



## ΠΡΑΚΤΙΚΑ

7ου Πανελλήνιου Συνεδρίου της Ένωσης  
Ερευνητών της Διδακτικής των  
Μαθηματικών (Εν.Ε.Δι.Μ.)

## ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΓΝΩΣΗ ΚΑΙ ΔΙΔΑΚΤΙΚΕΣ ΠΡΑΚΤΙΚΕΣ

ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

1, 2 & 3 Δεκεμβρίου 2017

<input checked="" type="checkbox"/>	Ένωση Ερευνητών Διδακτικής των Μαθηματικών (Εν.Ε.Δι.Μ.)
<input checked="" type="checkbox"/>	Τμήμα Μαθηματικών, ΕΚΠΑ
<input checked="" type="checkbox"/>	Διαπανεπιστημιακό-Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών "Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών", ΕΚΠΑ

Επιμέλεια:

Θ. Ζαχαριάδης, Δ. Πόταρη, Γ. Ψυχάρης

## ΝΟΗΜΑΤΟΔΟΤΗΣΗ ΤΗΣ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗΣ ΚΥΚΛΟΥ ΜΕΣΑ ΑΠΟ ΤΗ ΧΑΡΑΞΗ ΠΟΡΕΙΑΣ ΣΤΟΝ ΝΑΥΤΙΚΟ ΧΑΡΤΗ

\* Βρούτσης Νικόλαος, \*\*Ψυχάρης Γιώργος, \*\*Τριανταφύλλου  
Χρυσανγή

\*Εκπαιδευτικός ΠΕ03, \*\* Τμήμα Μαθηματικών ΕΚΠΑ

vroutsidi@gmail.com, gpsych@math.uoa.gr, chrtriantaf@math.uoa.gr

Η παρούσα έρευνα αφορά τη σύνδεση των σχολικών μαθηματικών με πρακτικές του χώρου εργασίας. Ειδικότερα, πραγματεύεται τους τρόπους νοηματοδότησης γεωμετρικών εννοιών της Α' Λυκείου μέσω αυθεντικών πρακτικών και εργαλείων του πλοιάρχου του Εμπορικού Ναυτικού. Οι δραστηριότητες που δόθηκαν στους μαθητές είχαν ως πλαίσιο αναφοράς τον ναυτικό χάρτη και αφορούσαν τη χάραξη πορείας και την εύρεση της θέσης του πλοίου. Σε όλες τις φάσεις της έρευνας συμμετείχε επαγγελματίας πλοιάρχος. Στα αποτελέσματα καταγράφεται η πορεία νοηματοδότησης της εφαπτομένης κύκλου από τους μαθητές κατά τη διερεύνηση της χάραξης πορείας πλοίου, για την αποφυγή εμποδίου, στον ναυτικό χάρτη.

### ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τις τελευταίες δεκαετίες οι περισσότερες έρευνες στον χώρο της διδακτικής των μαθηματικών συγκλίνουν στην άποψη ότι υπάρχει διάσταση ανάμεσα στα μαθηματικά που διδάσκονται στο σχολείο και στα μαθηματικά που χρησιμοποιούνται σε χώρους εργασίας (Triantafillou & Potari, 2010). Η διάσταση αυτή αποτελεί συχνά εμπόδιο, για τους νεοεισερχόμενους σε έναν χώρο εργασίας, στην απόδοση νοήματος σε μαθηματικές πρακτικές του χώρου αυτού. Πρόκειται για το λεγόμενο κενό ικανοτήτων (*skills gap*) (FitzSimons, 2014). Ταυτόχρονα, όμως, αναγνωρίζεται η δυνατότητα που παρέχουν οι χώροι εργασίας για τη διερεύνηση θεμάτων που αφορούν την κατασκευή και χρήση μαθηματικών εννοιών και τον τρόπο που οι προσδοκώμενοι στόχοι των επαγγελματικών χώρων επηρεάζουν και διαμορφώνουν τη νοηματοδότηση αυτή (Pozzi et al., 1998). Στην κατεύθυνση αυτή, τα τελευταία χρόνια καταγράφεται έντονο ερευνητικό ενδιαφέρον στη διδακτική αξιοποίηση του χώρου εργασίας, στη γενική εκπαίδευση (Psyharis & Potari, 2017).

Στην παρούσα εργασία παρουσιάζουμε επιμέρους αποτελέσματα μιας έρευνας, με θέμα τη διασύνδεση μαθηματικών εννοιών με αυθεντικές καταστάσεις του χώρου εργασίας. Συγκεκριμένα, μελετήσαμε πώς μαθητές της Α' Λυκείου νοηματοδότησαν γεωμετρικές έννοιες μέσω της

εμπλοκής τους σε ένα αυθεντικό πρόβλημα που αντιμετωπίζει ένας πλοίαρχος, κατά τη χάραξη της πορείας πλοίου στον ναυτικό χάρτη. Προσπαθήσαμε να απαντήσουμε στα εξής ερωτήματα:

- Με ποιο τρόπο νοηματοδοτούν οι μαθητές τη διασύνδεση μαθηματικών εννοιών και αυθεντικών καταστάσεων από τον χώρο της ναυσιπλοΐας;
- Ποιος είναι ο ρόλος των διαθέσιμων μέσων (εργαλείων ψηφιακών και αυθεντικών) και πρακτικών στη διαδικασία νοηματοδότησης;

## ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Στην παρούσα εργασία υιοθετήσαμε ως θεωρητικό πλαίσιο την τρίτη γενιά της Θεωρίας Δραστηριότητας, στην οποία μονάδα ανάλυσης αποτελούν δύο αλληλεπιδρώντα συστήματα δραστηριότητας (Engeström et al., 1995). Ως δομικά στοιχεία του κάθε συστήματος αναγνωρίζονται τα υποκείμενα που συμμετέχουν στο σύστημα δραστηριότητας, τα εργαλεία ή τα τεχνουργήματα που χρησιμοποιούν τα υποκείμενα, ο επιδιωκόμενος στόχος, οι κανόνες (επίσημοι ή ανεπίσημοι κανονισμοί που μπορούν να περιορίσουν ή να διευρύνουν τα όρια των δραστηριοτήτων), η κοινότητα, δηλαδή η κοινωνική ομάδα στην οποία ανήκει το υποκείμενο, και η κατανομή εργασίας, η οποία καθορίζει τον τρόπο που οι στόχοι της δραστηριότητας κατανέμονται μέσα στην κοινότητα. Στην παρούσα εργασία τα δύο συστήματα δραστηριότητας που αλληλεπιδρούν είναι αυτό της διδασκαλίας των μαθηματικών στο σχολείο (μαθητές Α' Λυκείου, εκπαιδευτικός) και της ναυσιπλοΐας του Εμπορικού Ναυτικού (πλοίαρχος).

Στη θεώρηση αυτή, η διαμόρφωση του αντικειμένου της δραστηριότητας ανακύπτει ως μέρος της δυναμικής αλληλεπίδρασης των δύο πρακτικών. Ως *σύνορα* (*boundaries*) ορίζονται οι κοινωνικές πολιτισμικές διαφορές που προκαλούν ασυνέχειες στις δράσεις ή αλληλεπιδράσεις των ανθρώπων, καθώς αυτοί καλούνται να συμμετάσχουν σε δραστηριότητες της νέας πρακτικής με τις οποίες δεν είναι εξοικειωμένοι (Akkerman & Bakker, 2011). Ο όρος *διέλευση συνόρων* (*boundary crossing*) αναφέρεται στις αμφίδρομες ενέργειες και αλληλεπιδράσεις μεταξύ των υποκειμένων προκειμένου να εγκαθιδρύσουν ή να αποκαταστήσουν την επικοινωνία ανάμεσά στα συστήματα δραστηριότητας (Bakker & Akkerman, 2014). Η δυναμική αυτή διαδικασία μπορεί να έχει ως δυνητικό αποτέλεσμα την επίτευξη μιας υβριδικής κατάστασης (Engeström et al., 1995). Στα πλαίσια της αμφίδρομης πορείας ανάμεσα στα σύνορα τα υποκείμενα χρησιμοποιούν εργαλεία/τεχνουργήματα προκειμένου να γεφυρώσουν τα δύο συστήματα δραστηριότητας. Για να περιγράψουν τα αντικείμενα αυτά οι Star και Griesemer, (1989)

εισήγαγαν τον όρο διασυνοριακά αντικείμενα (*boundary objects*). Ο Jurdak, (2016) αναγνωρίζει τις εργασιακές πρακτικές ως ένα από τα διασυνοριακά αντικείμενα ανάμεσα στα μαθηματικά της τυπικής εκπαίδευσης και της εφαρμογής τους στην καθημερινή ζωή. Μια επαγγελματική πρακτική θεωρείται διαμεσολαβητικό αντικείμενο, καθώς μπορεί να αποκτήσει νόημα τόσο ως ρουτίνα στο εργασιακό περιβάλλον, όσο και ως πεδίο εφαρμογής των μαθηματικών εννοιών στις πρακτικές του χώρου εργασίας (Jurdak, 2016).

Σύμφωνα με τους Akkerman και Baker (2011) η διέλευση συνόρων αποτελεί μια μαθησιακή διαδικασία που μπορεί να περιγραφεί μέσα από την πιθανή ενεργοποίηση τεσσάρων μηχανισμών μάθησης/νοηματοδότησης. Η ενεργοποίηση των μηχανισμών είναι το ζητούμενο της διέλευσης των συνόρων αλλά δεν είναι πάντοτε εφικτή. Οι μηχανισμοί αυτοί είναι: (α) η αναγνώριση (*identification*) που αναφέρεται στον προσδιορισμό της ταυτότητας κάθε πρακτικής, (β) ο συντονισμός (*coordination*) ο οποίος αφορά τις ελάχιστες ανταλλαγές μεταξύ των διαφορετικών πρακτικών, (γ) ο αναστοχασμός (*reflection*) που περιλαμβάνει την κατανόηση και την ερμηνεία των διαφορών μεταξύ των πρακτικών, είτε υιοθετώντας τις θεωρήσεις του νέου συστήματος (*perspective taking*), είτε διαμορφώνοντας νέες (*perspective making*) και (δ) ο μετασχηματισμός (*transformation*) με αναφορά στις προφανείς αλλαγές που πραγματοποιούνται και μπορεί να οδηγήσει ακόμα και στην κατασκευή νέων υβριδικών πρακτικών.

Η συνεχής παρουσία του επαγγελματικού χώρου ως πλαίσιο εργασίας, η συμμετοχή του επαγγελματία, η εμπλοκή των μαθητών σε δραστηριότητες στον ναυτικό χάρτη, η χρήση των εργαλείων του πλοιάρχου, η εφαρμογή αυθεντικών πρακτικών του επαγγελματία πλοιάρχου, η ανάγκη ικανοποίησης των κανόνων που διέπουν τη χάραξη πορείας και η επίλυση ρεαλιστικών προβλημάτων, διαμόρφωσαν τις συνθήκες που είχαν ως αποτέλεσμα οι μαθητές να διέλθουν τα σύνορα ανάμεσα στους δύο χώρους, ενεργοποιώντας μηχανισμούς μάθησης/νοηματοδότησης.

## ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

### Πλαίσιο της έρευνας

Στα πρότυπα του ευρωπαϊκού προγράμματος Mascil (<http://www.mascil-project.eu> ) τέσσερις μαθητές, όλοι αγόρια, της Α' Γενικού Λυκείου συμμετείχαν σε αυθεντικές δραστηριότητες από τον χώρο εργασίας των πλοιάρχων του Εμπορικού Ναυτικού. Οι δραστηριότητες είχαν ως πλαίσιο αναφοράς τον ναυτικό χάρτη και αφορούσαν τη χάραξη πορείας του πλοίου και την εύρεση της θέσης του (στύγμα του σκάφους). Οι

δραστηριότητες δε δόθηκαν στους μαθητές στο πλαίσιο της παραδοσιακής σχολικής τάξης αλλά τους παρουσιάστηκαν ως καταστάσεις του χώρου εργασίας.

Στον σχεδιασμό, όσο και στην κυρίως φάση της έρευνας, συμμετείχε και επαγγελματίας του χώρου. Στη φάση του σχεδιασμού πραγματοποιήθηκαν συναντήσεις του εκπαιδευτικού με τον επαγγελματία, ώστε ο πρώτος να εξοικειωθεί με τον χώρο εργασίας και, στη συνέχεια, να δημιουργήσει τις δραστηριότητες στις οποίες ενεπλάκησαν οι μαθητές. Προκειμένου να διατηρηθεί ο ρεαλισμός, δε δόθηκαν φύλλα εργασίας στους μαθητές, αλλά αυτοί λειτούργησαν ως εκπαιδευόμενοι του χώρου εργασίας. Εργάστηκαν αποκλειστικά στον ναυτικό χάρτη με την καθοδήγηση του πλοιάρχου. Στην κυρίως φάση, ο επαγγελματίας έδρασε ως διδάσκων των μαθητών και φορέας της ναυτικής γνώσης. Παρουσίασε στους μαθητές το πλαίσιο στο οποίο θα εργάζονταν, το ναυτικό χάρτη, τα όργανα και τις μετρήσεις που πραγματοποιεί ο κυβερνήτης του πλοίου. Ο εκπαιδευτικός συμμετείχε ως παρατηρητής και παρέμβαινε με ερωτήσεις, ενθαρρύνοντας τη διερεύνηση και καθοδηγώντας όσο το δυνατό λιγότερο. Ο επαγγελματίας και ο εκπαιδευτικός διευκόλυναν την αμφίδρομη κίνηση των μαθητών στα σύνορα των δύο συστημάτων. Ο πλοίαρχος ήταν αυτός που επικοινώνησε τα στοιχεία της πρακτικής του στους μαθητές. Από την άλλη ο εκπαιδευτικός, με τις ερωτήσεις του, επανάφερε στο προσκήνιο τα τυπικά μαθηματικά. Το κυρίως μέρος της έρευνας χωρίστηκε σε τρεις φάσεις. Οι δραστηριότητες που δημιουργήθηκαν (Πίνακας 1.) είχαν στόχο αφενός την εξοικείωση των μαθητών με τον χώρο εργασίας, αφετέρου την ανάδειξη του μαθηματικού περιεχομένου των πρακτικών και εργαλείων του επαγγελματία. Στα αποτελέσματα της παρούσας εργασίας θα παρουσιάσουμε τη νοηματοδότηση της εφαπτομένης του κύκλου μέσα από τη δραστηριότητα «Αποφυγή εμποδίου».

### Συλλογή δεδομένων και μέθοδος ανάλυσης

Τα δεδομένα που συνελέγησαν είναι βιντεοσκοπημένες δραστηριότητες των μαθητών κατά την κυρίως φάση της έρευνας, απομαγνητοφωνήσεις των βιντεοσκοπημένων δραστηριοτήτων των μαθητών, προσωπικές σημειώσεις του εκπαιδευτικού, και τα αποτελέσματα των δραστηριοτήτων των μαθητών πάνω στον ναυτικό χάρτη στον οποίο εργάστηκαν. Αφού μελετήθηκαν προσεκτικά οι βιντεοσκοπημένες δραστηριότητες και οι αντίστοιχες απομαγνητοφωνήσεις ακολούθησε ο προσδιορισμός των κρίσιμων επεισοδίων, τα οποία επιλέχθηκαν και χαρακτηρίστηκαν ακολουθώντας τη βασισμένη στα δεδομένα θεωρία (*grounded theory*), (Charmaz, 2006). Τα επεισόδια που προσδιορίστηκαν

αφορούν νοηματοδοτήσεις ή αποτυχία νοηματοδοτήσεων που προέκυψαν καθώς οι μαθητές προσπάθησαν να «αποκωδικοποιήσουν» επαγγελματικές πρακτικές, να κατανοήσουν και να χρησιμοποιήσουν τα εργαλεία του πλοιάρχου ή να δώσουν απάντηση σε δραστηριότητες που

Φάση Α (δύο ώρες) Εισαγωγική δραστηριότητα	
Γεωγραφικές συντεταγμένες-ναυτικό μίλι	Ορθοκανονικό σύστημα αξόνων
Ακτοπλοϊκό ταξίδι	Τεθλασμένη γραμμή, στροφή κατά γωνία, παράλληλη μεταφορά
Φάση Β (τέσσερις ώρες) Γραμμές θέσης πλοίου	
Αντιστοιχία Ευθυγράμμιση	Ευθεία, σχετικές θέσεις ευθεών στο επίπεδο
Οριζόντια γωνία	Εγγεγραμμένη γωνία, σχετικές θέσεις κύκλων στο επίπεδο
Ασφαλής διέλευση επικίνδυνων υδάτων	Μεταβολή εγγεγραμμένης γωνίας
Δύο ασύγχρονες διοπτεύσεις του ίδιου καταφανούς σημείου.	Παραλληλόγραμμο, παράλληλη μεταφορά
Απόσταση ραντάρ	Κύκλος
Αποφυγή εμποδίου	Εφαπτόμενες κύκλου
Ισοβαθής καμπύλη	Εφαπτόμενες καμπύλης
Φάση Γ (δύο ώρες) Εύρεση θέσης πλοίου με τη χρήση γραμμών θέσης	
Περιοδικότητα αναλαμπής φάρων	Περιοδικότητα
Εύρεση θέσης πλοίου	Σχετικές θέσεις κύκλων, κύκλου και ευθείας στο επίπεδο, περίκεντρο και έκκεντρο τριγώνου

### Εικόνα 1: Φάσεις και δραστηριότητες της εφαρμογής και οι σχετικές μαθηματικές έννοιες

μοντελοποιούν ρεαλιστικά προβλήματα τα οποία αντιμετωπίζει ο πλοίαρχος κατά τον πλου του σκάφους. Σε δεύτερο επίπεδο η ανάλυση επικεντρώθηκε στη συνοριακή διέλευση των μαθητών σε σχέση με τις νοηματοδοτήσεις που καταγράφηκαν στο πρώτο επίπεδο. Στα αποτελέσματα της παρούσας εργασίας αναλύεται ένα κρίσιμο επεισόδιο από τη Β' φάση, η «αποφυγή εμποδίου», το οποίο οδήγησε στη νοηματοδότηση της έννοιας της εφαπτομένης του κύκλου από τους μαθητές.

### ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Στην κυρίως φάση της έρευνας καταγράφηκαν νοηματοδοτήσεις γεωμετρικών έννοιών και σχέσεων μέσω της ενεργοποίησης των διαδικασιών της αναγνώρισης, του συντονισμού και του αναστοχασμού κατά τη διέλευση των συνόρων από τους μαθητές, ενώ υπήρξαν και ενδείξεις μετασχηματισμού. Στην παρούσα εργασία, αναγνωρίζοντας τον

κρίσιμο ρόλο του αναστοχασμού στη σύνδεση των πρακτικών των σχολικών μαθηματικών και του χώρου εργασίας (Jurdak, 2016), αναλύουμε ένα επεισόδιο που εμπίπτει στον παραπάνω μηχανισμό.

Η «Αποφυγή εμποδίου» υπήρξε ένα ανοικτό πρόβλημα γεωμετρικής φύσης για τους μαθητές. Πηγή έμπνευσης της δραστηριότητας αποτέλεσε η αυθεντική πρακτική που ακολουθεί ο επαγγελματίας, σύμφωνα με την οποία χαράζει δύο εφαπτόμενες (από το σημείο εκκίνησης και το σημείο προορισμού) προς ένα νοητό κύκλο γύρω από το εμπόδιο ακτίνας δύο ναυτικών μιλίων. Οι μαθητές κλήθηκαν να χαράξουν τη νέα πορεία, χωρίς να γνωρίζουν την τυπική πρακτική του επαγγελματία. Η διατύπωση του προβλήματος αλλά και το πλαίσιο αναφοράς δεν ήταν ίδια με αυτά που συναντάμε στην τυπική μαθηματική εκπαίδευση. Το πρόβλημα έδρασε ως διασυνοριακό αντικείμενο. Αφενός, για τον χώρο εργασίας, αποτελεί μια σαφή, δομημένη διαδικασία, αφετέρου, χαρακτηρίζεται από ερμηνευτική ευελιξία όσον αφορά τους μαθητές και τα τυπικά μαθηματικά.

Στη διάρκεια της δραστηριότητας ο εκπαιδευτικός υιοθέτησε το ρόλο του παρατηρητή, θέτοντας διευκρινιστικά ερωτήματα όπου έκρινε απαραίτητο. Ο επαγγελματίας λειτούργησε ως κριτής της ορθότητας των προτεινόμενων λύσεων. Η δραστηριότητα λειτούργησε και για τον ίδιο αναστοχαστικά, καθώς συνέκρινε την ακρίβεια της δικής του λύσης σε σχέση με αυτής των μαθητών. Επίσης, αξίζει να επισημάνουμε ότι στη δραστηριότητα αυτή οι μαθητές χρησιμοποίησαν τα κύρια εργαλεία του πλοιάρχου, το διπαράλληλο και τον ναυτικό διαβήτη. Ο διπαράλληλος κανόνας αποτελείται από δύο ίσους κανόνες ενωμένους έτσι ώστε να πλησιάζουν και να απομακρύνονται ο ένας από τον άλλο, διατηρώντας πάντα παράλληλη θέση μεταξύ τους. Χρησιμοποιήθηκε για τη χάραξη ευθειών και την παράλληλη μεταφορά τους. Ο ναυτικός διαβήτης (κουμπάσο) διαφέρει από τον κοινό σχολικό διαβήτη. Τα δύο μεταλλικά σκέλη του έχουν μεγαλύτερο μήκος και καταλήγουν και τα δύο σε οξείες αιχμές. Χρησιμοποιήθηκε για τη μέτρηση και σύγκριση αποστάσεων.

Παρατηρώντας στρατηγικές που εφάρμισαν οι μαθητές καταγράψαμε τρεις κανόνες που τις επηρεάζουν και δεν ανήκουν υποχρεωτικά όλες στην τυπική μαθηματική εκπαίδευση. Αρχικά, οι μαθητές έδρασαν υπακούοντας τους κανόνες των τυπικών μαθηματικών, καθώς ακόμα δεν έχουν διέλθει τα σύνορα των δύο συστημάτων αλλά δρουν ακολουθώντας τις νόρμες των σχολικών μαθηματικών. Συγκεκριμένα, υπακούοντας την ανάγκη της ακρίβειας, χάραξαν κύκλο γύρω από το εμπόδιο προκειμένου να οριοθετηθεί το επικίνδυνο τμήμα. Η κίνηση

αυτή των μαθητών αποτέλεσε τη μόνη διαφοροποίησή τους από την πρακτική του επαγγελματία.



**Εικόνα 2: Πρώτη λύση, δεν ικανοποιεί το κριτήριο της ασφάλειας.**

Στο πλαίσιο της αναζήτησης λύσεων ανέκυψε η ανάγκη οι μαθητές να λάβουν υπόψη τους κανόνες του χώρου εργασίας. Γρήγορα απέρριψαν την πρώτη λύση που παρουσίασαν καθώς δεν ικανοποιούσε τον περιορισμό της ασφάλειας, απόσταση 2 ν. μ. από το εμπόδιο σε όλο το μήκος της διαδρομής (εικόνα 2). Από την πρώτη λύση, οι μαθητές είχαν χρησιμοποιήσει εφαπτόμενο τμήμα στον κύκλο, χωρίς όμως να κάνουν κάποια αναφορά στον όρο.

- M1: Θα πέσει πάλι πάνω στη βραχονησίδα. Περνάει μέσα στο όριο. Θέλει δύο μίλια.
- M2: Κοίτα ο κύκλος είναι εδώ, το βλέπεις; (Δείχνει, με το διπαράλληλο, στον M3 ότι το τελευταίο τμήμα της πορείας τέμνει τον κύκλο).



**Εικόνα 3: Δεύτερη λύση, δεν ικανοποιεί το κριτήριο τη συντομίας.**

Στη συνέχεια, οι μαθητές πρότειναν παραλλαγές που ικανοποιούσαν το κριτήριο της ασφάλειας. Στη φάση αυτή ενεργοποιήθηκε ο δεύτερος κανόνας του επαγγελματικού χώρου, που αφορά τη συντομία της διαδρομής. Στις λύσεις χρησιμοποιήσαν την «οριακή διέλευση» από τον κύκλο ασφαλείας, νοηματοδοτώντας την έννοια της εφαπτομένης από σημείο εκτός κύκλου. Επίσης, οι μαθητές παρατήρησαν ότι μια διαδρομή με συχνές στροφές σε γωνίες  $90^\circ$  δεν είναι φυσιολογική για ένα πλοίο, καταλήγοντας στη λύση ενός εφαπτόμενου τμήματος για την αποφυγή

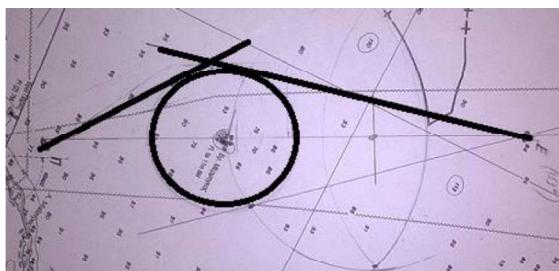
του εμποδίου (εικόνα 3). Παρατηρούμε πως πλέον οι μαθητές υιοθετώντας κανόνες του νέου συστήματος δραστηριότητας προσπαθούν να εφαρμόσουν γνώσεις και εμπειρίες τους σε ένα νέο πλαίσιο διερχόμενοι τα σύνορα μεταξύ των δύο συστημάτων.

M2: Λοιπόν, πας από εδώ - μισό να βρω την ευθεία - «τραβάς»...  
 (Προσπαθεί να φέρει εφαπτομένη στον κύκλο).

E: Τι «τραβάς»;

M1: Την εφαπτομένη.

M2: Ναι, μια που να περνάει οριακά του τόξου του κύκλου και φτάνεις μέχρι εδώ. (Δείχνει σημείο μετά το σημείο επαφής) ...



**Εικόνα 4: Τελική λύση**

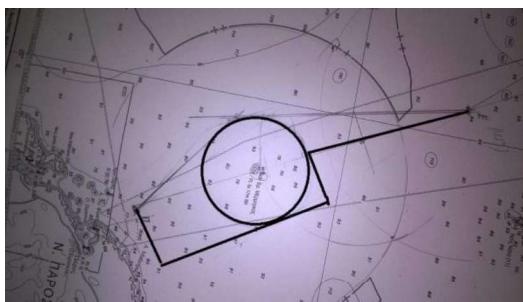
Το τελευταίο ερώτημα που τίθεται, αφορά το σημείο στροφής του πλοίου προς τον προορισμό. Επικεντρώθηκαν στην πρώτη εφαπτομένη και τον κύκλο, πράγμα που τους δυσκόλεψε στην εύρεση της λύσης. Τελικά, οι μαθητές διατύπωσαν και ενέκριναν την ιδέα το πλοίο να στρίψει στο σημείο που η δεύτερη εφαπτομένη του κύκλου, από το σημείο προορισμού, τέμνει την πρώτη. Αυτή τη φορά, η εφαπτομένη νοηματοδοτήθηκε ως η γραμμή που απέχει από τον κύκλο «ελάχιστη απόσταση». Οι εφαπτόμενες χαράχτηκαν «στο περίπου» από τους μαθητές με την καθοδήγηση του επαγγελματία, υιοθετώντας την επαγγελματική πρακτική (εικόνα 4).

M2: Να ρωτήσω κάτι; Θα ήταν λάθος να προσθέσουμε στην ακτίνα μισό μίλι;

M4: Το λιγότερο δυνατό. Λοιπόν ένα μίλι πιο πέρα...

M3: Ωραία, κάνε ακτίνα δυόμιση μίλια για να μην ξαναμπεί στον κύκλο.

M1: Να περάσει από τον κύκλο ελάχιστα. (Εννοεί μετά τη στροφή). Να είναι εφαπτόμενη. Όπα, κοίτα ξέρεις τι... αρχίζουμε από εδώ, κάνουμε μια εφαπτόμενη και βλέπουμε που ενώνονται.



**Εικόνα 5: Λύση που απορρίφθηκε ως ασύμβατη με πορεία πλοίου**

Σημαντικό ρόλο στις αποφάσεις των μαθητών έπαιξε ο χώρος εργασίας ως πλαίσιο αναφοράς καθώς εισήγαγε κανόνες, όπως η ασφάλεια και η συντομία της πορείας του σκάφους αλλά και κανόνες των τυπικών μαθηματικών που εισήγαγαν οι μαθητές χωρίς να εμφανίζονται στην καθημερινή πρακτική του επαγγελματία, όπως η ακρίβεια. Υιοθετώντας τους παραπάνω περιορισμούς και κανόνες του χώρου εργασίας οι μαθητές κατέληξαν στην επιλογή λύσης που ταυτίζεται με την επίσημη επαγγελματική πρακτική απορρίπτοντας ορθές μαθηματικά λύσεις οι οποίες ήταν ασύμβατες με το νέο πλαίσιο (εικόνα 5). Η επαγγελματική πρακτική δρώντας ως πρακτική στα σύνορα (*boundary practice*) διευκόλυνε την επικοινωνία ανάμεσα στα δύο συστήματα δραστηριότητας, αποσαφηνίζοντας τις γνώσεις και τις πεποιθήσεις που κινητοποιούνται στην πορεία ανακάλυψής της από τους μαθητές καθώς εκείνοι ενεπλάκησαν στους ορίζοντες ενός διαφορετικού από το δικό τους κόσμου μέσω της ενεργοποίησης του αναστοχασμού.

## ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Η παρούσα έρευνα στηρίχτηκε στην παραδοχή πως η ενσωμάτωση αυθεντικών καταστάσεων από τον χώρο εργασίας στη διδασκαλία των μαθηματικών μπορεί να ενισχύσει την κατανόηση μαθηματικών εννοιών από τους μαθητές και να εμπλουτίσει τη μαθηματική γνώση. Στην παρούσα εργασία εστιάσαμε στον τρόπο με τον οποίο κανόνες του χώρου εργασίας αποτέλεσαν κίνητρο οι μαθητές να διέλθουν τα γνωστικά σύνορα ανάμεσα στα σχολικά μαθηματικά και τον επαγγελματικό χώρο. Τους οδήγησαν στη νοηματοδότηση της έννοιας της εφαπτομένης κύκλου μέσω της διαδικασίας του αναστοχασμού και συγκεκριμένα της υιοθέτησης θεωρήσεων, καθώς η τελική λύση που έδωσαν ταυτίζεται με την επίσημη επαγγελματική πρακτική. Αν και η δραστηριότητα αφορούσε μια βασική, ήδη γνωστή στους μαθητές, γεωμετρική έννοια παρατηρήσαμε πως αυτοί πειραματίστηκαν με διάφορες λύσεις μέχρι να καταλήξουν στη χρήση της εφαπτομένης. Επιπλέον, οι μαθητές θεώρησαν τη λύση που δόθηκε ως τη συντομότερη διαδρομή που θα μπορούσαν να επιλέξουν αν και δεν μπορούσαν να το τεκμηριώσουν με μαθηματικά επιχειρήματα. Οι λύσεις των μαθητών επηρεάστηκαν από

την πολυπλοκότητα των δύο συστημάτων. Το νέο πλαίσιο στο οποίο εργάστηκαν με το δικό του πλαίσιο κανόνων και τις ιδιαιτερότητές του, όπως και η δράση της επαγγελματικής πρακτικής ως διασυνοριακό αντικείμενο, ήταν αυτό που βοήθησε στην ενεργοποίηση της διαδικασίας του αναστοχασμού.

Επίσης, τα ευρήματα της έρευνας υποστηρίζουν τα αντίστοιχα ευρήματα άλλων ερευνών (Pozzi et al., 1998) όσον αφορά το νόημα που αποκτά το πρόβλημα για τους μαθητές στον χώρο εργασίας, καθώς λειτουργεί ως διασυνοριακό αντικείμενο. Οι στρατηγικές επίλυσης είναι πιο πλούσιες σε νοήματα καθώς οι μαθητές, εξοικειωμένοι σταδιακά με το σύστημα του επαγγελματικού χώρου, λαμβάνουν υπόψη τους όχι μόνο την ορθότητα του μαθηματικού συλλογισμού τους αλλά και την ικανοποίηση κανόνων του χώρου εργασίας. Έτσι απέρριψαν λύσεις που δεν ικανοποιούσαν το κριτήριο της συντομίας ή αυτές στις οποίες η προτεινόμενη πορεία ήταν ασύμβατη για πλοίο.

Στο μαθηματικό Αναλυτικό Πρόγραμμα της χώρας μας η μαθηματική γνώση εμφανίζεται ασύνδετη με τον πραγματικό κόσμο. Αν και εντοπίστηκαν εφαρμογές που έχουν σαν πλαίσιο τον ναυτικό χάρτη, αυτές αποτελούν μαθηματικά προβλήματα με αναφορά στον χώρο εργασίας και όχι αυθεντικές καταστάσεις του χώρου από όπου μπορούν να αναδειχθούν μαθηματικές έννοιες. Παρόλα αυτά, όσον αφορά στις διδακτικές προεκτάσεις της έρευνας υπήρξαν ενθαρρυντικές ενδείξεις ότι η σχολική πρακτική μπορεί να κερδίσει από την εμπλοκή των μαθητών σε ρεαλιστικές καταστάσεις από χώρους εργασίας.

## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Akkerman, S. F., & Bakker, A. (2011). Boundary Crossing and Boundary Objects. *Review of Educational Research*, 81(2), 132–169
- Bakker, A., & Akkerman, S. F. (2014). A boundary-crossing approach to support students' integration of statistical and work-related knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, 86(2), 223–237.
- Charmaz, K. (2006). *Constructing grounded theory*. London ; Thousand Oaks, Calif: Sage Publications.
- Engeström, Y., Engeström, R., & Kärkkäinen, M. (1995). Polycontextuality and boundary crossing in expert cognition: Learning and problem solving in complex work activities. *Learning and Instruction*, 5(4), 319–336.
- FitzSimons, G. E., (2014). Commentary on vocational mathematics education: where mathematics education confronts the realities of people's work. *Educational Studies in Mathematics*, 86(2), 291–305.

- Jurdak, M. (2016). *Learning and Teaching Real World Problem Solving in School Mathematics*. Cham: Springer International Publishing.
- Pozzi, S., Noss, R., & Hoyles, C. (1998). Tools in practice, mathematics in use. *Educational Studies in Mathematics*, 36(2), 105–122.
- Pscharis, G. & Potari, D. (2017). Mathematics teachers' learning at the boundaries of teaching and workplace. In G. A. Stillman, W. Blum & G. Kaiser (Eds.) *International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling*. Springer Book Series.
- Star, S. L., & Griesemer, J. R. (1989). Institutional Ecology, 'Translations' and Boundary Objects: Amateurs and Professionals in Berkeley's Museum of Vertebrate Zoology, 1907-39. *Social Studies of Science*, 19(3), 387–420.
- Triantafillou, C., & Potari, D. (2010). Mathematical practices in a technological workplace: the role of tools. *Educational Studies in Mathematics*, 74(3), 27-294.