ΠΡΑΚΤΙΚΑ

7ου Πανελλήνιου Συνεδρίου της Ένωσης Ερευνητών της Διδακτικής των Μαθηματικών (Εν.Ε.Δι.Μ.)

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΓΝΩΣΗ ΚΑΙ ΔΙΔΑΚΤΙΚΕΣ ΠΡΑΚΤΙΚΕΣ

ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

1, 2 & 3 Δεκεμβρίου 2017

- ΈΝΩΣΗ ΕΡΕΥΝΗΤΩΝ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ (ΕΝ.Ε.ΔΙ.Μ.)
- ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ, ΕΚΠΑ
- ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ-ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ "ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ", ΕΚΠΑ

Επιμέλεια:
Θ. Ζαχαριάδης, Δ. Πόταρη, Γ. Ψυχάρης

Ο ΡΟΛΟΣ ΤΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ ΣΤΗ ΝΟΗΜΑΤΟΔΟΤΗΣΗ ΤΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΕΥΣΗΣ ΩΣ ΑΛΓΕΒΡΙΚΗΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ

Ζούπα Αγγελική και Ψυχάρης Γιώργος

Τμήμα Μαθηματικών, ΕΚΠΑ

mekkapsaki@math.uoa.gr, gpsych@math.uoa.gr

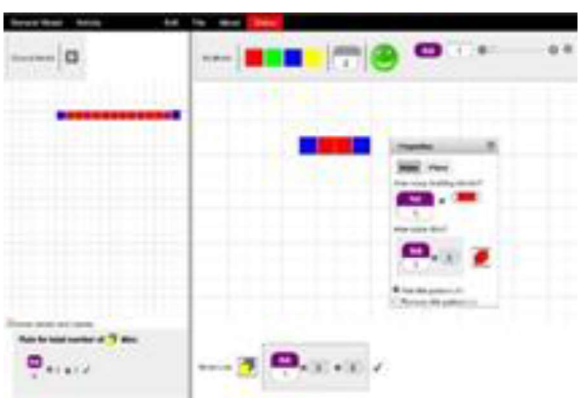
Το παρόν άρθρο παρουσιάζει αποτελέσματα έρευνας σχετικά με τη νοηματοδότηση και έκφραση σχέσεων γενίκευσης (με ή χωρίς τη χρήση συμβόλων) από μαθητές Α΄ Γυμνασίου, όταν εμπλέκονται σε διερευνητικές δραστηριότητες που βασίζονται στη χρήση κατάλληλα σχεδιασμένων ψηφιακών εργαλείων. Στα αποτελέσματα καταγράφεται ο ρόλος που παίζει ο πολυσύνθετος παράγοντας πλαίσιο, έτσι όπως το συνθέτει ο συνδυασμός ενός ψηφιακού περιβάλλοντος, μιας ρεαλιστικής διερευνητικής δραστηριότητας και των μέσων συμβολικής έκφρασης των σχέσεων γενίκευσης.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Στο παρόν άρθρο παρουσιάζουμε αποτελέσματα μιας έρευνας που στοχεύει στη διερεύνηση του ρόλου του πλαισίου, έτσι όπως αυτό συντίθεται από τον συνδυασμό ενός ειδικά σχεδιασμένου ψηφιακού περιβάλλοντος, μιας ρεαλιστικής διερευνητικής δραστηριότητας και των μέσων συμβολικής έκφρασης εντός και εκτός του ψηφιακού περιβάλλοντος (π.χ. αλγεβρικών συμβόλων, εικονικών μεταβλητών), στην πορεία νοηματοδότησης της μαθηματικής γενίκευσης από μαθητές της Α' γυμνασίου. Οι μαθητές συνεργάστηκαν σε ομάδες των τριών ατόμων χρησιμοποιώντας το διερευνητικό λογισμικό eXpresser (Noss et al., 2009) το οποίο παρέχει τη δυνατότητα κατασκευής μοτίβων με τετραγωνάκια διαφορετικών χρωμάτων. Το eXpresser επιτρέπει στους μαθητές να χρησιμοποιήσουν εικονικές μεταβλητές για να αναπαράγουν τις κατασκευές τους για διαφορετικό αριθμό επαναλήψεων, να εκφράζουν σχέσεις γενίκευσης και να ελέγχουν την ορθότητά τους μέσα από κατάλληλη ανατροφοδότηση. Η έρευνα στηρίζεται σε έναν χαρακτηρισμό της αλγεβρικής σκέψης βασισμένο στην αναλυτική της φύση και εστιάζεται στο σημειωτικό σύστημα που χρησιμοποιούν οι μαθητές για να εκφράσουν τις μεταβλητές που χειρίζονται. Η εστίαση στους σημειωτικούς τρόπους έκφρασης μας οδηγεί στο να αναγνωρίσουμε ενσώματες (embodied) μη-συμβολικές και αλφαριθμητικές προ αλγεβρικές γενικεύσεις καθώς και την εξελισσόμενη κατανόηση των μεταβλητών από τους μαθητές. Ο Radford (2010) ανέπτυξε την θεωρία της αντικειμενικοποίησης (objectification) με την οποία περιγράφει τη σημειωτική διαδικασία μετάβασης των μαθητών από τη διάκριση μιας ομοιότητας στην έκφρασή της ως σχέση γενίκευσης με περισσότερο μαθηματικοποιημένους τρόπους μέσα από τη χρήση σημείων (χειρονομιών, λέξεων, συμβόλων). Στην προσπάθειά του να μελετήσει τη συγκρότηση σχέσεων γενίκευσης από τους μαθητές ως αλγεβρική δραστηριότητα, υπέδειξε τρία χαρακτηριστικά της αλγεβρικής σκέψης: (1) την ύπαρξη αγνώστων ποσοτήτων (π.χ. μεταβλητών, παραμέτρων), (2) την ανάγκη να ονομαστούν και να συμβολιστούν αυτές οι ποσότητες με διαφορετικούς τρόπους (όχι αποκλειστικά με τη χρήση του αλγεβρικού συμβολισμού, αλλά και με αλφαριθμητικά σύμβολα, φυσική γλώσσα, κινήσεις ή συνδυασμό τους), (3) τον χειρισμό (π.χ. με πράξεις όπως πρόσθεση, πολλαπλασιασμός) των απροσδιόριστων ποσοτήτων σαν να είναι γνωστές (Radford, 2014). Ένας τρόπος να εισαχθούν οι μαθητές στην άλγεβρα είναι να αντιληφθούν ένα μοτίβο ή μια κανονικότητα και μετά να προσπαθήσουν να το εκφράσουν με μια σχέση (Mason, Graham, Pimm & Gowar 1985, p.8). Ενώ οι ερευνητές σχετίζουν την άλγεβρα με την γενίκευση, δεν έχουν τις ίδιες απόψεις για τον ρόλο των συμβόλων. Κάποιοι ερευνητές θεωρούν ότι ο αλφαριθμητικός συμβολισμός δεν αποτελεί συνθήκη για αλγεβρική σκέψη, ενώ για άλλους για να θεωρηθεί μια συμβολική δραστηριότητα ως αλγεβρική, απαιτείται συμβολισμός. Στην παρούσα έρευνα λαμβάνουμε υπόψη πρόσφατες προσεγγίσεις σύμφωνα με τις οποίες η χρήση συμβολισμού δεν αποτελεί ούτε απαραίτητη, ούτε αναγκαία προϋπόθεση για την ανάπτυξη της αλγεβρικής σκέψης (Radford, in press). Η έρευνα τονίζει τη σχέση γνωστικής λειτουργίας και πλαισίου (Cole, 1996) και, σύμφωνα με τη θεωρία της αντικειμενικοποίησης, (Radford, 2015) η γνώση μπορεί να μελετηθεί μόνο καθώς εξελίσσεται μια δραστηριότητα. Το πλαίσιο, περιλαμβάνοντας μια σειρά από δυναμικούς παράγοντες, όπως οι αλληλεπιδράσεις των μαθητών με τους συνομηλίκους, τους εκπαιδευτικούς, την τεχνολογία, το ρεαλιστικό σενάριο και τα μέσα αλγεβρικής έκφρασης, μπορεί να επηρεάσει μια διαδικασία αφαίρεσης. Ο ρόλος του πλαισίου είναι κρίσιμος για τις διαδικασίες μάθησης και η πολυπλοκότητα των μαθησιακών διαδικασιών οφείλεται, τουλάχιστον εν μέρει, στις επιρροές του πλαισίου πάνω στην κατασκευή της γνώσης του μαθητή. Ως εκ τούτου, η μελέτη του ρόλου του πλαισίου είναι πιθανό να οδηγήσει σε βαθύτερη κατανόηση των διαδικασιών μάθησης (Ben-Zvi, 2012). Οι Noss et al. (2009) τοποθετούν την αφαιρετική διαδικασία σε σχέση με τα μέσα που οι μαθητές έχουν στη διάθεσή τους. Το θεωρητικό πλαίσιο της πλαισιοθετημένης αφαίρεσης (Abstraction in Context – AiC, Hershkowitz et al., 2001) βασίζεται σε τρεις επιστημικές ενέργειες για την περιγραφή μιας αφαιρετικής διαδικασίας. Αυτές οι ενέργειες είναι η αναγνώριση, η οικοδόμηση με το εργαλείο και η κατασκευή (RBC). Η αναγνώριση μιας ήδη γνωστής μαθηματική έννοιας, διαδικασίας ή ιδέας, εμφανίζεται όταν ένας μαθητής την αναγνωρίζει ως εγγενή σε μια δεδομένη μαθηματική κατάσταση. Η οικοδόμηση με το εργαλείο αφορά τον συνδυασμό των υπαρχόντων στοιχείων γνώσης προκειμένου να επιτευχθεί ένας στόχος, όπως η επίλυση ενός προβλήματος (Dreyfus, 2010). Η κατασκευή, πραγματοποιείται μέσα από τη συναρμολόγηση ή την ενσωμάτωση στοιχείων της γνώσης για την παραγωγή μιας νέας κατασκευής. Οι μαθητές προσαρμόζουν πρακτικές από προηγούμενα πλαίσια σε νέα, δημιουργούν συνδέσεις με προηγούμενες παρόμοιες δραστηριότητες και αξιοποιούν τα εργαλεία που έχουν στη διάθεσή τους για να κατασκευάσουν νέες μαθηματικές γνώσεις. Συνοψίζοντας, στην παρούσα έρευνα μελετάμε την διαδικασία της αντικειμενικοποίησης της αλγεβρικής σκέψης των μαθητών όταν αυτοί προσπαθούν να συγκροτήσουν σχέσεις γενίκευσης για μοτίβα με ή χωρίς σύμβολα. Επειδή η θεωρία της αντικειμενικοποίησης τονίζει την σχέση μεταξύ κατασκευής της γνώσης και πλαισίου, αναλύουμε σε ένα μικρο-αναλυτικό επίπεδο τον ρόλο του τρισδιάστατου πλαισίου (ψηφιακό περιβάλλον-δραστηριότητα-διαθέσιμα μέσα συμβολικής έκφρασης) στην αφαιρετική διαδικασία αντικειμενικοποίησης των σχέσεων γενίκευσης από τους μαθητές.

ΤΟ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΟ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝ

Το eXpresser αποτελείται από δύο κύριες περιοχές: (α) μια περιοχή εργασίας (My Model, Σχ.1 δεξιά στην οθόνη) και (β) μια προβολής (Computer's Model, Σχ.1 αριστερά στην οθόνη). Στην περιοχή My Model οι μαθητές μπορούν να κατασκευάσουν επαναλαμβανόμενα μοτίβα μέσα από την επανάληψη μιας σύνθεσης από τετράγωνα διαφορετικών χρωμάτων που ονομάζεται δομική μονάδα (building block) (Σχ.1).



Σχ. 1 Μοτίβο στο eXpresser

Οι ποσότητες στο eXpresser μπορεί να είναι σταθεροί αριθμοί, που εμφανίζονται μέσα σε γκρι ορθογώνιο πλαίσιο, ή εικονικές μεταβλητές, η τρέχουσα τιμή των οποίων εμφανίζεται σε ροζ ορθογώνιο πλαίσιο. Οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα να μετατρέψουν ένα σταθερό αριθμό (γκρι πλαίσιο) σε εικονική μεταβλητή (πλαίσιο με χρώμα) 'ξεκλειδώνοντάς' τον με την εντολή Ξεκλείδωμα. Με το πάτημα του κουμπιού Play το πρόγραμμα αποδίδει τυχαίες τιμές στις εικονικές μεταβλητές που έχει ορίσει ο χρήστης. Σε αυτή την περίπτωση το μοτίβο εμφανίζεται χρωματισμένο στο My Model μόνο όταν οι μαθητές συμπληρώσουν σωστά τα ειδικά εικονίδια με '?' στις ιδιότητες του μοτίβου (Σχ.4). Σε αντίθετη περίπτωση και ως ένδειξη της ύπαρξης λάθους, το μοτίβο εμφανίζεται χωρίς χρώμα. Μια επιπλέον λειτουργία που προσφέρει η διαδικτυακή έκδοση του eXpresser είναι ότι επιλέγοντας το εικονίδιο "γρανάζι" οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα να ρυθμίσουν το "πεδίο ορισμού" της μεταβλητής και να καθορίσουν το διάστημα στο οποίο παίρνει τιμές και το βήμα μεταβολής (Σχ.2). Τέλος, το μοτίβο στο Computer's Model χρωματίζεται όταν συμπληρωθεί σωστά με χρήση μεταβλητής το κάθε «?» στον πίνακα των ιδιοτήτων. Αυτό που συμβαίνει όταν οι μαθητές βρουν τον γενικό κανόνα στο Model Rule είναι το πρόσωπο που βρίσκεται πάνω στο κεντρικό πλαίσιο εργαλείων να γίνει πράσινο και χαμογελαστό.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ

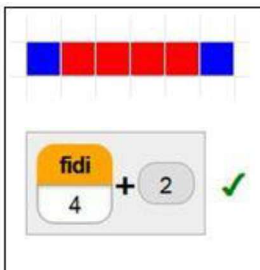
Οι δραστηριότητες των παρεμβάσεων αναπτύχθηκαν σε τρεις φάσεις. Είχαν ως κοινό γνώμονα ένα ρεαλιστικό πλαίσιο, ήταν βασισμένες σε κάποιο μοτίβο και δημιουργούσαν την ανάγκη της χρήσης του λογισμικού για την σύλληψη και γενίκευση της αλγεβρικής έκφρασης των μοτίβων. Στην πρώτη φάση οι μαθητές ανέλαβαν τον ρόλο ενός Ερπετολόγου μελετώντας την ανάπτυξη φιδιών, τα οποία παρέπεμπαν σε απλά γραμμικά μοτίβα. Η δεύτερη φάση αφορούσε την οργάνωση χώρων εστίασης με στόχο την κατάλληλη τοποθέτηση καλεσμένων. Αρχικά με χειραπτικά μέσα διερεύνησαν ένα πρόβλημα 38 ατόμων και στη συνέχεια μέσω του λογισμικού τα 132 άτομα οδηγούμενοι σε ένα πιο σύνθετο γραμμικό μοτίβο ενωμένων τραπεζιών. Στην τρίτη φάση οι μαθητές ως κατασκευαστές πισίνας έπρεπε να μελετήσουν μοτίβα δευτέρου βαθμού μεταβαίνοντας έτσι από την γραμμική, στην πολλαπλασιαστική δόμηση ενός μοτίβου. Πιο συγκεκριμένα η δραστηριότητα του επεισοδίου που αναλύεται στα αποτελέσματα αφορά την πρώτη φάση, όπου οι μαθητές ανέλαβαν να μελετήσουν τον ρυθμό ανάπτυξης του πύθωνα της Βιρμανίας, ο οποίος ζει 25 χρόνια και το μήκος του φτάνει τα 6 μέτρα, με σκοπό την παραγγελία κατάλληλου μεγέθους κλουβιού. Οι μαθητές κλήθηκαν να κατασκευάσουν στο λογισμικό eXpresser ένα απλό μοτίβο που θα αναπαριστούσε το φίδι σε οποιονδήποτε μήνα της ζωής του. Στη συνέχεια οι μαθητές έπρεπε να φανταστούν ότι το παράθυρο του eXpresser με το πλέγμα είναι το κλουβί του φιδιού και να κατασκευάσουν ένα πιο σύνθετο μοτίβο το οποίο θα αναπαριστούσε το φίδι κουλουριασμένο. Τέλος, δόθηκε στους μαθητές ένα έτοιμο κατασκευασμένο μοτίβο, το οποίο αναπαριστούσε τον ρυθμό ανάπτυξης της αιγυπτιακής Cobra και οι μαθητές έπρεπε παρατηρώντας το να ανακαλύψουν τον αλγεβρικό τύπο. Ο γενικός στόχος μας ήταν μέσα από την ενασχόληση με τα μοτίβα οι μαθητές να οδηγηθούν στη λύση του αρχικού προβλήματος διερευνώντας τη σχέση των συνολικών τετραγώνων του μοτίβου με την ηλικία του φιδιού.

ΜΕΘΟΔΟΣ

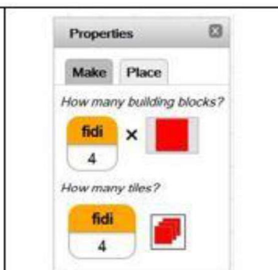
Στην έρευνα συμμετείχαν συνολικά 18 μαθητές της Α' Γυμνασίου ενός δημοσίου γυμνασίου της Αθήνας. Οι μαθητές εργάστηκαν σε ομάδες των τριών για 6 δίωρες παρεμβάσεις σε διάστημα 2 μηνών ανά βδομάδα. Μετά την αποπεράτωση των δραστηριοτήτων η κάθε ομάδα συμμετείχε σε συνέντευξη διάρκειας 1 ώρας με σκοπό την περαιτέρω κατανόηση και ανάλυση των τρόπων με τους οποίους νοηματοδοτήθηκε η αλγεβρική σκέψη μέσα από ενσώματους, μη-συμβολικούς ή συμβολικούς τρόπους επηρεασμένοι από το τρισυπόστατο πλαίσιο. Η ακολουθούμενη μέθοδος αντιστοιχεί σε έρευνα σχεδιασμού (Cobb et al., 2003). Καθώς γνωρίζαμε ότι η επαφή των μαθητών με μοτίβα ήταν από ανύπαρκτη έως αποσπασματική μέχρι εκείνη τη στιγμή, αναμέναμε να δούμε αν και με ποιο τρόπο η αλληλεπίδρασή τους με τα πλαίσια, του λογισμικού, του σεναρίου και των αλγεβρικών συμβόλων, θα επηρέαζε τα νοήματα που θα δημιουργούσαν για τη γενίκευση. Η συλλογή δεδομένων έγινε με τη βοήθεια ψηφιακού μαγνητόφωνου και κάμερας. Για την ανάλυση των δεδομένων απομαγνητοφωνήθηκαν κομμάτια διαλόγων των μαθητών. Μονάδα ανάλυσης αποτέλεσε το θεματικό επεισόδιο, το οποίο ορίστηκε ως ένα απόσπασμα διαλόγων και δράσεων των μαθητών γύρω από την νοηματοδότηση και έκφραση σχέσεων γενίκευσης (εντός ή εκτός του ψηφιακού περιβάλλοντος). Σε πρώτο επίπεδο, τα επεισόδια αναλύθηκαν μέσα από μικρο-γενετική ανάλυση (Sullivan, 2015) έτσι ώστε να αναδυθεί η εξέλιξη των εννοιολογικών δράσεων των μαθητών κατά την αλληλεπίδρασή τους με διαφορετικές πτυχές του πλαισίου (ψηφιακά εργαλεία, δραστηριότητα, μέσα συμβολικής έκφρασης σχέσεων γενίκευσης). Σε δεύτερο επίπεδο, έγινε ανάλυση των επεισοδίων με βάση το πλαίσιο της πλαισιοθετημένης αφαίρεσης ώστε να φωτιστεί η διαδικασία νοηματοδότησης των σχέσεων γενίκευσης ως αφαιρετική διαδικασία. Στο παρόν άρθρο αναλύουμε ένα επεισόδιο από την συνέντευξη μιας ομάδας 3 μαθητών, και είναι ενδεικτικό της μεθόδου ανάλυσης που θα εξαπλωθεί στο σύνολο των δεδομένων.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

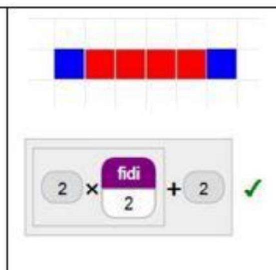
Το επεισόδιο αυτό έλαβε χώρα κατά την διάρκεια της συνέντευξης μιας ομάδας μαθητών (ομάδα 1), αφού είχαν ολοκληρωθεί οι παρεμβάσεις. Σκοπός της συνέντευξης ήταν να μελετηθεί σε βάθος ο τρόπος με τον οποίο απάντησαν οι μαθητές στα ερωτήματα των φύλλων εργασίας, πώς νοηματοδότησαν τα σύμβολα καθώς και να εξηγήσουν με ποιον τρόπο έφτασαν στην κατασκευή του αλγεβρικού τύπου. Στο συγκεκριμένο επεισόδιο οι μαθητές έπρεπε να κατασκευάσουν στο λογισμικό το μοτίβο ενός φιδιού θεωρώντας ότι το ένα τετράγωνο αντιστοιχεί σε 1 cm. Σύμφωνα με τις οδηγίες το φίδι κάθε μήνα θα αναπτυσσόταν κατά 2 cm. Παραδείγματα ερωτήσεων: Πόσα κόκκινα τετράγωνα θα έχει το μοτίβο όταν το φίδι θα είναι 5 μηνών; (αντίστοιχα για 10, 25, 100). Περιγράψτε με απλά λόγια πως δουλεύει το μοτίβο κάθε μήνα. Περιγράψτε με αλγεβρικό τύπο πόσα κόκκινα εικονίδια εμφανίζονται κάθε μήνα. Οι μαθητές αντίστοιχα απάντησαν ότι επειδή κάθε μήνα το φίδι μεγαλώνει 2 cm, για τους 5 μήνες πρέπει να κάνουμε την πράξη 2x5, για τους 10, 2x10 και ούτω καθεξής 2x25 και 2x100. Εξήγησαν ότι στους 5 μήνες μέτρησαν ένα-ένα τα κόκκινα τετράγωνα στο λογισμικό για επιβεβαίωση αλλά στα υπόλοιπα ερωτήματα όχι. Η γενίκευσή τους σε αυτό το σημείο έχει όνομα, πλέον όχι αλγεβρικό αλλά αριθμητικό, όπως και η απάντησή σχετικά με την περιγραφή της διαδικασία του μοτίβου "αυξάνεται κατά 2". Στη συνέχεια η απάντηση των μαθητών όσον αφορά τον αλγεβρικό τύπο για το μοτίβο ήταν "x+2". Φαινομενικά θα μπορούσε κανείς να τον θεωρήσει λάθος, ωστόσο η κουβέντα που ακολούθησε με σκοπό την αιτιολόγηση της επιλογής των συμβόλων σε συνδυασμό με την κατασκευή του μοτίβου στο λογισμικό παρουσίασε μεγάλο ενδιαφέρον. Αρχικά οι μαθητές αναγνώρισαν ότι το μοτίβο αποτελείται από 2



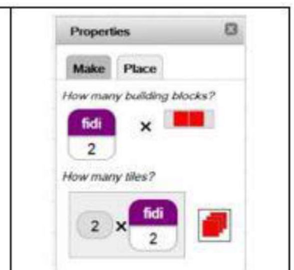
Σχ. 3 Μοτίβο ομάδα 1



Σχ. 4 Ιδιότητες μοτίβου ομάδα 1

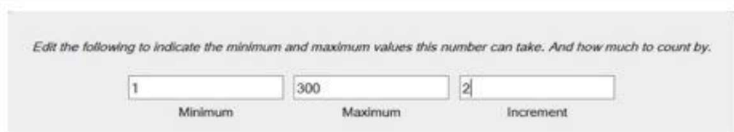


Σχ. 5 Μοτίβο ομάδα 2



Σχ. 6 Ιδιότητες μοτίβου ομάδα 2

σταθερά μπλε τετράγωνα τα οποία αφορούσαν το κεφάλι και την ουρά του φιδιού και στη συνέχεια πέρασαν στην κατασκευή της δομικής μονάδας του σώματος του φιδιού, η οποία θα έπρεπε να αυξάνεται ανά 2 κόκκινα τετράγωνα κάθε μήνα. Οι μαθητές μεταφέροντας ένα κόκκινο τετράγωνο στο My Model ξεκλείδωσαν τον αριθμό των επαναλήψεων δημιουργώντας έτσι μια (κίτρινη) εικονική μεταβλητή (Σχ. 4) την οποία στη συνέχεια έσπευσαν να την ρυθμίσουν από το γρανάζι εμφανίζοντας το παράθυρο της εικόνας του Σχ.2. Στο πρώτο κενό που αφορά το κατώτατο όριο της μεταβλητής έβαλαν τον αριθμό 2, επιχειρηματολογώντας ότι έτσι κι αλλιώς το φίδι όταν γεννιέται είναι 2 cm, στο δεύτερο κενό που αφορά το ανώτατο όριο της μεταβλητής



Σχ. 2 Ρυθμίσεις εικονικής μεταβλητής ομάδα 1

συμπλήρωσαν 300, γιατί η εκφώνηση λέει ότι το φίδι αναπτύσσεται για 25 χρόνια και φτάνει τα 6 μέτρα και τέλος στο τρίτο κενό που αφορούσε το βήμα της μεταβλητής έβαλαν 2, γιατί κάθε μήνα αναπτύσσεται ανά 2. Στη συνέχεια οι μαθητές για τον σωστό χρωματισμό των κόκκινων τετραγώνων έσυραν την ίδια κίτρινη εικονική μεταβλητή (Σχ.4) και στη συνέχεια συμπληρώνοντας το Model Rule (Σχ.3) πρόσθεσαν τον σταθερό αριθμό 2 στην εικονική μεταβλητή η οποία εξέφραζε τα 2 μπλε σταθερά τετράγωνα. Αυτή η μη αναμενόμενη ρύθμιση της μεταβλητής από το γρανάζι ενώ από τη μία αφομοίωσε εξολοκλήρου τους περιορισμούς του ρεαλιστικού πλαισίου, άλλαξε από την άλλη το πεδίο ορισμού της μεταβλητής με αποτέλεσμα την διαφορετική συμβολική γενίκευση από τους μαθητές x+2.

11 Ερευνητής: Εδώ στον μαθηματικό τύπο μου έχετε συμπληρώσει x+2. Τι σημαίνει για σας αυτός ο τύπος;

12 Μαθητής1: x είχαμε βάλει το σώμα και 2 το κεφάλι με την ουρά

13 Ε: Άρα το x αφορά τα κόκκινα και το 2 τα μπλε.

14 Μ1: Ναι για την ουρά και το κεφάλι (Recognising)

15 Ε: Άρα αυτός ο τύπος θα μας βόλευε για να απαντήσουμε το φύλλο εργασίας; Δηλαδή σου λέει για τους 5 μήνες τι θα έλεγες;

16 Μ1: 5 επί 2

17 Ε: Εδώ λέει +2 πάντως

18 Μ1: Το x εκεί ουσιαστικά δεν θα βοήθαγε πολύ γιατί εκεί σου λέει τι υπάρχει ήδη στο μοτίβο και αν δεν ξέρεις τα κόκκινα δεν μπορείς να το βρεις και πολύ εύκολα. Άρα αυτό το x είναι για τα κόκκινα και εκφράζει ουσιαστικά αυτό που είναι ήδη έτοιμο. Για τους μήνες…Μάλλον…ναι 2 επί

μήνες ουσιαστικά, γιατί είναι 2 πόσοι είναι επί μήνες και ναι ουσιαστικά το x αν θες να βοηθήσει θα πρέπει το x να εκφράζει για τους μήνες *(Building-with)*

Στον παραπάνω διάλογο τα αποτελέσματα μας δίνουν μια σημειωτική κατασκευή η οποία μας αποκαλύπτει έναν μηχανισμό, όπου το κάθε σύμβολο έχει το δικό του νόημα. Ένα νόημα το οποίο δεν μπορεί να περιοριστεί αποκλειστικά σε ένα πλαίσιο. Με μικρο-γενετική ανάλυση μπορούμε να οργανώσουμε τα νοήματα σε 4 επίπεδα διαφορετικών πλαισίων (Σχ.7). Το πρώτο πλαίσιο είναι αυτό όπου τα σύμβολα αναφέρονται στο πλαίσιο του φιδιού ενός πραγματικού κόσμου, στο δεύτερο τα σύμβολα αναφέρονται σε ένα φίδι που ζει στο λογισμικό, στο τρίτο πλαίσιο αποκτούν αλγεβρικές ιδιότητες που τις καθορίζει το λογισμικό και τέλος στο τέταρτο τα σύμβολα έχουν μόνο αλγεβρική υπόσταση. Για παράδειγμα όταν οι μαθητές χρησιμοποιούν το x αναφέρονται στο σώμα φιδιού ενώ με τον αριθμό 2 στο κεφάλι και ουρά αντίστοιχα. Στη συνέχεια το ίδιο x μέσα στο λογισμικό αποτελεί το σύνολο των κόκκινων τετραγώνων. Μάλιστα μετά από ερώτηση του ερευνητή, αν αυτός ο τύπος μπορεί να μας βοηθήσει να υπολογίσουμε τα κόκκινα τετράγωνα σε σχέση με τους μήνες ζωής του φιδιού, οι μαθητές αντιλαμβάνονται ότι αυτή η μεταβλητή δεν μπορεί να ενσαρκώσει αυτή τη λειτουργία και για να μπορεί να μετατραπεί σε μεταβλητή που αναφέρεται σε μήνες πρέπει να γίνει 2*x. Στη συνέχεια του επεισοδίου ο ερευνητής τους παρουσιάζει ένα μοτίβο που έφτιαξε μια άλλη ομάδα (ομάδα 2) με διαφορετικό τρόπο (Σχ.6) χωρίς να πειράξει τις ρυθμίσεις από το γρανάζι με αποτέλεσμα η εικονική μεταβλητή να παίρνει τιμές όλους τους θετικούς ακέραιους και όχι μόνο τους ζυγούς όπως πριν.

26 Μ1: Ναι αυτό στην ουσία δίνει τιμή που εκφράζει για τον ένα μήνα… αν αυτοί που κάνανε έτσι δεν κάνανε το επί 2 θα λέγανε μόνο για το μισό μήνα ουσιαστικά, αλλά κάνανε επί 2 δείχνει για όλο το μήνα, άρα δείχνανε ουσιαστικά το μισό μέρος του φιδιού, άρα το κάνουμε επί 2 για να βρούνε το ολόκληρο *(Recognising)*

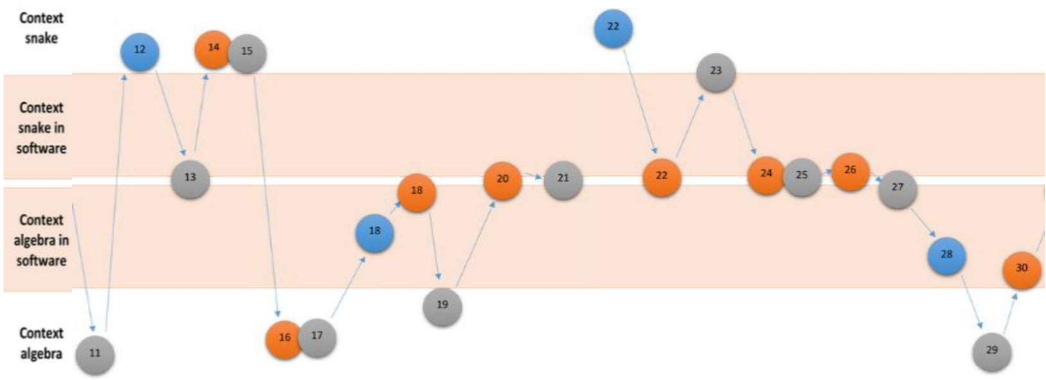
27 Ε: Άρα όταν είναι στο 2 μας δείχνει πόσο θα είναι στους 2 μήνες. Επομένως εδώ ο τύπος που βλέπετε πως θα ήτανε;

28 Μ2: 6 νομίζω, 2 επί 2 συν 2 *(Building-with)*

29 Ε: Και με κάποιο σύμβολο τι θα λέγατε;

30 Μ1: 2 επί x + 2, γιατί το x εδώ εκφράζει κάτι διαφορετικό από το δικό μας. Είναι οι μήνες *(Construction)*

Οι μαθητές (ομάδα 1) παρατηρώντας το μοτίβο της άλλης ομάδας (ομάδα 2) αναγνωρίζουν ότι τώρα το σύμβολο x ταυτόχρονα αναφέρεται σε κόκκινα τετράγωνα και σε μήνες ζωής του φιδιού, για αυτό και βρίσκεται ακριβώς στη μέση δύο διαφορετικών επιπέδων στο Σχ.7. Έχοντας ταυτίσει την εικονική μεταβλητή του λογισμικού με το σύμβολο x,



Σχ. 7 Μικρο-γενετική ανάλυση επεισοδίου ομάδας 1. Με γκρι είναι ο Ερευνητής, πορτοκαλί ο μαθητής 1 και μπλε ο μαθητής 2

αμέσως μεταφράζουν αυτό που βλέπουν στην οθόνη (Σχ.5) σε αλγεβρικό τύπο, που όμως για αυτούς δεν είναι απλά αλγεβρικά σύμβολα, αλλά σύμβολα με συγκεκριμένα νοήματα. Τα ίδια σύμβολα εμπεριέχουν νοήματα στο ρεαλιστικό πλαίσιο, στο πλαίσιο του λογισμικού σε συνδυασμό με το ρεαλιστικό και στο πλαίσιο του λογισμικού σε συνδυασμό με την άλγεβρα.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ

Τα αποτελέσματα της ανάλυσης δείχνουν πως ο κλασικός διαχωρισμός του πλαισίου από τα δεδομένα παρουσιάζει μόνο μια μερική εικόνα της πολύπλοκης διαδικασίας της αλγεβρικής σκέψης. Κατά την διαδικασία κατασκευής νοημάτων, οι μαθητές συμμετέχουν σε πολλές δραστηριότητες συναφείς με το περιβάλλον του λογισμικού, όπως για παράδειγμα, το να προβάλουν τις αφαιρετικές τους κατασκευές μέσα από ένα φίδι που αναπτύσσεται σε τετράγωνα και χρησιμοποιώντας τες για να υποστηρίξουν τα συμπεράσματά τους, να αναπτύξουν τις νοηματοδοτήσεις τους. Για πρώτη φορά, οι μαθητές αναγνωρίζουν γλωσσολογικά τις μεταβλητές με σαφήνεια. Αυτό είχε ως αποτέλεσμα οι γενικεύσεις που παρήγαγαν να είναι πολύ πιο εκλεπτυσμένες, καθώς το αλγεβρικό σύμβολο x ήταν ταυτόχρονα σώμα φιδιού, διαδικασία διπλασιασμού κόκκινων τετραγώνων και μήνες. Βλέπουμε λοιπόν ότι το ρεαλιστικό πλαίσιο της δραστηριότητας διαδραματίζει σημαντικό ρόλο στις επεξηγήσεις των μαθητών, καθώς συγκρίνουν τα αποτελέσματα με τις προηγούμενες γνώσεις και προσδοκίες τους και προσπαθούν να βρουν αιτίες και νόημα για τα φαινόμενα και τα δεδομένα που ερευνούν ώστε να επικυρώσουν τον αλγεβρικό τους τύπο. Πιο συγκεκριμένα, μέσα από την σύγκριση του μοτίβου τους με το μοτίβο μιας άλλης ομάδας οι μαθητές αναγνώρισαν τον διαφορετικό τρόπο ερμηνείας του συμβόλου x που έδωσαν οι ίδιοι και ήταν σε θέση να τον αιτιολογήσουν με εμπιστοσύνη. Χρησιμοποιήσαμε μια μικρογενετική ερμηνευτική ανάλυση για να προσδιορίσουμε, να αναλύσουμε και να συζητήσουμε το ρόλο του πλαισίου στις αναδυόμενες αλγεβρικές αντιλήψεις των μαθητών καθώς ανέπτυξαν τις ιδέες και τις δεξιότητές τους. Αυτή η μελέτη παρέχει ορισμένες αρχικές ενδείξεις ότι οι επεξηγήσεις των μαθητών, όταν επιλύουν ή διερευνούν ένα ρεαλιστικό πρόβλημα, μερικές φορές ενσωματώνονται όχι αποκλειστικά στην αλγεβρική σφαίρα ή στην σφαίρα του πλαισίου αλλά μάλλον σε έναν συνδυασμό των δύο όπου η καθεμιά δεν διακρίνεται εύκολα από την άλλη. Ο συνδυασμός ρεαλιστικού πλαισίου και του λογισμικού φάνηκε να εμπλουτίζει τον τρόπο κατασκευής γνωστικών δομών. Η δυνατότητα πρόσβασης στη δομή των μοτίβων μέσω των προσφερόμενων συμβολικών και εικονικών αναπαραστάσεων του eXpresser φάνηκε να ευνόησε την εννοιολογική εμπλοκή των μαθητών σε αφαιρετικές διαδικασίες για έκφραση σχέσεων γενίκευσης. Συγκεκριμένα, ο ρόλος της μεταβλητής στην γενίκευση ήρθε στην επιφάνεια μέσα από το λογισμικό το οποίο έδινε τυχαίες τιμές στην εικονική μεταβλητή. Το σύμβολο x συνδέθηκε άμεσα από τους μαθητές με την εικονική μεταβλητή και αφορούσε το πλήθος των κόκκινων τετραγώνων σε σχέση με την ηλικία του φιδιού, ενώ οι πολλαπλές και αλληλοσυνδεόμενες αναπαραστάσεις του expresser φάνηκε να περιγράφουν για τους μαθητές μια μαθηματική πραγματικότητα.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ben-Zvi, D. (2010). The role of context in the development of students' informal inferential reasoning. In C. Reading (Ed.), *Data and context in statistics education: Towards an evidence-based society. Proceedings of the 8th International Conference on Teaching Statistics*. Ljubljana, Slovenia.

Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R., Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational Researcher*, 32, 1: 9 – 13.

Cole, M. (1996) *Culture in mind*. Cambridge, MA: Harvard Univ. Press.

Dreyfus, T. (2010). Interacting parallel constructions of knowledge in a CAS context. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *15*(2), 129–149.

Hershkowitz, R., Schwarz, B. B., & Dreyfus, T. (2001). Abstraction in context: Epistemic actions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 22, 195-222.

Mason, J., Graham, A., Pimm, D., & Gowar, N. (1985). *Routes to/roots of algebra*. Walton Hall, Milton Keynes: The Open University Press.

Noss, R., Hoyles, C., Mavrikis, M., Geraniou, E., Gutierrez-Santos, S. & Pearce, D. (2009). Broadening the sense of 'dynamic': a microworld to support students' generalization. *ZDM, 41*(4), *4*93-503.

Radford, L. (2014). The progressive development of early embodied algebraic thinking. *Mathematics Education Research Journal*, *26*(2), 257-277.

Radford, L. (2015). Methodological aspects of the theory of objectification. *Perspectivas da Educação Matemática,* 8, 547-567.

Radford, L. (to appear). The emergence of symbolic algebraic thinking in primary school. In C. Kieran (Ed.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5 to 12-year-olds: The global evolution of an emerging field of research and practice*. New York: Springer.

Sullivan, F. (2015). Microgenetic Learning Analytics: A computational approach to research on student learning. *Annual meeting of the American Educational Research Association,* Chicago, IL, April 16 – 20, 2015.