

## ΠΡΑΚΤΙΚΑ

# 6ΟΥ ΣΥΝΕΔΡΙΟΥ ΕΝΩΣΗΣ ΕΡΕΥΝΗΤΩΝ ΤΗΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ (ΕΝ.Ε.ΔΙ.Μ.)

**Μαθηματικά ΜΕ διάκριση και χωρίς διακρίσεις**

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ  
**4, 5, 6**  
2015

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ  
ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ  
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΠΡΟΣΧΟΛΙΚΗΣ  
ΑΓΩΓΗΣ ΚΑΙ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ  
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗ ΣΧΟΛΗ

Επιμέλεια  
Δ. Δεσλή, Ι. Παπαδόπουλος, Μ. Τζεκάκη



**ΕΝ.Ε.ΔΙ.Μ**  
**ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ**  
**ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΠΡΟΣΧΟΛΙΚΗΣ ΑΓΩΓΗΣ**  
**ΚΑΙ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ**

**ΠΡΑΚΤΙΚΑ**  
**6<sup>ΟΥ</sup> ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΥ ΣΥΝΕΔΡΙΟΥ ΜΕ ΔΙΕΘΝΗ**  
**ΣΥΜΜΕΤΟΧΗ της ΕΝΩΣΗΣ ΕΡΕΥΝΗΤΩΝ της**  
**ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ των ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ**

**Μαθηματικά ΜΕ διάκριση και ΧΩΡΙΣ διακρίσεις**

Επιμέλεια: Δ. Δεσλή, Ι. Παπαδόπουλος, Μ. Τζεκάκη

**ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ**  
**4-6 Δεκεμβρίου 2015**



## ΝΟΗΜΑΤΟΔΟΤΗΣΗ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΩΣ ΣΥΜΜΕΤΑΒΟΛΗΣ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΤΟΥ ΛΟΓΙΣΜΙΚΟΥ CASYOPÉE

**Γεώργιος – Ιωνάτιος Καφετζόπουλος, Γιώργος Ψυχάρης**  
Μαθηματικό Τμήμα, ΕΚΠΑ

[gkafetzo@math.uoa.gr](mailto:gkafetzo@math.uoa.gr), [gpsych@math.uoa.gr](mailto:gpsych@math.uoa.gr)

Στόχος του άρθρου είναι η διερεύνηση της νοηματοδότησης της συνάρτησης ως συμμεταβολής από μαθητές Β' Λυκείου κατά την εμπλοκή τους σε δραστηριότητες μοντελοποίησης στο λογισμικό Casyopée. Στα αποτελέσματα καταγράφονται τα επίπεδα νοηματοδότησης της συνάρτησης ως συμμεταβολής που προέκυψαν και ο κρίσιμος ρόλος των διαθέσιμων εργαλείων στην εξέλιξη των νοημάτων που κατασκεύασαν οι μαθητές.

### ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Η παρούσα εργασία εστιάζεται στη διερεύνηση της νοηματοδότησης της συνάρτησης ως συμμεταβολής από μαθητές Β' Λυκείου. Οι μαθητές εργάστηκαν σε ομάδες στο πλαίσιο δραστηριοτήτων μοντελοποίησης με χρήση του υπολογιστικού περιβάλλοντος Casyopée (Lagrange, 2010), το οποίο προσφέρει διασυνδεόμενες αλγεβρικές και γεωμετρικές αναπαραστάσεις της συνάρτησης. Το Casyopée επιτρέπει στους μαθητές να πειραματιστούν με τις μεταβολές και συμμεταβολές μεγεθών σε ένα σύστημα Δυναμικής Γεωμετρίας και να διερευνήσουν αν και ποιες από αυτές ορίζουν συναρτήσεις μέσα από κατάλληλη ανατροφοδότηση. Στην περίπτωση αυτή, ο αλγεβρικός τύπος της συνάρτησης προσφέρεται αυτόματα ως βάση για περαιτέρω μελέτη της συνάρτησης με χρήση πίνακα τιμών και γραφήματος. Έτσι, το λογισμικό παρέχει στους μαθητές τη δυνατότητα να εμπλακούν με τη δημιουργία μίας συνάρτησης και να τη νοηματοδοτήσουν περαιτέρω με χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων. Η προϋπάρχουσα έρευνα γύρω από τη συνάρτηση ως συμμεταβολή έχει εστιαστεί στη μελέτη της κατανόησης των μαθητών κυρίως με στατικά μέσα όπως ερωτηματολόγια (π.χ., Carlson et al., 2002). Στην παρούσα έρευνα, δίνεται έμφαση σε ποιοτικά χαρακτηριστικά της σκέψης των μαθητών που σηματοδοτούν αντίστοιχα επίπεδα νοηματοδότησης της συνάρτησης ως συμμεταβολής.

Η συνάρτηση έχει αποτελέσει αντικείμενο μελέτης σε πλήθος ερευνών, πολλές από τις οποίες εστιάζονται στην πολυπλοκότητα των κατανοήσεων των μαθητών. Η Sfard (1991) υπέδειξε ότι οι μαθητές μεταβαίνουν από τη διαδικαστική κατανόηση (συνάρτηση ως διαδικασία) στη δομική κατανόηση (συνάρτηση ως αντικείμενο) και επεσήμανε ότι η συγκεκριμένη μετάβαση έχει δυναμικό χαρακτήρα και είναι επιθυμητή η ευελιξία μεταξύ των δύο



κατανοήσεων. Παρότι η διάσταση διαδικασία-αντικείμενο βρέθηκε στο επίκεντρο πολλών ερευνών για πολλά χρόνια, από τα μέσα της προηγούμενης δεκαετίας καταγράφεται μία σταδιακή μετακίνηση της εστίασης της έρευνας από τη συνάρτηση ως διαδικασία-αντικείμενο στη συνάρτηση ως συμμεταβολή (π.χ. Thompson, 2011; Lagrange, 2010, 2014; Psycharidis, in press).

Η κατανόηση της συμμεταβολής (Thompson, 1994) αναφέρεται στην παρατήρηση των τρόπων με τους οποίους μεταβάλλονται τις τιμές μίας μεταβλητής ποσότητας μεταβάλλονται οι τιμές μίας άλλης και αναδεικνύεται ως ουσιώδης για την κατανόηση θεμελιωδών εννοιών του Απειροστικού Λογισμού όπως του ρυθμού μεταβολής. Στην προσπάθεια να κατηγοριοποιηθούν τα εννοιολογικά επίπεδα κατανόησης των μαθητών για την έννοια της συμμεταβολής, οι Carlson, Jacobs, Coe, Larsen, και Hsu (2002) μελέτησαν την ικανότητα φοιτητών να αναπτύξουν συλλογισμούς σχετικά με τη συμμεταβολή ποσοτήτων σε δυναμικές καταστάσεις (π.χ. γέμισμα σφαιρικής φιάλης με νερό). Από την έρευνά τους προέκυψε το πλαίσιο των πέντε επιπέδων της συμμεταβολής που περιγράφηκαν με βάση τις αντίστοιχες νοητικές διεργασίες: *Εξάρτηση* (συσχέτιση αλλαγών μίας μεταβλητής με αλλαγές μίας άλλης), *Κατεύθυνση αλλαγής* (συσχέτιση της κατεύθυνσης της αλλαγής μίας μεταβλητής - αύξηση ή μείωση – με αλλαγές μίας άλλης), *Ποιοτική συσχέτιση* (συσχέτιση του ποσού της αλλαγής μίας μεταβλητής με αλλαγές μίας άλλης), *Μέσος ρυθμός* (συσχέτιση του μέσου ρυθμού μεταβολής με ομοιόμορφες αυξήσεις της ανεξάρτητης μεταβλητής) και *Στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής* (συσχέτιση του στιγμιαίου ρυθμού μεταβολής με συνεχείς αυξήσεις της ανεξάρτητης μεταβλητής).

Ένα κρίσιμο σημείο στην ανάπτυξη της σκέψης των μαθητών αναφορικά με τη συνάρτηση ως συμμεταβολή φαίνεται ότι είναι η δυνατότητα μετάβασης από τον ποσοτικό συλλογισμό, δηλαδή την περιγραφή σχέσεων μεταξύ δύο συμμεταβαλλόμενων ποσοτήτων, στον αλγεβρικό συλλογισμό που αφορά στην περιγραφή σχέσεων με χρήση μαθηματικού φορμαλισμού (Thompson, 2011). Ο Lagrange (2014) υπέδειξε τη μοντελοποίηση δυναμικών καταστάσεων της καθημερινότητας ως ένα πλαίσιο διασύνδεσης των ποσοτήτων με τις συναρτήσεις μέσα από τη συμμεταβολή των αντίστοιχων μεγεθών στο Casyopée. Μάλιστα, όπως θα δούμε παρακάτω, ο σχεδιασμός του Casyopée βασίστηκε στην επιδίωξη της διευκόλυνσης των μαθητών να μεταβούν από τον κόσμο των αλληλεξαρτήσεων/συμμεταβολών σε ένα φυσικό σύστημα, στον κόσμο των συναρτήσεων μέσα από τη συμμεταβολή ποσοτήτων/μεγεθών και τη χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων. Στην παρούσα έρευνα υιοθετήσαμε τις παραπάνω προσεγγίσεις και επιπλέον θεωρήσαμε την πορεία μετάβασης των μαθητών από τις συμμεταβαλλόμενες ποσότητες/μεγέθη στη συνάρτηση ως μία αφαιρετική διαδικασία κατασκευής νοημάτων που βασίζεται στην έννοια των τοπικών

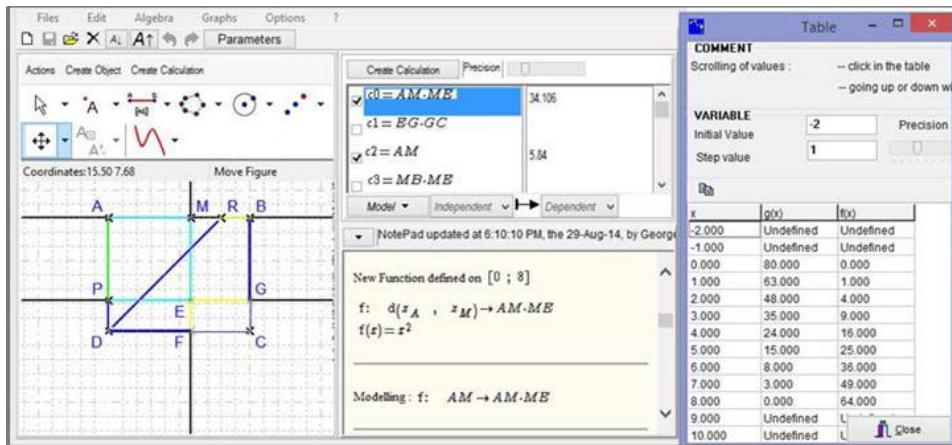


γενικεύσεων (situated abstractions, Noss & Hoyles, 1996) καθώς πραγματοποιείται σε στενή συνάφεια με τα χρησιμοποιούμενα εργαλεία και το μαθησιακό πλαίσιο.

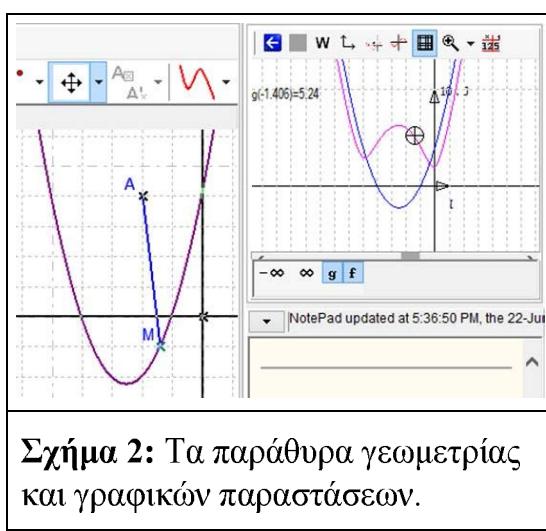
Στην παρούσα έρευνα χρησιμοποιήσαμε το λογισμικό Casyopéε για να μελετήσουμε τις διαδικασίες νοηματοδότησης της συνάρτησης ως συμμεταβολής από μαθητές Β' Λυκείου. Συγκεκριμένα, μας ενδιέφερε ο εντοπισμός των επιπέδων νοηματοδότησης της συνάρτησης ως συμμεταβολής με ποιοτικό τρόπο όταν οι μαθητές εμπλέκονται σε δραστηριότητες μοντελοποίησης που περιλαμβάνουν την εμπειρία χειρισμού συμμεταβαλλόμενων μεγεθών στο γεωμετρικό πλαίσιο, τη διερεύνηση των μεταξύ τους σχέσεων και τη σταδιακή μετάβαση στο αλγεβρικό πλαίσιο για τη μελέτη των αντίστοιχων συναρτήσεων. Επίσης, εστιαστήκαμε στη μελέτη του ρόλου των προσφερόμενων εργαλείων στην πορεία νοηματοδότησης της συνάρτησης ως συμμεταβολής μέσα από τη σκιαγράφηση της αναπτυξιακής πορείας των νοημάτων των μαθητών καθώς αλληλεπιδρούσαν με τα διαθέσιμα εργαλεία.

## ΤΟ ΛΟΓΙΣΜΙΚΟ CASYOPÉΕ

Το Casyopéε διαθέτει ένα παράθυρο Άλγεβρας, το οποίο προσφέρει εργαλεία και αναπαραστάσεις για τη μελέτη συναρτήσεων (π.χ. παραγοντοποίηση τύπου, εύρεση παραγώγου – παράγουσας, επίλυση εξίσωσης συναρτήσεων). Το παράθυρο της Άλγεβρας συνδέεται με ένα παράθυρο Δυναμικής Γεωμετρίας στο οποίο οι μαθητές μπορούν να δημιουργούν ελεύθερα και εξαρτώμενα γεωμετρικά αντικείμενα σε ένα σύστημα αξόνων (σχ. 1). Ένα πρωτότυπο χαρακτηριστικό του λογισμικού αποτελεί το παράθυρο «γεωμετρικοί υπολογισμοί», στο οποίο οι μαθητές μπορούν να ορίζουν ανεξάρτητα μεγέθη (με βάση ελεύθερα σημεία) και εξαρτημένα μεγέθη (όπως μήκος τμήματος, εμβαδό, τετμημένη ή τεταγμένη σημείου) ως αντικείμενα (c0, c1, c2,...). Με κλικ πάνω σε έναν γεωμετρικό υπολογισμό-αντικείμενο (c0, c1, c2, ...) οι μαθητές μπορούν να πληροφορηθούν από ποια μεγέθη εξαρτάται. Επιπλέον, μέσω της λειτουργίας της «αυτόματης μοντελοποίησης» οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα να ελέγξουν αν μπορεί να οριστεί συνάρτηση μεταξύ δύο συμμεταβαλλόμενων ποσοτήτων/μεγεθών, επιλέγοντας το πρώτο ως ανεξάρτητη μεταβλητή και το δεύτερο ως εξαρτημένη μεταβλητή.



Σχήμα 1: Τα παράθυρα γεωμετρίας, γεωμετρικών υπολογισμών και πίνακα τιμών.



Σχήμα 2: Τα παράθυρα γεωμετρίας και γραφικών παραστάσεων.

Σε περίπτωση που μπορεί να οριστεί συνάρτηση, εξάγεται αυτόματα ο αλγεβρικός τύπος της στο παράθυρο της Άλγεβρας. Σε αντίθετη περίπτωση, το περιβάλλον παρέχει κατάλληλη πληροφόρηση. Τέλος, μία συνάρτηση μπορεί να μελετηθεί με τη χρήση διαφορετικών αναπαραστάσεων, όπως πίνακα τιμών (σχ. 1) και γραφικής παράστασης. Οι μαθητές μπορούν να περιηγηθούν πάνω στη γραφική παράσταση με τη χρήση του «κινούμενου στόχου», δηλαδή ενός δυναμικού σημείου που εκφράζει τις συμμεταβολές των ποσοτήτων μέσω των οποίων ορίστηκε η συνάρτηση (σχ. 2, γράφημα).

## ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

### Μέθοδος, πλαίσιο, δραστηριότητες και συλλογή δεδομένων

Στην έρευνα συμμετείχαν έξι μαθητές Β' Λυκείου που εργάστηκαν σε ομάδες των δύο για 5 ώρες (60λ.). Η ακολουθούμενη μέθοδος αντιστοιχεί σε μελέτη περίπτωσης με στοιχεία έρευνας σχεδιασμού (Cobb et al., 2003). Οι μαθητές εργάστηκαν σε τρεις δραστηριότητες που αναφέρονταν σε προβλήματα μεγιστοποίησης. Η αλληλουχία των δραστηριοτήτων ήταν τέτοια ώστε να εμφανίζεται η συμμεταβολή από απλές σε περισσότερο σύνθετες καταστάσεις. Η δραστηριότητα 1 ζητούσε την ελάχιστη απόσταση ενός σημείου από μία παραβολή (σχ. 2). Οι μαθητές κλήθηκαν να δημιουργήσουν μία συνάρτηση ορίζοντας ως μεγέθη την απόσταση AM και την τετμημένη του σημείου M. Η δραστηριότητα 2 περιείχε ένα ορθογώνιο ABCD και ένα κινητό σημείο M (κινούμενο μεταξύ των A και R), ώστε το AMEP να παραμένει τετράγωνο και το EGCF να είναι ορθογώνιο (σχ. 1). Τα χωρία AMEP και EGCF αντιστοιχούσαν σε κήπους, ενώ τα MBGE και



PEFD σε χώρους κατοικιών. Τέθηκαν ερωτήματα όπως: «Παρατηρείτε κάποιες ποσότητες να συμμεταβάλλονται;», «Υπάρχει θέση του σημείου Μ ώστε: (α) τα εμβαδά των δύο κήπων να είναι ίσα; (β) τα εμβαδά των κήπων να είναι ίσα με τα εμβαδά των κατοικιών;». Ο σκοπός ήταν ο καθορισμός των συμμεταβαλλόμενων μεγεθών (το μήκος AM με τα εμβαδά κήπων ή κατοικιών) και η επίλυση του προβλήματος μέσα από τη δημιουργία κατάλληλων συναρτήσεων. Η δραστηριότητα 3 ζητούσε τον προσδιορισμό της θέσης των κορυφών ενός ορθογωνίου πάνω στις πλευρές δοσμένου τριγώνου έτσι ώστε το ορθογώνιο να έχει το μέγιστο εμβαδό. Η συλλογή δεδομένων έγινε με τη βοήθεια ψηφιακού μαγνητόφωνου και κάμερας. Για την ανάλυση απομαγνητοφωνήθηκε το σύνολο των δεδομένων.

### Μέθοδος ανάλυσης

Σε πρώτη φάση, προκειμένου να εντοπίσουμε τα επίπεδα νοηματοδότησης των μαθητών για τη συνάρτηση ως συμμεταβολή επιλέξαμε λεκτικές εκφράσεις σχετικά με τον καθορισμό και τη σχέση των εκάστοτε συμμεταβαλλόμενων μεγεθών κατά τη διάρκεια του πειραματισμού τους. Οι εκφράσεις αυτές αποτέλεσαν ενδείξεις τοπικών αφαιρετικών διαδικασιών, καθώς περιελάμβαναν αναφορές τόσο σε επίπεδο ποσοτήτων/μεγεθών όσο και σε επίπεδο τυπικών μαθηματικών αντικειμένων και αποτύπωναν το τρέχον επίπεδο νοηματοδότησης των μαθητών. Προέκυψαν τέσσερα επίπεδα νοηματοδότησης της συμμεταβολής από διαισθητικές σε περισσότερο μαθηματικοποιημένες εκδοχές, η διάκριση των οποίων βασίστηκε στα εξής κριτήρια: τη συμμεταβολή χωρίς ποσοτική αναφορά (διαισθητικά), την αλληλεξάρτηση μεγεθών, το μαθηματικό φορμαλισμό και τη σύνδεση διαφορετικών αναπαραστάσεων. Σε δεύτερη φάση, επιλέξαμε επεισόδια μεγαλύτερης έκτασης από το σύνολο των δεδομένων προκειμένου να αναδειχθεί η εξέλιξη της νοηματοδότησης των μαθητών μέσα από την παράλληλη διερεύνηση του ρόλου των εργαλείων. Τα επεισόδια επιλέχτηκαν με βάση: (α) τις διαδικασίες αναγνώρισης και συσχέτισης συμμεταβαλλόμενων ποσοτήτων/μεγεθών/μεταβλητών από την πλευρά των μαθητών πριν και μετά τη δημιουργία συναρτήσεων στο λογισμικό και (β) τον ρόλο των εργαλείων σε αυτές. Μέσα από συγκριτική ανάλυση της εργασίας των ομάδων προέκυψαν τέσσερις θεματικές κατηγορίες επεισοδίων, οι οποίες φωτίζουν διαφορετικές πτυχές της πορείας προς τη νοηματοδότηση της συνάρτησης ως συμμεταβολής, πριν και μετά τον ορισμό συμμεταβαλλόμενων μεγεθών στο Casyopée. Κάποιες από τις κατηγορίες αυτές περιλαμβάνουν τη μετακίνηση των μαθητών στα διαφορετικά επίπεδα νοηματοδότησης που εντοπίστηκαν στην πρώτη φάση της ανάλυσης. Στις επόμενες ενότητες παραθέτουμε συνοπτική περιγραφή: (α) των τεσσάρων επιπέδων νοηματοδότησης της συνάρτησης ως συμμεταβολής και (β) των θεματικών κατηγοριών επεισοδίων που



σκιαγραφούν την εξέλιξη της νοηματοδότησης των μαθητών καθ' όλη την εργασία τους.

## ΕΠΙΠΕΔΑ ΝΟΗΜΑΤΟΔΟΤΗΣΗΣ ΤΗΣ ΣΥΜΜΕΤΑΒΟΛΗΣ

### Επίπεδο 1: Νοηματοδότηση της συμμεταβολής διαισθητικά

Στο επίπεδο 1 οι μαθητές περιέγραφαν τις μεταβολές δύο συμμεταβαλλόμενων μεγεθών (π.χ. το μήκος ΑΜ και το εμβαδό) διαισθητικά. Οι μαθητές αντιμετώπιζαν ανεξάρτητα τις αλλαγές σε κάθε μεταβλητή χωρίς κάποια ποσοτική περιγραφή των αλλαγών. Για παράδειγμα (σχ. 1):

*Δραστηριότητα 2: Υπάρχει θέση του M κατά την οποία οι κήποι θα έχουν εμβαδό όσο και οι κατοικίες που πρόκειται να κτιστούν;*

Μαθήτρια 2: Μεταβάλλεται το ΑΜ και μεταβάλλεται και το εμβαδό αυτού (το εμβαδό των κατοικιών PEFD και MBGE). (Ομάδα 1, δρ.2, στίχος 621)

### Επίπεδο 2: Νοηματοδότηση της συμμεταβολής αλληλοεξαρτώμενων μεγεθών

Στο επίπεδο 2 οι μαθητές αναγνώριζαν ότι η μεταβολή ενός μεγέθους προκαλεί μία αντίστοιχη μεταβολή σε ένα άλλο μέγεθος. Έτσι, το κύριο χαρακτηριστικό του επιπέδου 2 είναι η έννοια της αλληλοεξαρτησης. Για παράδειγμα (σχ. 1):

*Δραστηριότητα 2: Υπάρχει θέση του M κατά την οποία οι κήποι θα έχουν εμβαδό όσο και οι κατοικίες που πρόκειται να κτιστούν;*

Μαθητής 5: Μας λέει ότι όταν αυξάνεται το ΑΜ, αυξάνεται και το εμβαδό (AMEP) ανάλογα. (Ομάδα 3, δρ.2, στίχος 203)

### Επίπεδο 3: Νοηματοδότηση συμμεταβολής μεταβλητών με βάση τον αλγεβρικό συμβολισμό

Στο επίπεδο 3 οι μαθητές ήταν σε θέση να περιγράψουν τη συμμεταβολή με βάση τον αλγεβρικό συμβολισμό. Για παράδειγμα, στο επόμενο απόσπασμα οι μαθητές της ομάδας 3 έχοντας προσδιορίσει τις συμμεταβαλλόμενες ποσότητες ‘μήκος ΑΜ’ και ‘εμβαδό AMEP’ (σχ. 1) στο Casyopée, αντιμετώπισαν το τρίτο ερώτημα της δραστηριότητας 2: «Προσδιορίστε τη θέση του M στο AR ώστε οι δύο κήποι (εμβαδά AMEP και EGCF) να έχουν ίσο εμβαδό». Οι μαθητές δημιούργησαν δύο συναρτήσεις με ανεξάρτητη μεταβλητή το ΑΜ (μία για το εμβαδό του AMEP και μία για το εμβαδό του EGCF) και εμφάνισαν τον πίνακα τιμών (στήλες x, f(x), g(x)). Μέσα από την παρατήρηση των στηλών του πίνακα τιμών, ο μαθητής 5 αιτιολογεί ότι η f είναι συνάρτηση με αναφορά στα σύμβολα x και f(x). Η συμμεταβολή των δύο αλληλοεξαρτώμενων ποσοτήτων εκφράζεται ως τοπική αφαιρετική διαδικασία και υπονοείται από τη λέξη «όσο».



Μαθητής 5: Αφού για κάθε  $x$  έχω ένα  $y$ , θέτοντας  $x$  το AM, έχω ένα άλλο  $y$ . Συνδέονται, τέλος πάντων, μεταξύ τους. Όσο μεγαλώνει ας πούμε  $x$ , ανάλογα μεγαλώνει και το  $f(x)$ . (Ομάδα 3, δρ.2, στίχος 314).

#### **Επίπεδο 4: Νοηματοδότηση της συμμεταβολής σε διαφορετικές αναπαραστάσεις της συνάρτησης**

Στο επίπεδο 4 της συμμεταβολής, οι μαθητές περιέγραφαν τη συνάρτηση ως συμμεταβολή με μαθηματικούς όρους, συνδέοντας ταυτόχρονα διαφορετικές αναπαραστάσεις της συνάρτησης. Στο παράδειγμα που ακολουθεί φαίνεται πώς οι μαθητές της ομάδας 2 μετακινούνται στο επίπεδο 4. Αφού απάντησαν στα τρία πρώτα ερωτήματα της δραστηριότητας 2, οι μαθητές επεξεργάζονταν το ερώτημα: «*Υπάρχει θέση του M κατά την οποία οι κήποι (εμβαδά AMEP και EGCF) θα έχουν εμβαδό όσο και οι κατοικίες (εμβαδά MBGE και PEFD) που πρόκειται να κτιστούν; (σχ. 1)*». Οι μαθητές δημιούργησαν τους γεωμετρικούς υπολογισμούς των αθροισμάτων των εμβαδών (c3 και c6 αντίστοιχα) και όρισαν τη συνάρτηση του μήκους AM (c2) σε σχέση με το εμβαδό των κήπων (c3). Περιγράφοντας τη συμμεταβολή του μήκους του AM και του αθροίσματος των εμβαδών AMEP και EGCF, η μαθήτρια M4 χρησιμοποιεί αλγεβρικούς όρους συνδέοντας τον πίνακα τιμών και το παράθυρο γεωμετρικών υπολογισμών.

Μαθήτρια 4: Βλέπουμε ότι για κάθε c2 που μεταβάλλεται, δηλαδή μήκος AM, μεταβάλλεται και το c3. (σχ. 1) (Ομ. 2, δρ.2, στ.392).

#### **Η ΕΞΕΛΙΞΗ ΤΗΣ ΝΟΗΜΑΤΟΔΟΤΗΣΗΣ ΤΗΣ ΣΥΜΜΕΤΑΒΟΛΗΣ**

Στην ενότητα αυτή περιγράφουμε συνοπτικά τις τέσσερις θεματικές κατηγορίες επεισοδίων που φωτίζουν τη σταδιακή μετακίνηση των μαθητών σε διαφορετικά επίπεδα νοηματοδότησης της συνάρτησης ως συμμεταβολής που πρόεκυψαν από τη σύνθεση της δραστηριότητας όλων των μαθητών. Οι δύο πρώτες κατηγορίες αναφέρονται στις φάσεις στις οποίες οι μαθητές δεν έχουν εμπλακεί με τη δημιουργία συνάρτησης στο λογισμικό.

#### **Η αλληλεξάρτηση μεταξύ μεγεθών**

Όλοι οι μαθητές παρατήρησαν διαισθητικά τη συμμεταβολή μεγεθών πριν εμπλακούν με τη δημιουργία συναρτήσεων στο Casyopée. Τα επεισόδια της κατηγορίας αυτής βασίστηκαν στην παρατήρηση της αλληλεξάρτησης των συμμεταβαλλόμενων μεγεθών στο πλαίσιο του δυναμικού χειρισμού των ελεύθερων σημείων από τους μαθητές στο παράθυρο της Γεωμετρίας.

#### **Ο καθορισμός της ανεξάρτητης και εξαρτημένης μεταβλητής**

Το ζήτημα επιλογής της ανεξάρτητης μεταβλητής εμφανίστηκε όταν οι μαθητές οδηγήθηκαν για πρώτη φορά στη δημιουργία συνάρτησης κατά τη μοντελοποίηση των προβλημάτων που υπήρχαν στις δραστηριότητες. Τα επεισόδια της κατηγορίας αυτής αφορούσαν δυσκολίες των μαθητών αναφορικά με την κατάλληλη επιλογή της ανεξάρτητης μεταβλητής.



Σταδιακά, μέσω της εμπειρίας που προήλθε από τη μετακίνηση ελεύθερων σημείων και την παρατήρηση της μεταβολής των τιμών στα αλληλεξαρτώμενα μεγέθη (παράθυρο γεωμετρικών υπολογισμών), οι μαθητές εξοικειώθηκαν τόσο με τη συμμεταβολή μεγεθών όσο και με τον πειραματισμό για την επιλογή της εξαρτημένης και ανεξάρτητης μεταβλητής στο Casyopée.

### **Η μετάβαση από την αλληλεξάρτηση στη συμμεταβολή**

Στην κατηγορία αυτή η νοηματοδότηση της συμμεταβολής προήλθε από την εμπλοκή των μαθητών με τον ορισμό συνάρτησης στο λογισμικό και την επακόλουθη ερμηνεία της με χρήση διαφορετικών αναπαραστάσεων. Στα αντίστοιχα επεισόδια οι μαθητές μετακινούνται μεταξύ των επιπέδων νοηματοδότησης της συμμεταβολής 1, 2 και 3 μέσω της αλληλεπίδρασης με το Casyopée. Στο παράδειγμα που ακολουθεί οι μαθητές της ομάδας 3 έχουν δημιουργήσει τη συνάρτηση που περιγράφει τη συμμεταβολή της θέσης του σημείου M και του μήκους του AM (δραστηριότητα 1) και έχουν εμφανίσει το γράφημά της και τον «κινούμενο στόχο» σε αυτό (σχ. 2).

**Μαθητής 5:** Λοιπόν, κινούμε το x κινώντας το βελάκι ... Κινούνται και τα δύο (ενν. ο στόχος και το σχήμα της παραβολής στο παράθυρο της γεωμετρίας).

**Ερευνητής:** Πες μου, τι παρατηρείς;

**Μαθητής 5:** Όσο κατεβαίνουμε το x πλησιάζει ας πούμε στο 0. (ενν. η κίνηση του στόχου προς τα δεξιά επηρεάζει την τιμή του μεγίστου).

Από το απόσπασμα προκύπτει ότι μέσα από τη δυναμική μετακίνηση του «κινούμενου στόχου» ο μαθητής 5 αναγνωρίζει την αλληλεξάρτηση μεταξύ της ανεξάρτητης μεταβλητής x και του μήκους του τμήματος AM στο παράθυρο της γεωμετρίας και μεταβαίνει στο επίπεδο 2 νοηματοδότησης της συμμεταβολής. Ακολούθως, οι μαθητές της ίδιας ομάδας νοηματοδότησαν τη συνάρτηση ως συμμεταβολή μεταβλητών με βάση τον αλγεβρικό συμβολισμό (επίπεδο 3 νοηματοδότησης της συμμεταβολής) μέσα από την αλληλεπίδρασή τους με τον πίνακα τιμών και τη γραφική παράσταση. Συνοψίζοντας, μέσα από το παράδειγμα της ομάδας 3 φαίνεται ο καθοριστικός ρόλος των διαθέσιμων αναπαραστάσεων για τη μετάβαση των μαθητών στα επίπεδα νοηματοδότησης της συμμεταβολής 1, 2 και 3.

### **Η έννοια της συμμεταβολής συνδέοντας διαφορετικές αναπαραστάσεις**

Στην κατηγορία αυτή η νοηματοδότηση της συνάρτησης ως συμμεταβολής χαρακτηρίστηκε από την εμφάνιση του αλγεβρικού συμβολισμού μέσα από τη σύνδεση διαφορετικών αναπαραστάσεων. Στα αντίστοιχα επεισόδια καταγράφηκαν μετακινήσεις των μαθητών στο επίπεδο 4 νοηματοδότησης της συμμεταβολής. Σημειώνουμε ότι δύο από τις ομάδες που παρακολουθήσαμε έφτασαν στο επίπεδο 4 κάνοντας συνδέσεις μεταξύ του



πίνακα τιμών και του παραθύρου γεωμετρικών υπολογισμών. Συνολικά, στις νοηματοδοτήσεις των μαθητών έπαιξε καθοριστικό ρόλο το παράθυρο «πίνακας τιμών» και ο τρόπος που οι μαθητές συνδύασαν τον πίνακα τιμών με: (α) τη γραφική παράσταση και (β) με τις μεταβλητές  $c_0$ ,  $c_1$  και  $c_2$ , στο παράθυρο γεωμετρικών υπολογισμών.

## ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στην παρούσα εργασία εστιαστήκαμε στη διερεύνηση των διαδικασιών νοηματοδότησης της συνάρτησης ως συμμεταβολής από μαθητές Β' Λυκείου, κατά τη μοντελοποίηση προβλημάτων στο λογισμικό Casyopée. Η ανάλυση ανέδειξε τέσσερα ιεραρχημένα επίπεδα: (α) νοηματοδότηση της συμμεταβολής διαισθητικά, (β) νοηματοδότηση της συμμεταβολής αλληλοεξαρτώμενων μεγεθών, (γ) νοηματοδότηση της συμμεταβολής μεταβλητών με βάση τον αλγεβρικό συμβολισμό και (δ) νοηματοδότηση της συμμεταβολής σε διαφορετικές αναπαραστάσεις της συνάρτησης.

Σε δεύτερο επίπεδο σκιαγραφήσαμε την πορεία εξέλιξης της νοηματοδότησης των μαθητών για τη συμμεταβολή, μέσα από θεματικές κατηγορίες επεισοδίων, που καταδεικνύουν τον καθοριστικό ρόλο των εργαλείων. Οι θεματικές κατηγορίες επεισοδίων ήταν: (α) η αλληλεξάρτηση μεταξύ μεγεθών, (β) ο καθορισμός της ανεξάρτητης και εξαρτημένης μεταβλητής, (γ) η μετάβαση από την αλληλεξάρτηση στη συμμεταβολή και (δ) η έννοια της συμμεταβολής συνδέοντας διαφορετικές αναπαραστάσεις. Περαιτέρω έρευνα είναι απαραίτητη για να μελετηθεί ο τρόπος που εμφανίζεται η συμμεταβολή κατά την εμπλοκή των μαθητών με τη μοντελοποίηση και διερεύνηση προβλημάτων σε ρεαλιστικά πλαίσια.

## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: A framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Education*, 33(5), 352-378.
- Cobb, P., Confrey, J., DiSessa, A., Lehrer, R. & Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational Researcher*, v.32, 9-13.
- Lagrange, J.-B. (2010). Teaching and learning about functions at upper secondary level: designing and experimenting the software environment Casyopée. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 41(2), 243-255.
- Lagrange, J.-B. (2014). New representational infrastructures: broadening the focus on functions. *Teaching Mathematics and Its Applications*, 33(3), 179-192.
- Noss, R., & Hoyles, C. (1996). *Windows on mathematical meanings*. Dordrecht: Kluwer.



- Psycharis, G. (in press). Formalising functional dependencies: The potential of technology. *Proceedings of the 9<sup>th</sup> Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. Prague, Czech Republic.
- Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1-36.
- Thompson, P. W. (1994). Students, functions, and the undergraduate curriculum. In E. Dubinsky, A. H. Schoenfeld, & J. J. Kaput (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education, 1, Issues in Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 21-44). Providence, RI: American Mathematical Society.
- Thompson, P. W. (2011). Quantitative reasoning and mathematical modeling. In L. L. Hatfield, S. Chamberlain & S. Belbase (Eds.), *New perspectives and directions for collaborative research in mathematics education*. WISDOMe Mongraphs (Vol. 1, pp. 33-57). Laramie, WY: University of Wyoming.