ΠΡΑΚΤΙΚΑ
6ου ΣΥΝΕΔΡΙΟΥ ΕΝΩΣΗΣ ΕΡΕΥΝΗΤΩΝ ΤΗΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ (ΕΝ.Ε.ΔΙ.Μ.)

Μαθηματικά ΜΕ διάκριση και ΧΩΡΙΣ διακρίσεις

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ
4,5,6
2015

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ
ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΠΡΟΣΧΟΛΙΚΗΣ
ΑΓΩΓΗΣ ΚΑΙ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗ ΣΧΟΛΗ

Επιμέλεια
Δ. Δεσλή, Ι. Παπαδόπουλος, Μ. Τζεκάκη

ΕΝ.Ε.ΔΙ.Μ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΠΡΟΣΧΟΛΙΚΗΣ ΑΓΩΓΗΣ
ΚΑΙ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΠΡΑΚΤΙΚΑ
6ΟΥ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΥ ΣΥΝΕΔΡΙΟΥ ΜΕ ΔΙΕΘΝΗ ΣΥΜΜΕΤΟΧΗ της ΕΝΩΣΗΣ ΕΡΕΥΝΗΤΩΝ της ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ των ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Μαθηματικά ΜΕ διάκριση και ΧΩΡΙΣ διακρίσεις

Επιμέλεια: Δ. Δεσλή, Ι. Παπαδόπουλος, Μ. Τζεκάκη

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ
4-6 Δεκεμβρίου 2015

ΝΟΗΜΑΤΟΔΟΤΗΣΗ ΤΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΕΥΣΗΣ ΩΣ ΑΛΓΕΒΡΙΚΗΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ

Αγγελική Ζούπα **Γιώργος Ψυχάρης**
Μαθηματικό Τμήμα ΕΚΠΑ
mekkapsaki@math.uoa.gr gpsych@math.uoa.gr

Στο παρόν άρθρο παρουσιάζεται μια μικρής έκτασης έρευνα που εστιάζεται στη διερεύνηση της κατασκευής νοημάτων για τη μαθηματική γενίκευση από μαθητές Α' γυμνασίου κατά την εμπλοκή τους σε διερευνητικές δραστηριότητες που βασίζονται στη χρήση κατάλληλα σχεδιασμένων χειραπτικών και ψηφιακών εργαλείων. Στα αποτελέσματα καταγράφεται η πορεία νοηματοδότησης και έκφρασης σχέσεων γενίκευσης από τους μαθητές ως αλγεβρική δραστηριότητα (με ή χωρίς τη χρήση συμβόλων) όπως διαμεσολαβείται από τη χρήση των διαθέσιμων εργαλείων.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

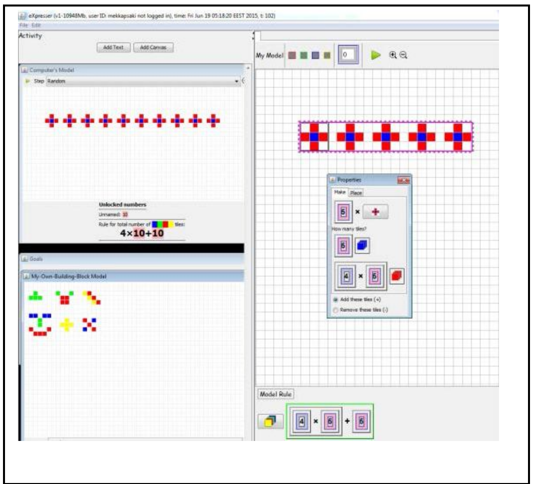
Στην παρούσα έρευνα παρουσιάζουμε αποτελέσματα μιας μικρής έκτασης πιλοτικής έρευνας που στόχευε στη διερεύνηση της νοηματοδότησης της μαθηματικής γενίκευσης από μαθητές της Α' γυμνασίου κατά την εμπλοκή τους σε διερευνητικές δραστηριότητες που σχετίζονται με αυθεντικούς χώρους εργασίας. Οι μαθητές συνεργάστηκαν σε ομάδες των πέντε ατόμων χρησιμοποιώντας χειραπτικά μέσα και το διερευνητικό λογισμικό eXpresser (Noss et al., 2009) το οποίο παρέχει τη δυνατότητα κατασκευής μοτίβων με τετραγωνάκια διαφορετικών χρωμάτων. Το eXpresser επιτρέπει στους μαθητές να χρησιμοποιήσουν εικονικές μεταβλητές για να αναπαράγουν τις κατασκευές τους για διαφορετικό αριθμό επαναλήψεων, να εκφράζουν σχέσεις γενίκευσης και να ελέγχουν την ορθότητά τους μέσα από κατάλληλη ανατροφοδότηση.

Η αλγεβρική γενίκευση ενός μοτίβου περιλαμβάνει τρία στάδια: την αναγνώριση μιας ομοιότητας, τη γενίκευσή της για όλους τους επακόλουθους όρους και την έκφραση του αντίστοιχου αλγεβρικού τύπου (Radford, 2010). Στην προσπάθειά του να μελετήσει τη συγκρότηση σχέσεων γενίκευσης από τους μαθητές ως αλγεβρική δραστηριότητα, ο Radford (2014) υπέδειξε τρία χαρακτηριστικά της αλγεβρικής σκέψης: (1) την ύπαρξη αγνώστων ποσοτήτων (π.χ. μεταβλητών, παραμέτρων), (2) την ανάγκη να ονομαστούν και να συμβολιστούν αυτές οι ποσότητες με διαφορετικούς τρόπους (όχι αποκλειστικά με τη χρήση του αλγεβρικού συμβολισμού, αλλά και με αλφαριθμητικά σύμβολα, φυσική γλώσσα, κινήσεις ή συνδυασμό τους), (3) τον χειρισμό (π.χ. με πράξεις όπως πρόσθεση, πολλαπλασιασμός) των απροσδιόριστων ποσοτήτων σαν να είναι γνωστές. Για παράδειγμα, στην εύρεση της τιμής ενός αγνώστου σε μια εξίσωση, αλγεβρική στρατηγική συνιστά ο αναλυτικός τρόπος υπολογισμού της μέσω πράξεων με μεταβλητές και όχι μέθοδοι δοκιμής-λάθους.

Η πορεία της σκέψης των μαθητών προκειμένου να διακρίνουν και να εκφράσουν μια σχέση γενίκευσης δεν χαρακτηρίζεται μόνο από τη χρήση αλγεβρικών συμβόλων, αλλά μάλλον από έναν ιδιαίτερο τρόπο αντιμετώπισης του γενικού. Ο Radford (2010) ανέπτυξε τη θεωρία της αντικειμενικοποίησης προκειμένου να περιγράψει τη σημειωτική διαδικασία μετάβασης των μαθητών από τη διάκριση μιας ομοιότητας στην έκφρασή της ως σχέση γενίκευσης με περισσότερο μαθηματικοποιημένους τρόπους μέσα από τη χρήση σημείων (χειρονομιών, λέξεων, συμβόλων). Στη συγκεκριμένη θεωρία, διακρίνονται τρία επίπεδα γενίκευσης των μαθητών που χαρακτηρίζονται από αντίστοιχους σημειωτικούς τρόπους αντικειμενικοποίησης (Radford, 2010). Στο πρώτο επίπεδο οι μαθητές πραγματοποιούν πραγματολογικές γενικεύσεις (factual generalizations) που βασίζονται στην εύρεση του συνολικού αριθμού των στοιχείων ενός μοτίβου για συγκεκριμένο κάθε φορά αριθμό επαναλήψεων συνήθως μέσω λεκτικών περιγραφών και χειρονομιών. Στο δεύτερο επίπεδο της γενίκευσης σε πλαίσιο (contextual generalization), τα γενικευμένα αντικείμενα ονομάζονται αλλά δεν συμβολίζονται και παίρνουν μορφή μέσα από δεικτικές εκφράσεις που περιγράφουν τη θέση τους στο χώρο, όπως π.χ. ‘το επόμενο σχήμα’ (δηλ. ο επόμενος όρος ενός μοτίβου), ‘στην από πάνω γραμμή’. Στο τρίτο επίπεδο της συμβολικής γενίκευσης (symbolic generalization), οι γενικεύσεις εκφράζονται μέσω της χρήσης του αλφαριθμητικού σημειωτικού συστήματος της άλγεβρας. Επιχειρώντας να κατηγοριοποιήσει τα νοήματα που κρύβονται πίσω από τους σημειωτικούς τρόπους αντικειμενικοποίησης στο επίπεδο της συμβολικής γενίκευσης, ο Radford (2000) διέκρινε τρεις κύριες στρατηγικές που ακολουθούν οι μαθητές για να προσφέρουν μια συμβολική αναπαράσταση ενός μοτίβου. Στην πρώτη στρατηγική (Σ1), οι μαθητές ακολουθούν ένα είδος (ευρετικής) μεθόδου δοκιμή-λάθος, η επιτυχία της οποίας εξαρτάται από την πολυπλοκότητα του μοτίβου. Στην δεύτερη στρατηγική (Σ2), οι μαθητές χρησιμοποιούν γενικές εκφράσεις που βασίζονται σε αριθμητικές σχέσεις μεταξύ κάποιων όρων του μοτίβου. Στην τρίτη στρατηγική (Σ3), οι μαθητές βασίζονται στη γεωμετρική μορφή των σχημάτων του μοτίβου.

Στην παρούσα έρευνα χρησιμοποιήσαμε το λογισμικό eXpresser και χειραπτικά υλικά προκειμένου να εμπλέξουμε τους μαθητές στην κατασκευή και τον έλεγχο μοτίβων καθώς διερευνούν προβλήματα που επιχειρούν να συνδέσουν τη μάθηση των μαθηματικών με χώρους εργασίας. Στην έρευνα λάβαμε υπόψη το πρόσφατο ερευνητικό ενδιαφέρον για την αξιοποίηση των χώρων εργασίας ως πλαισίων που μπορούν να αποτελέσουν πεδία νοηματοδότησης των μαθηματικών στην σχολική τάξη (Wake, 2014). Επιδιώκοντας την εστίαση των μαθητών στη δομή και την έκφραση της γενίκευσης, μελετήσαμε την προοδευτική διαδικασία διάκρισης του γενικού μέσω του ειδικού και την πορεία νοηματοδότησης και έκφρασης σχέσεων γενίκευσης από τους μαθητές ως μια διαδικασία αντικειμενικοποίησης. Στην εστίασή μας ήταν επίσης το αν και πώς η διαδικασία αυτή αποκαλύπτει αλγεβρικούς τρόπους σκέψης (με ή χωρίς τη χρήση συμβόλων) όπως και πώς διαμεσολαβείται από τη χρήση των διαθέσιμων εργαλείων.

ΤΟ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΟ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝ



Σχ. 1 Μοτίβο στο eXpresser με μια δομική μονάδα με 4 κόκκινα τετράγωνα και 1 μπλε

Το eXpresser αποτελείται από δύο κύριες περιοχές: (α) μια περιοχή εργασίας (My Model, Σχ. 1 δεξιά στην οθόνη) και (β) μια περιοχή προβολής (Computer’s Model, Σχ. 1 αριστερά στην οθόνη). Στην περιοχή My Model οι μαθητές μπορούν να κατασκευάσουν επαναλαμβανόμενα μοτίβα μέσα από την επανάληψη μιας σύνθεσης από τετράγωνα διαφορετικών χρωμάτων που ονομάζεται δομική μονάδα (building block) (Σχ. 1). Οι ποσότητες στο eXpresser μπορεί να είναι σταθεροί αριθμοί, που εμφανίζονται μέσα σε γκρι ορθογώνιο πλαίσιο, ή εικονικές μεταβλητές, η τρέχουσα τιμή των οποίων εμφανίζεται σε ροζ ορθογώνιο πλαίσιο. Οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα να μετατρέψουν ένα σταθερό αριθμό (γκρι πλαίσιο) σε εικονική μεταβλητή (ροζ πλαίσιο) ‘ξεκλειδώνοντάς’ τον με την εντολή Ξεκλείδωμα. Με το πάτημα του κουμπιού Play το πρόγραμμα αποδίδει τυχαίες τιμές στις εικονικές μεταβλητές που έχει ορίσει ο χρήστης. Σε αυτή την περίπτωση το μοτίβο εμφανίζεται χρωματισμένο στο My Model μόνο όταν οι μαθητές συμπληρώσουν σωστά τα ειδικά εικονίδια με ‘?’ στις ιδιότητες του μοτίβου (Σχ. 6α). Σε αντίθετη περίπτωση και ως ένδειξη της ύπαρξης λάθους, το μοτίβο εμφανίζεται χωρίς χρώμα. Τέλος, για να χρωματιστεί το μοτίβο και στο Computer’s Model, θα πρέπει οι μαθητές να κατασκευάσουν μια ‘αλγεβρική’ έκφραση που αντιστοιχεί στον συνολικό αριθμό των τετραγώνων του μοτίβου στο πλαίσιο Model Rule (Σχ. 1 κάτω δεξιά)’. Έτσι, η γενίκευση στο eXpresser εμφανίζεται μέσω της ανάγκης αναγνώρισης της δομικής μονάδας ενός μοτίβου και εκφράζεται με τη χρήση μιας εικονικής μεταβλητής, η οποία αντιστοιχεί στον αριθμό επαναλήψεων της δομικής μονάδας.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ

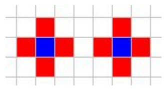
Οι δραστηριότητες διαρθρώθηκαν σε δύο φάσεις. Στην πρώτη φάση, οι μαθητές ανέλαβαν το ρόλο ενός υπαλλήλου εταιρείας η οποία θα οργάνωνε την διάταξη των τραπεζιών για ένα πάρτι γενεθλίων με 38 καλεσμένους. Στη φάση αυτή έγινε η προσομοίωση του προβλήματος μέσω χειραπτικού υλικού. Δόθηκαν στους μαθητές 6 μεγάλα χαρτόνια με την κάτοψη του μαγαζιού (Σχ. 5) που θα φιλοξενούσε την εκδήλωση, μαζί με 16 ειδικά σχεδιασμένα τραπέζια από χαρτόνι (ο δομικός πυρήνας του μοτίβου) (Σχ. 4) τα οποία οι μαθητές θα έπρεπε να τοποθετήσουν στην κάτοψη ώστε να βρουν τη βέλτιστη διάταξη. Ο αριθμός 38 των καλεσμένων επιλέχτηκε ως έναυσμα για να πειραματιστούν οι μαθητές με διαφορετικές διατάξεις τραπεζιών (π.χ. ενώνοντας τραπέζια). Στη δεύτερη φάση, ζητήθηκε από τους μαθητές να επιλύσουν το ίδιο πρόβλημα για 132 καλεσμένους. Σημειώνουμε ότι το πρόβλημα δεν μπορούσε να διερευνηθεί με το χειραπτικό υλικό καθώς ο αριθμός των διαθέσιμων (χαρτονένιων) τραπεζιών δεν επαρκούσε. Αυτό αναμέναμε να οδηγήσει με φυσικό τρόπο στην αναγκαιότητα της χρήσης του eXpresser ώστε να μελετηθεί το πρόβλημα για οποιονδήποτε αριθμό τραπεζιών. Στη συνέχεια έγινε από την ερευνήτρια μια σύντομη περιγραφή του eXpresser μέσα από την παρουσίαση κατασκευής ενός απλού μοτίβου όπου αναπαράγεται ένα μπλε τετραγωνάκι για οποιονδήποτε αριθμό επαναλήψεων. Οι μαθητές κλήθηκαν να κατασκευάσουν ένα μοτίβο που αναπαριστούσε το τραπέζι που συνάντησαν στο χειραπτικό υλικό και αποτελούνταν από 1 μπλε τετράγωνο για το τραπέζι και 4 κόκκινα τετράγωνα για τις καρέκλες γύρω από το μπλε (Σχ. 2α). Τέλος λόγω έλλειψης χρόνου δόθηκε στους μαθητές ένα ήδη κατασκευασμένο μοτίβο με ενωμένα τραπέζια και τους ζητήθηκε να παρατηρήσουν την εκτέλεσή του και να κατασκευάσουν στο expresser την ‘αλγεβρική’ έκφραση που αντιστοιχεί στον συνολικό αριθμό των τετραγώνων του μοτίβου. Ο γενικός στόχος μας ήταν μέσα από την ενασχόληση με τα μοτίβα οι μαθητές να οδηγηθούν στη λύση του αρχικού προβλήματος διερευνώντας τη σχέση των διατάξεων των τραπεζιών με τον αριθμό των ατόμων που μπορούν να καθίσουν κάθε φορά. Σημειώνουμε ότι παράλληλα δόθηκαν στους μαθητές φύλλα εργασίας με ερωτήματα που θα μας επέτρεπαν να μελετήσουμε τη μετάβαση σε διαφορετικά επίπεδα γενίκευσης. Παραδείγματα ερωτήσεων: *Πόσα τετράγωνα θα έχει το μοτίβο στο νούμερο 5; (αντίστοιχα για τα νούμερα 10, 25, 100)* (Πραγματολογική γενίκευση). *Περιγράψτε με απλά λόγια τη διαδικασία που εκτελεί το μοτίβο κάθε φορά* (Γενίκευση σε πλαίσιο). *Περιγράψτε πόσα κόκκινα εικονίδια εμφανίζονται κάθε φορά για οποιονδήποτε αριθμό τραπεζιών* (Συμβολική γενίκευση).

ΜΕΘΟΔΟΣ

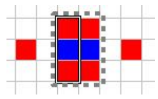
Στην έρευνα συμμετείχαν συνολικά 50 μαθητές (δύο τμήματα) της Α' Γυμνασίου (50 μαθητές) στο 2ο πειραματικό γυμνάσιο Αθηνών. Οι μαθητές εργάστηκαν στην τάξη τους σε ομάδες των πέντε για 2 διδακτικές ώρες (50λ η καθεμιά) με διδάσκοντα τον καθηγητή μαθηματικών και την ερευνήτρια σε ρόλο συμμετοχικού παρατηρητή. Κατά την πρώτη ώρα οι μαθητές εργάστηκαν με το χειραπτικό υλικό και κατά την δεύτερη με το υπολογιστικό περιβάλλον eXpresser με χρήση φορητών υπολογιστών. Η ακολουθούμενη μέθοδος αντιστοιχεί σε έρευνα σχεδιασμού (Cobb et al., 2003). Η συλλογή δεδομένων έγινε με τη βοήθεια ψηφιακού μαγνητόφωνου και κάμερας. Για την ανάλυση των δεδομένων απομαγνητοφωνήθηκαν κομμάτια διαλόγων των μαθητών. Μονάδα ανάλυσης αποτέλεσε το θεματικό επεισόδιο, το οποίο ορίστηκε ως ένα απόσπασμα διαλόγων και πράξεων των μαθητών γύρο από ένα συγκεκριμένο θέμα. Τα επεισόδια επιλέχτηκαν έτσι ώστε να αναδεικνύονται οι διαδικασίες των τύπων γενίκευσης που χρησιμοποίησαν οι μαθητές και οι στρατηγικές που ανέπτυξαν καθώς και πώς το λογισμικό επηρέασε την εξέλιξη της δραστηριότητάς τους. Στο παρόν άρθρο αναλύουμε επεισόδια από την εργασία μιας ομάδας 5 μαθητών.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

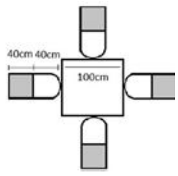
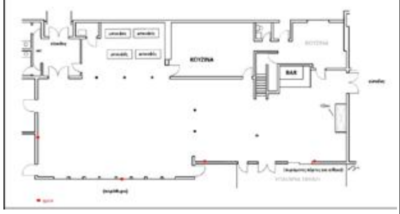
Το επεισόδιο αυτό έλαβε χώρα κατά τη δεύτερη φάση των δραστηριοτήτων όταν οι μαθητές κλήθηκαν να φτιάξουν το δικό τους μοτίβο τραπεζιών αποτελούμενο από 4 κόκκινα τετράγωνα και 1 μπλε (Σχ. 2α). Πριν από αυτό οι μαθητές έλυσαν το πρόβλημα με τους 38 καλεσμένους μέσω του χειραπτικού υλικού (Σχ. 3, 4, 5). Πήραν δηλαδή τα χαρτονένια τραπέζια (Σχ. 4) και είτε τα τοποθέτησαν το ένα δίπλα στο άλλο είτε τα δίπλωσαν έτσι ώστε να χωρέσουν στον κενό χώρο της κάτοψης (Σχ. 5). Όταν όμως το πρόβλημα αναφερόταν σε 132 καλεσμένους και το χειραπτικό υλικό δεν επαρκούσε για τη συνέχιση του πειραματισμού, εμφανίστηκε η ανάγκη χρήσης του λογισμικού για την αναπαραγωγή διαφορετικού αριθμού τραπεζιών. Οι μαθητές κλήθηκαν να κατασκευάσουν το μοτίβο τραπεζιών που φαίνεται στο Σχ. 2α. Αρχικά, οι μαθητές αναγνώρισαν ότι αποτελείται από μία δομική μονάδα με 4 κόκκινα τετράγωνα και 1 μπλε. Αφού επέλεξαν τα 5 συγκεκριμένα τετράγωνα, έδωσαν το 5 ως αρχική τιμή επαναλήψεων και στο My model εμφανίστηκε το μοτίβο του Σχ. 2α για 5 επαναλήψεις.



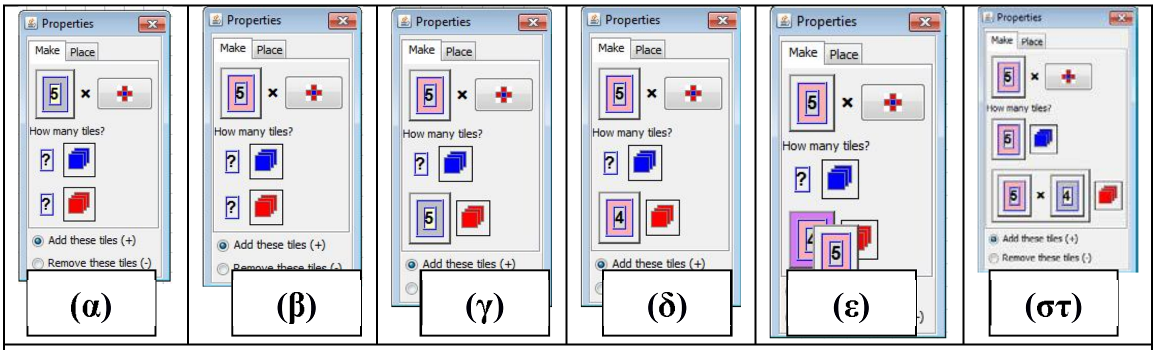
Σχ. 2α Μοτίβο τραπεζιών



Σχ. 2β Μοτίβο ενωμένων τραπεζιών

		
Σχ. 3 Στιγμιότυπο ομάδας	**Σχ. 4** Τραπέζι από χαρτόνι	**Σχ. 5** Κάτοψη μαγαζιού

Με το πάτημα του κουμπιού Play, το μοτίβο παρέμεινε ακίνητο καθώς δεν είχε χρησιμοποιηθεί εικονική μεταβλητή. Οι μαθητές ξεκλείδωσαν τον αριθμό των επαναλήψεων δημιουργώντας έτσι μια (ροζ) εικονική μεταβλητή (Σχ. 6β). Για τον σωστό χρωματισμό του μοτίβου, έπρεπε στη συνέχεια να εκφραστούν με την συγκεκριμένη μεταβλητή ο αριθμός των κόκκινων και μπλε τετραγώνων στις Ιδιότητες Μοτίβου (Σχ. 6β). Πιο συγκεκριμένα, στη θέση των μπλε έπρεπε να τοποθετηθεί (με σύρσιμο και αντικατάσταση) η ίδια εικονική μεταβλητή, ενώ στη θέση των κόκκινων η εικονική μεταβλητή επί τον αριθμό 4.

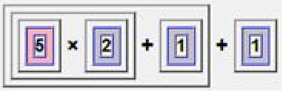


Σχ. 6 Ιδιότητες Μοτίβου για την κατασκευή και κίνηση του μοτίβου του Σχ. 1.

Αρχικά οι μαθητές έδωσαν την σταθερή τιμή 5 για τα μπλε τετραγωνάκια (Σχ. 6γ). Πατώντας Play για την αναπαραγωγή του μοτίβου οι μαθητές διαπίστωσαν ότι το μοτίβο δεν χρωματίζεται σωστά καθώς άλλαζε συνεχώς τιμές η εικονική μεταβλητή ενώ ο αριθμός των μπλε τετραγώνων παρέμενε σταθερός. Μία μαθήτρια αμέσως αναγνώρισε ότι χρειάζεται να χρησιμοποιήσουν την ίδια εικονική μεταβλητή και για τον αριθμό των μπλε τετραγώνων (Σχ. 6ε). Στη συνέχεια οι μαθητές ακολούθησαν την ίδια διαδικασία και για την έκφραση του αριθμού των κόκκινων τετραγώνων (Σχ. 6στ). Έτσι, μέσα από τη διερεύνηση του ρόλου των σταθερών αριθμών και των (εικονικών) μεταβλητών για τη σωστή αναπαραγωγή του μοτίβου, οι μαθητές άρχισαν να εκφράζουν σχέσεις γενίκευσης μέσω της 'άλγεβρας' του eXpresser αποδεχόμενοι τον προσφερόμενο συμβολισμό των μεταβλητών ποσοτήτων (ροζ εικονίδιο) και την δυνατότητα χρήσης του σε πράξεις.

Αφού τελείωσαν με την κατασκευή του μοτίβου οι μαθητές κλήθηκαν να απαντήσουν στα ερωτήματα του φύλλου εργασίας. Το πρώτο ερώτημα ήταν: Τι μένει σταθερό και τι αλλάζει στο μοτίβο των τραπεζιών κατά την αναπαραγωγή; Οι μαθητές απάντησαν: «Σταθερά μένουν τα χρώματα και το σχήμα των τραπεζιών. Αλλάζει ο αριθμός των τραπεζιών ανάλογα με τη μεταβλητή». Στη συνέχεια οι μαθητές κλήθηκαν να απαντήσουν σε ερωτήσεις οι οποίες ζητούσαν τον αριθμό των κόκκινων τετραγώνων για συγκεκριμένο αριθμό επαναλήψεων (5, 10, 25, 100). Οι μαθητές αντίστοιχα απάντησαν: 20 (5*4), 40 (10*4), 100 (25*4), 400 (100*4). Σε αυτό το σημείο έχει ενδιαφέρον το ότι οι μαθητές απάντησαν χρησιμοποιώντας παρένθεση το οποίο, στο σημειωτικό επίπεδο, αποκαλύπτει τον γενικευμένο τρόπο με τον οποίο είχαν εκφράσει τον αριθμό των κόκκινων τετραγώνων στο λογισμικό (πολλαπλασιασμός της εικονικής μεταβλητής με 4). Η γενίκευση των μαθητών εδώ έχει όνομα όχι αλγεβρικό αλλά αριθμητικό και ανήκει στο επίπεδο της πραγματολογικής γενίκευσης του Radford. Ακόμη, ζητήθηκε από τους μαθητές να περιγράψουν με απλά λόγια τη διαδικασία που εκτελεί το μοτίβο κάθε φορά και απάντησαν ότι «το σχήμα πολλαπλασιάζεται σύμφωνα με τη μεταβλητή» (Γενίκευση σε πλαίσιο). Τέλος, περιέγραψαν με λόγια πόσα κόκκινα εικονίδια εμφανίζονται κάθε φορά για οποιοδήποτε αριθμό τραπεζιών χωρίς τη χρήση αλγεβρικού συμβολισμού: «Εμφανίζονται τετραπλάσια κόκκινα εικονίδια από τον αριθμό των τραπεζιών» (Γενίκευση σε πλαίσιο που αποκαλύπτει την μετακίνηση προς τις συμβολικές γενικεύσεις).

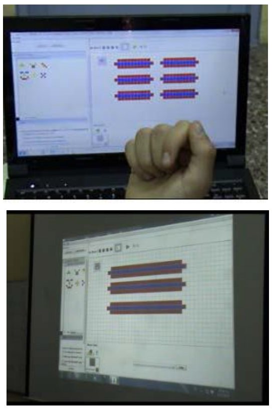
Στη συνέχεια οι μαθητές προχώρησαν στην λεπτομερή μελέτη και παρατήρηση ενός έτοιμου μοτίβου που απεικόνιζε ενωμένα τραπέζια χρησιμοποιώντας τα διαθέσιμα εργαλεία του λογισμικού. Συγκεκριμένα, οι μαθητές άνοιξαν τις ιδιότητες του μοτίβου και παρατήρησαν τις εικονικές μεταβλητές και τις σχέσεις τους για να αποκρυπτογραφήσουν πώς δουλεύει το μοτίβο. Ακολούθως, και ενώ το μοτίβο αναπαραγόταν σωστά και εμφανιζόταν χρωματισμένο στο My Model, οι μαθητές θέλησαν να το χρωματίσουν και στο Computer's Model, έτσι όπως έγινε και στην παρουσίαση του λογισμικού. Γι' αυτό κατασκεύασαν μια 'αλγεβρική' έκφραση (Σχ. 7) που αντιστοιχεί στον συνολικό αριθμό των τετραγώνων του μοτίβου στο ειδικό πλαίσιο Model Rule σέρνοντας από τις ιδιότητες Μοτίβου τις εικονικές εκφράσεις που αντιστοιχούσαν στον αριθμό των τετραγώνων ανά χρώμα και επιλέγοντας από το μενού 'πρόσθεση'.



Σχ. 7 Αλγεβρική έκφραση μοτίβου με εικονικές μεταβλητές

Εδώ, βλέπουμε ότι οι μαθητές επεκτείνουν την προηγούμενη εμπειρία τους με τα εργαλεία του eXpresser και αξιοποιούν τη δομή του για το χτίσιμο περισσότερο σύνθετων εκφράσεων με αλγεβρικό τρόπο. Χρησιμοποιούν τον αριθμό των κόκκινων τετραγώνων (πάνω και κάτω από τα μπλε) ως μια δομική μονάδα και τον ‘χειρίζονται’ (τον ‘σέρνουν’) για να εκφράσουν τον συνολικό αριθμό των κόκκινων τετραγώνων.

Ακολούθως, καταγράφουμε μερικές απαντήσεις από το φύλλο εργασίας που ακολούθησε, ώστε να δούμε αν και πώς η εμπειρία αναγνώρισης και έκφρασης σχέσεων γενίκευσης στο eXpresser επηρέασε τις μετέπειτα γενικεύσεις των μαθητών. Στην ερώτηση πόσα κόκκινα τετράγωνα θα έχει το μοτίβο στο νούμερο 100 οι μαθητές απάντησαν: (100*2)+2 = 200+2 = 202. Στην ερώτηση που ζητούσε να περιγράψουν πόσα κόκκινα εικονίδια εμφανίζονται κάθε φορά για οποιοδήποτε αριθμό τραπεζιών απάντησαν: (x*2)+2, όπου x το πλήθος των τραπεζιών. Τέλος, στην ερώτηση για το αν χωράνε όλα τα τραπέζια που χρειαζόμαστε στην οθόνη του λογισμικού αν τα διατάξουμε με το προηγούμενο μοτίβο και τι μπορούμε να κάνουμε για να καθίσουν όλοι οι καλεσμένοι οι μαθητές βρήκαν δύο λύσεις: Με 6 σειρές των 10 τραπεζιών (22 άτομα στο καθένα) και με 3 σειρές των 21 τραπεζιών (21*2+2 =44, 44*3 =132) (Σχ. 8).



Σχ. 8 Πειραματισμός μαθητών

Από τις παραπάνω απαντήσεις φαίνεται ότι οι μαθητές είναι σε θέση να εκφράζουν συμβολικές γενικεύσεις με χρήση αλγεβρικού συμβολισμού έχοντας παράλληλα τη δυνατότητα να διακρίνουν τις αριθμητικές σχέσεις μεταξύ των όρων του μοτίβου, αλλά και να επικεντρώνονται στη δομή του μοτίβου λαμβάνουν υπόψη το είδος των γεωμετρικών σχημάτων που το αποτελούν (στρατηγική Σ3 κατά Radford). Αυτό γίνεται αντιληπτό από το πώς οι μαθητές χρησιμοποιούν σημεία, όπως τις παρενθέσεις, για να εκφράσουν τον συνολικό αριθμό των εικονιδίων: με τις παρενθέσεις απομονώνουν τις δύο καρέκλες που αναπαράγονται απέναντι η μία από την άλλη και με το +2 σηματοδοτούν τις καρέκλες στην κεφαλή (αριστερά και δεξιά) που μένουν σταθερές.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στην παρούσα έρευνα, η δυνατότητα πρόσβασης στη δομή των μοτίβων μέσω των προσφερόμενων συμβολικών και εικονικών αναπαραστάσεων του eXpresser φάνηκε να ευνόησε την προοδευτική διαδικασία διάκρισης του γενικού μέσω του ειδικού και την πορεία νοηματοδότησης και έκφρασης σχέσεων γενίκευσης από τους μαθητές ως μια διαδικασία αντικειμενικοποίησης. Πιο συγκεκριμένα, οι μαθητές έφτασαν με επιτυχία σε όλα τα αντίστοιχα επίπεδα γενίκευσης. Οι μεταβάσεις στο πραγματολογικό επίπεδο και το επίπεδο πλαισίου ευνοήθηκαν από τον πειραματισμό των μαθητών με το χειραπτικό υλικό και την προσπάθεια να εντοπίσουν αριθμητικές σχέσεις μεταξύ των διατάξεων των τραπεζιών και των ατόμων που μπορούν να καθίσουν σε αυτά. Η εμπειρία αυτή εμπλουτίστηκε ακολούθως από την ‘μεταφορά’ των διατάξεων/μοτίβων αυτών στο eXpresser και την δυνατότητα των μαθητών να μελετήσουν τη δομή και τις σχέσεις που διέπουν την δυναμική αναπαραγωγή τους για διαφορετικές τιμές. Η εμπλοκή των μαθητών με την έκφραση σχέσεων γενίκευσης στο λογισμικό φάνηκε να ευνόησε τη μετάβασή τους στο επίπεδο της συμβολικής γενίκευσης. Μάλιστα, οι αλγεβρικές εκφράσεις που έγραψαν στο φύλλο εργασίας οι μαθητές είχαν άμεση αντιστοίχιση με τις εικονικές ‘αλγεβρικές’ εκφράσεις που είχαν νωρίτερα συγκροτήσει στο λογισμικό. Η εμπειρία της απόδοσης τυχαίων τιμών στην εικονική μεταβλητή και η δυναμική αναπαραγωγή του μοντέλου για τις αντίστοιχες τιμές φάνηκε να ενίσχυσε την αντιστοίχιση της εικονικής μεταβλητής (αριθμός μπλε τετραγώνων) με το γράμμα x που έκαναν ακολούθως οι μαθητές με χαρτί-μολύβι στο φύλλο εργασίας.

Αναφορικά με τα αλγεβρικά χαρακτηριστικά της σκέψης των μαθητών, είδαμε ότι οι μαθητές αναγνώρισαν άγνωστες ποσότητες (π.χ. αριθμός ατόμων γύρω από τραπέζι), ονόμασαν τις ποσότητες αυτές, αναγνώρισαν μεταξύ τους συναρτησιακές συσχετίσεις τις οποίες και εξέφρασαν τόσο στο eXpresser όσο και στο περιβάλλον χαρτί-μολύβι και, τέλος, τις χρησιμοποίησαν για τη λύση του προβλήματος που τέθηκε προς διερεύνηση. Προκειμένου να συνδέσουμε τα ευρήματα αυτά με την υπάρχουσα έρευνα, σημειώνουμε ότι η εμπλοκή των μαθητών με την κατασκευή μοτίβου στο eXpresser φάνηκε να ευνόησε την αποκλειστική ανάπτυξη της τρίτης στρατηγικής κατά Radford (Σ3) στο επίπεδο της συμβολικής γενίκευσης. Αυτό είναι ένα εύρημα που απουσιάζει από προηγούμενες σχετικές έρευνες (π.χ. Radford, 2010; Rivera & Becker, 2008), στις οποίες καταγράφηκαν και οι τρεις στρατηγικές συμβολικής γενίκευσης (Σ1, Σ2, Σ3). Το δεδομένο ότι στις έρευνες αυτές οι μαθητές εργάζονταν αποκλειστικά με στατικές εικόνες στο περιβάλλον χαρτί-μολύβι, μας επιτρέπει να αποδώσουμε το εύρημα αυτό στο ρόλο του eXpresser. Τέλος, το πλαίσιο του χώρου εργασίας φάνηκε να ευνόησε την εμπλοκή των μαθητών με το πρόβλημα και την διερεύνηση. Το συγκεκριμένο πλαίσιο ήταν παρόν σε όλη τη διάρκεια του πειραματισμού των μαθητών, ενώ οι περιορισμοί στον χώρο και τη διάταξη των τραπεζιών αποτέλεσαν πρόκληση για του μαθητές στην αναζήτηση της βέλτιστης λύσης.

Η περιορισμένη έκταση της δραστηριότητας δεν επιτρέπει τη γενίκευση των συμπερασμάτων. Προσφέρει όμως την αφετηρία για την περαιτέρω διερεύνηση της κατασκευής νοημάτων για τη μαθηματική γενίκευση από μαθητές Α′ γυμνασίου σε μεγαλύτερης έκτασης και διάρκειας έρευνα.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Cobb, P., Confrey, J., DiSessa, A., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational Researcher*, *32*(1), 9-13.

Noss, R., Hoyles, C., Mavrikis, M., Geraniou, E., Gutierrez-Santos, S., & Pearce, D. (2009). Broadening the sense of ‘dynamic’: a microworld to support students’ generalization. *ZDM*, *41*(4), 493-503.

Radford, L. (2000). Students’ processes of symbolizing in algebra. A semiotic analysis of the production of signs in generalizing tasks. In T. Nakahara and M. Koyama (eds.), *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME)*, 4, 81-88. Hiroshima University, Japan.

Radford, L. (2010). Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. *Research in Mathematics Education*, *12*(1), 1-19.

Radford, L. (2014). The progressive development of early embodied algebraic thinking. *Mathematics Education Research Journal*, 26, 257–277.

Rivera, F., & Becker, J. R. (2008). Middle school children’s cognitive perceptions of constructive and deconstructive generalizations involving linear figural patterns. *ZDM*, *40*(1), 65-82.

Wake, G. (2014). Making sense of and with mathematics: the interface between academic mathematics and mathematics in practice. *Educational Studies in Mathematics*, *86*(2), 271-290.