε χρώμα στις Ιδιότητες Μοτίβου (σχ. 3β κάτω). Πιο συγκεκριμένα, στη θέση των κίτρινων έπρεπε να τοποθετηθεί (με σύρσιμο και αντικατάσταση) η ίδια εικονική μεταβλητή, ενώ στη θέση των κόκκινων η συγκεκριμένη μεταβλητή επί τον αριθμό 5. Αρχικά η Αλεξάνδρα έδωσε την σταθερή τιμή 3 για τα κίτρινα τετραγωνάκια (όσο ήταν και η τρέχουσα τιμή της εικονικής μεταβλητής εκείνη τη στιγμή) (σχ. 3γ).



Σχ. 3 Ιδιότητες Μοτίβου για την κατασκευή και κίνηση του μοτίβου του σχ. 2α.

Πατώντας Play για την αναπαραγωγή του μοτίβου οι μαθήτριες διαπίστωσαν ότι το μοτίβο δεν χρωματίζεται σωστά καθώς άλλαζε συνεχώς τιμές η εικονική μεταβλητή ενώ ο αριθμός των κίτρινων τετραγώνων παρέμενε σταθερός. Η Ιωάννα αμέσως αναγνώρισε ότι χρειάζεται να χρησιμοποιήσουν την ίδια εικονική μεταβλητή και για τον αριθμό των κίτρινων τετραγώνων. Αυτό όμως δεν ήταν προφανές για την Αλεξάνδρα η οποία δημιούργησε καινούρια εικονική μεταβλητή ξεκλειδώνοντας τον σταθερό (γκρι) αριθμό των κίτρινων τετραγώνων (σχ. 3δ). Όταν οι μαθήτριες κίνησαν εκ νέου το μοτίβο πατώντας Play παρατήρησαν και πάλι ότι δεν χρωματιζόταν σωστά καθώς οι δύο εικονικές μεταβλητές μεταβάλλονταν ανεξάρτητα η μια από την άλλη. Τότε η Ιωάννα πρότεινε να χρησιμοποιηθεί η ίδια εικονική μεταβλητή του αριθμού των επαναλήψεων του μοτίβου και για τον αριθμό των κίτρινων τετραγώνων (σύρσιμο και επιλογή ‘αντικατάσταση’ από το αναδυόμενο μενού, σχ. 3ε).

K: Τι αριθμό πρέπει να βάλεις στα κίτρινα;

A: 5, το ίδιο.

I: Μπορείς να βάλεις το ροζέ [ενν. το ροζ εικονίδιο της εικονικής μεταβλητής].

A: Ωραία για να πατήσουμε το Play να δούμε τι θα γίνει.

I: Ωχ εδώ είναι παραπάνω, έπρεπε να βάλεις τον ίδιο αριθμό, τώρα έχουν διαφορετικά ροζ. Γιατί δεν παίρνεις απλά αυτό και να το βάλεις εδώ; Πάρε αυτό και βάλτο εδώ.

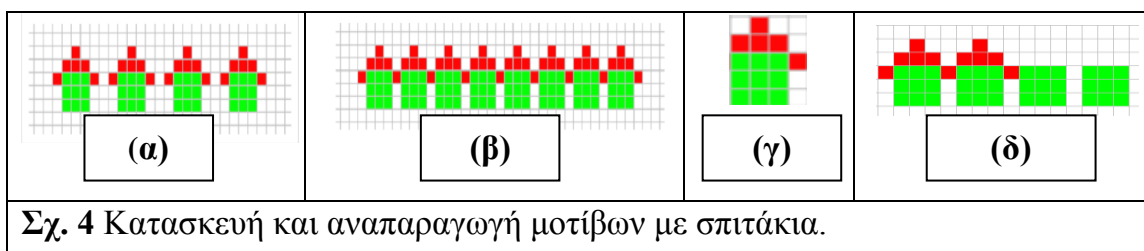
Στη συνέχεια οι μαθήτριες ακολούθησαν την ίδια διαδικασία και για την έκφραση του αριθμού των κόκκινων τετραγώνων. Συγκεκριμένα, έσυραν την εικονική

μεταβλητή του αριθμού των επαναλήψεων στο αντίστοιχο πλαίσιο και την πολλαπλασίασαν με τον σταθερό γκρι αριθμό 5 (σχ. 3στ).

Όπως φαίνεται στο παραπάνω επεισόδιο η αλληλεπίδραση των μαθητριών με τα διαθέσιμα εργαλεία περιστράφηκε γύρω από τη διάκριση σταθερών και μεταβλητών προκειμένου να επιτευχθεί η σωστή αναπαραγωγή ('χρωματισμός') του μοτίβου για τυχαίες τιμές επανάληψης. Οι μαθήτριες αρχικά νοηματοδότησαν τον ορισμό της εικονικής μεταβλητής για τον αριθμό των επαναλήψεων της δομικής μονάδας. Η χρήση σταθερών τιμών για τον αριθμό των κίτρινων τετραγώνων, ο ορισμός νέας (εικονικής) μεταβλητής για τον αριθμό τους και η περαιτέρω διερεύνηση του ρόλου των σταθερών και των εικονικών μεταβλητών για την σωστή αναπαραγωγή του μοτίβου αντιστοιχούν στο στάδιο της αναγνώρισης των δομών του λογισμικού από την πλευρά των μαθητριών με βάση τις υπάρχουσες γνώσεις τους για την μεταβλητή και το ρόλο της. Ωστόσο, οι ειδικά σχεδιασμένες δομές του περιβάλλοντος φαίνεται ότι διευκόλυναν τον συγκερασμό της υπάρχουσας και της αναδυόμενης γνώσης για τη μεταβολή και τις σχέσεις αλληλεξάρτησης μεταξύ των ποσοτήτων που περιγράφουν την δομή του κατασκευαζόμενου μοτίβου. Η χρήση της ίδιας εικονικής μεταβλητής για τον αριθμό των κίτρινων και ακολούθως των κόκκινων τετραγώνων μέσα από σύρσιμο του αντίστοιχου εικονιδίου («για να έχουν το ίδιο ροζ») και η χρήση αντίστοιχων σχέσεων αλληλεξάρτησης («ο αριθμός των κίτρινων ισούται με τον αριθμό επαναλήψεων, ενώ ο αριθμός των κόκκινων με το πενταπλάσιό του») σηματοδοτεί τη φάση συγκερασμού μεταξύ της υπάρχουσας και της νέας γνώσης των μαθητριών για να χρωματίσουν σωστά το μοτίβο τους. Έτσι, οι μαθήτριες κατασκεύασαν μια νέα δομή σχέσεων και εξαρτήσεων που διέπουν το μοτίβο τους για την ορθή αναπαραγωγή του για τυχαίες τιμές.

### Νοηματοδότηση της συµμεταβολής μοτίβων µε 'ενοποίηση' μεταβλητών

Το επεισόδιο που ακολουθεί έλαβε χώρα κατά την τέταρτη φάση όταν δόθηκε στους μαθητές το μοτίβο του σχ. 4α και τους ζητήθηκε να κατασκευάσουν το μοτίβο του σχ. 4β.



Σχ. 4 Κατασκευή και αναπαραγωγή μοτίβων με σπιτάκια.

Αρχικά οι μαθήτριες της ομάδας 1 αναγνώρισαν πως έπρεπε να κρατήσουν σταθερό το κόκκινο τετράγωνο στο αριστερό άκρο του σχήματος και να ορίσουν ως δομική μονάδα το μοτίβο του σχ. 4γ. Με τη διαδικασία που ακολούθησαν και στο προηγούμενο επεισόδιο έφτιαξαν στο λογισμικό δύο νέα (επαναλαμβανόμενα) μοτίβα-δομικές μονάδες: ένα με 9 πράσινα τετράγωνα (για τη βάση) και ένα με 5 κόκκινα (για τη σκεπή). Σε καθένα από τα συγκεκριμένα μοτίβα χρησιμοποίησαν ως εικονική μεταβλητή τον αντίστοιχο αριθμό των επαναλήψεων. Όταν η Ιωάννα

μετέφερε με το ποντίκι τις σκεπές πάνω στο σώμα του σπιτιού και πάτησε Play, είδε ότι το σχήμα του σπιτιού αλλοιωνόταν κατά την αναπαραγωγή του καθώς οι δύο εικονικές μεταβλητές έπαιρναν διαφορετικές τυχαίες τιμές, δηλ. μεταβάλλονταν ανεξάρτητα η μια από την άλλη (σχ. 4δ).

I: Ναι άλλα τώρα θα πρέπει να έχουμε τον ίδιο αριθμό από σκεπές και σπίτια, άρα να βάλουμε τον ίδιο ροζ αριθμό και στις σκεπούλες.

Η Ιωάννα σε αυτό το σημείο χρησιμοποιεί τη στρατηγική του αρχικού επεισοδίου με τη διαφορά ότι εδώ η ‘ενοποίηση’ των μεταβλητών γίνεται για να επιτευχθεί συμμεταβολή μεταξύ μοτίβων. Πιο συγκεκριμένα, ενώ στο επεισόδιο 1 η Ιωάννα έκανε σύρσιμο/αντικατάσταση της εικονικής μεταβλητής στο πλαίσιο των Ιδιοτήτων του ίδιου μοτίβου, εδώ έκανε την ίδια διαδικασία σέρνοντας και αντικαθιστώντας μια εικονική μεταβλητή από τις Ιδιότητες Μοτίβου της μιας δομικής μονάδας (σκεπής) στις Ιδιότητες μοτίβου της άλλης (βάσης). Στη συνέχεια, και ενώ το μοτίβο (σχ. 4β) αναπαραγόταν σωστά και εμφανιζόταν χρωματισμένο στο My Model, οι μαθήτριες θέλησαν να το χρωματίσουν και στο Computer’s Model. Γι’ αυτό κατασκεύασαν μια ‘αλγεβρική’ έκφραση (σχ. 5) που αντιστοιχεί στον συνολικό αριθμό των τετραγώνων του μοτίβου στο ειδικό πλαίσιο Model Rule σέρνοντας από τις Ιδιότητες και των δύο μοτίβων τους (σκεπή και βάση) τις εικονικές εκφράσεις που αντιστοιχούσαν στον αριθμό των τετραγώνων ανά χρώμα και επιλέγοντας στο εμφανιζόμενο μενού ‘πρόσθεση’. Η Αλεξάνδρα αμέσως πρότεινε την πρόσθεση και η Ιωάννα διάβασε την αντίστοιχη έκφραση αναφέροντας μόνο αριθμούς καθώς στη θέση της εικονικής μεταβλητής διάβασε την τρέχουσα τιμή της (το 3). Μετά από διόρθωση της Αλεξάνδρας, η Ιωάννα συνέδεσε τα δομικά στοιχεία στην εικονική έκφραση του μοτίβου με τον αντίστοιχο αλγεβρικό τύπο.

$$3 \times 5 + 9 \times 3 + 1$$

Σχ. 5

A: Ποιος είναι ο τύπος λοιπόν;

I: 3 επί 5, συν 9 επί 3, συν 1.

A: (Διορθώνει). Δεν είναι αυτός ο τύπος! Με το χ δεν πρέπει; 1 + 9 επί χ...

I: χ επί 5, συν 9 επί χ, συν 1!

Στο επεισόδιο αυτό φαίνεται ότι οι μαθητές χτίζουν στην προηγούμενη εμπειρία τους με τα εργαλεία του eXpresser και νοηματοδοτούν τη μαθηματική γενίκευση μέσα από την εφαρμογή της γνώσης τους για τα μοτίβα και τη δομή τους σε ένα επόμενο μοντέλο που προέκυψε ως σύνθεση δύο δομικών μονάδων. Την ίδια στιγμή είναι σε θέση να εκφράσουν και συμβολικά την γενίκευση κάνοντας περισσότερο εμφανείς τις συνδέσεις της αναδυόμενης με την σχολική γνώση. Με όρους μαθηματικής αφαίρεσης έχουμε την παγιοποίηση της προηγούμενης δομής αναφορικά με τις προϋποθέσεις επίτευξης της ορθής αναπαραγωγής του μοντέλου για τυχαίες τιμές. Ωστόσο, στο επεισόδιο οι μαθητές φαίνεται να διευρύνουν τη νέα δομή καθώς η παρούσα αντικατάσταση αφορά αλληλεξάρτηση μεταξύ δύο δομικών μονάδων –



μοτίβων και άρα εννοιολογικά αποτελεί συνέχεια της κατασκευής στο πλαίσιο της αφαιρετικής διαδικασίας.

## ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ

Στην παρούσα έρευνα, η δυνατότητα πρόσβασης στη δομή των μοτίβων μέσω των προσφερόμενων συμβολικών και εικονικών αναπαραστάσεων του eXpresser φάνηκε να ευνόησε την εννοιολογική εμπλοκή των μαθητριών σε αφαιρετικές διαδικασίες αναγνώρισης, συγκερασμού, κατασκευής και παγιοποίησης αναφορικά με τη νοηματοδότηση της γενίκευσης. Οι διαδικασίες αυτές περιελάμβαναν την σταδιακή εξοικείωση των μαθητριών με τη χρήση των εικονικών μεταβλητών στην έκφραση σχέσεων αλληλεξάρτησης στο ίδιο μοτίβο αλλά και μεταξύ διαφορετικών μοτίβων. Οι συγκεκριμένες διαδικασίες ενισχύθηκαν από την ανατροφοδότηση του περιβάλλοντος σχετικά με την ορθή εμφάνιση ενός μοτίβου κατά την αναπαραγωγή του για τυχαίες τιμές (δηλ. μέσω της απουσίας χρωματισμού). Η ανατροφοδότηση του περιβάλλοντος και η δυνατότητα αναπαραγωγής του μοτίβου για τυχαίες τιμές επαναλήψεων προσέφερε ένα μηχανισμό που διευκόλυνε τις μαθήτριες στο να αναγνωρίσουν την ανάγκη για γενίκευση και να καθορίσουν το ρόλο της ανεξάρτητης (εικονικής) μεταβλητής στις αντίστοιχες αλγεβρικές σχέσεις. Με τη συμπληρωματική χρήση της θεωρίας δόμησης της γνώσης μέσω κατασκευών και της θεωρίας της αφαίρεσης εντός πλαισίου, η νοηματοδότηση της γενίκευσης εμφανίστηκε ως μια δυναμική διαδικασία κατασκευής νοημάτων που οριοθετήθηκε από τα χαρακτηριστικά των διαθέσιμων εργαλείων και την δυνατότητα των μαθητών να αλληλεπιδρούν με τις προσφερόμενες αναπαραστάσεις.

## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Cobb, P., Confrey, J., DiSessa, A., Lehrer, R. & Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational Researcher*, v.32, 9-13.
- Harel, I., & Papert, S. (1991). *Constructionism: Research reports and essays*. Norwood, US: Ablex Publishing Corporation.
- Hershkowitz, R., Schwarz, B. & Dreyfus, T. (2001). Abstraction in context: Epistemic actions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 32(2), 195-222.
- Morelli, L. (1992). A visual approach to algebra concepts. *Mathematics Teacher*, vol. 85, September, 434-437.
- Noss, R., Hoyles, C., Mavrikis, M., Geraniou, E., Gutierrez-Santos, S. & Pearce, D. (2009). Broadening the sense of 'dynamic': a microworld to support students' generalization. *ZDM*, 41, pp. 493-503.
- Radford, L. (2003). Gestures, speech and the sprouting of signs: A semiotic-cultural approach to students' types of generalization. *Mathematical Thinking and Learning*, 5(1), 37-70.

- Rivera, F. & Becker, J. R. (2008). Middle school children's cognitive perceptions of constructive and deconstructive generalizations involving linear figural patterns. *ZDM*, 40(1), 65-82.
- Sutherland, R., & Mason, J. (2005). *Key aspects of teaching algebra in schools*. London: QCA.
- Zazkis, R. & Liljedahl, P. (2002). Generalization of patterns: The tension between algebraic thinking and algebraic notation. *Educational Studies in Mathematics*, 49: 379-402.