



8^ο Πανελλήνιο Συνέδριο της Ένωσης Ερευνητών της
Διδακτικής των Μαθηματικών (Εν.Ε.Δι.Μ.)

Σύγχρονες Προσεγγίσεις στη Διδασκαλία των Μαθηματικών

6 – 8 Δεκεμβρίου, 2019

Πανεπιστήμιο Κύπρου, Λευκωσία, Κύπρος

ΠΡΑΚΤΙΚΑ

Επιμελητής

Κωνσταντίνος Χρίστου

ISBN: 978-9925-580-79-8

Copyright © 2019 ΕΝΕΔΙΜ & ΣΥΓΓΡΑΦΕΙΣ

Τεχνική Επιμέλεια: Νάγια Μαυρή

**ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΤΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ ΣΤΗΝ ΠΡΩΤΟΒΑΘΜΙΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΜΕ ΤΗ ΧΡΗΣΗ
ΨΗΦΙΑΚΩΝ ΕΡΓΑΛΕΙΩΝ: ΜΕΛΕΤΗ ΤΟΥ ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΥ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΥ ΚΑΙ ΤΗΣ
ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΗΣ ΓΝΩΣΗΣ ΜΙΑΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΥ**

Κατσομήτρος Σωτήριος, Ψυχάρης Γιώργος

ΕΚΠΑ

sotkatso@gmail.com, gpsych@math.uoa.gr

Σκοπός της παρούσας έρευνας ήταν η μελέτη του διδακτικού σχεδιασμού που βασίστηκε στην χρήση ψηφιακών εργαλείων, της πρακτικής και της εξέλιξης της επαγγελματικής γνώσης μιας εκπαιδευτικού της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης εντός του ερευνητικού προγράμματος PREMaTT, το οποίο εστιάζει στις πηγές και στον συνεργατικό σχεδιασμό εκπαιδευτικών πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης για την εισαγωγή της άλγεβρας στην διδασκαλία. Η εκπαιδευτικός ενδυνάμωσε την τεχνολογική γνώση που ήδη είχε, καταλήγοντας στο ανώτερο επίπεδο γνώσης TPACK μέσω του προβληματισμού της ότι η τεχνολογία από μόνη της ίσως δεν είναι αρκετή για την μετάβαση από την αριθμητική στην άλγεβρα.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Η παρούσα έρευνα έλαβε χώρα στο πλαίσιο της εφαρμογής του ερευνητικού προγράμματος PREMaTT¹ στην Ελλάδα, του οποίου σκοπός ήταν η επαγγελματική ανάπτυξη των εκπαιδευτικών των μαθηματικών της πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης μέσα από τον συνεργατικό σχεδιασμό πηγών για την εισαγωγή της άλγεβρας στην αντίστοιχη βαθμίδα τους. Ως εκ τούτου, συγκροτήθηκε μια ομάδα συνολικά 9 Ελλήνων εκπαιδευτικών πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης για ένα ακαδημαϊκό έτος στο τμήμα Μαθηματικών του ΕΚΠΑ, η οποία θεωρούμε ότι αποτέλεσε μια κοινότητα πρακτικής (community of practice) (Wenger, 1999).

Αναλυτικότερα, η παρούσα έρευνα επικεντρώνεται στην μελέτη του διδακτικού σχεδιασμού, της πρακτικής και της εξέλιξης της επαγγελματικής γνώσης μιας εκπαιδευτικού της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης (της Ελένης) που συμμετέχει στο PREMaTT μέσα από την πορεία της στον κύκλο: συναντήσεις επαγγελματικής ανάπτυξης - σχεδιασμός - εφαρμογή - αναστοχασμός. Ιδιαίτερα, επιχειρούμε να καλύψουμε το κενό αντίστοιχων ερευνών που εστιάζουν στον διδακτικό σχεδιασμό και στις «πηγές» (resource) των εκπαιδευτικών για την εισαγωγή της άλγεβρας στην διδασκαλία (Britt & Irwin, 2011). Σε συμφωνία με άλλους ερευνητές (Gueudet & Trouche, 2009) υιοθετούμε την οπτική ότι η μελέτη τόσο των «πηγών» του διδακτικού σχεδιασμού όσο και των διδακτικών αποφάσεων των εκπαιδευτικών προσφέρονται για την κατανόηση ζητημάτων μάθησης αλλά και του ρόλου της τεχνολογίας στην εισαγωγή της άλγεβρας στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση.

Στον ερευνητικό χώρο της διδακτικής των μαθηματικών δεν υπάρχει ένας κοινός αποδεκτός ορισμός της έννοιας «πηγής». Οι Gueudet και Trouche (2009) κάνουν λόγο για ένα «σύνολο πηγών» (ψηφιακών και μη-ψηφιακών εργαλείων) του εκπαιδευτικού, το οποίο περιλαμβάνει υλικές και μη πηγές (π.χ. αρχεία λογισμικού, συζητήσεις εκπαιδευτικών). Αυτό το «σύνολο πηγών» για συγκεκριμένες καταστάσεις μετασχηματίζεται σε «μονάδα διδασκαλίας» (document), η οποία θεωρείται ως σύνθεση: της «πηγής», του ορατού τρόπου χρήσης (usages) της και της μη ευθέως εκφραζόμενης γνώσης (κρυφή γνώση) του εκπαιδευτικού που ονομάζεται λειτουργική σταθερά (operational invariant). Παράλληλα, οι Gueudet και Trouche (2009) νοηματοδοτούν ευρύτερα την έννοια της επαγγελματικής ανάπτυξης του εκπαιδευτικού ως επαγγελματική αλλαγή, η οποία συνδέεται στενά με τις γνώσεις και πεποιθήσεις του, υποστηρίζοντας ότι η επαγγελματική εξέλιξη του επηρεάζεται από τη συνεργασία του με συναδέλφους στο πλαίσιο κοινοτήτων.

Διερευνώντας τον τρόπο εισαγωγής της άλγεβρας στην ελληνική πρωτοβάθμια εκπαίδευση, στο κυρίαρχο Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών των Μαθηματικών (ΔΕΠΠΣ-ΑΠΣ, 2003) ο όρος «άλγεβρα» δεν αναφέρεται πουθενά. Πρώτη επίσημη αναφορά σε αλγεβρικές έννοιες πραγματοποιείται μόνο στην ενότητα των εξισώσεων της Στ' Δημοτικού, όπου η μεταβλητή εμφανίζεται ως ένας συγκεκριμένος άγνωστος αριθμός (χ). Ωστόσο, ορισμένες δραστηριότητες των σχολικών εγχειριδίων μικρότερων τάξεων εμφανίζουν στοιχεία προ-αλγεβρικού περιεχομένου.

Από τα παραπάνω κατανοούμε τον κρίσιμο ρόλο του εκπαιδευτικού, αφού σημείο κλειδί του τρόπου που οι μαθητές θα εισαχθούν στην θεματική της «άλγεβρας» αποτελεί ο διδακτικός του σχεδιασμός. Ειδικότερα εφόσον αποφασίσει να χρησιμοποιήσει ψηφιακά εργαλεία, καθώς τότε εικάζουμε ότι εγείρονται ταυτόχρονα προκλήσεις τόσο μαθητικής εννοιολογικής κατανόησης της άλγεβρας (Kieran et al., 2016) όσο και ενσωμάτωσης της τεχνολογίας στην διδακτική του πρακτική (Mishra & Koehler, 2006).

Οι Mishra και Koehler (2006) θεωρούν ότι ο πυρήνας της καλής διδασκαλίας με βάση την τεχνολογία προϋποθέτει τρία βασικά είδη γνώσεων του εκπαιδευτικού: την «Τεχνολογική γνώση» (Technology Knowledge/TK), την «γνώση του Περιεχομένου» (Content Knowledge/CK) και την «Παιδαγωγική γνώση» (Pedagogical Knowledge/PK). Αυτές αποτελούν κεντρικό σημείο αναφοράς στην θεωρία «Τεχνολογική Παιδαγωγική και γνώση του Περιεχομένου» (TPACK) που ανέπτυξαν. Εξίσου σημαντικές είναι και οι αλληλεπιδράσεις μεταξύ αυτών με αποτέλεσμα την δημιουργία εξειδικευμένων μορφών γνώσεων: την Παιδαγωγική γνώση Περιεχομένου/PCK (π.χ. γνώση διατύπωσης και αναπαράστασης του μαθηματικού περιεχομένου), την Τεχνολογική γνώση του Περιεχομένου/TCK (π.χ. τρόπος αλληλεπίδρασης τεχνολογίας και περιεχομένου), και την Τεχνολογική

Παιδαγωγική γνώση/TPK (διδακτική αξιοποίηση δυνατοτήτων και περιορισμών των αναπαραστάσεων των ψηφιακών εργαλείων). Ιδιαίτερα ως ανώτερο επίπεδο γνώσης θεωρείται η «Τεχνολογική Παιδαγωγική γνώση του Περιεχομένου» (TPCK) καθώς αποτελεί την ταυτόχρονη αλληλεπίδραση και των τριών βασικών συνιστωσών των γνώσεων (Mishra & Koehler, 2006).

Τα ερευνητικά ερωτήματα είναι τα παρακάτω:

1. Ποιες είναι οι πηγές και οι μονάδες διδασκαλίας που συνιστούν τον διδακτικό σχεδιασμό της εκπαιδευτικού και ποιοι είναι οι παράγοντες που επηρέασαν την δημιουργία των μονάδων διδασκαλίας μέσα από την συμμετοχή της στον κύκλο: συναντήσεις επαγγελματικής ανάπτυξης σχεδιασμός-εφαρμογή-αναστοχασμός;
2. Πώς εξελίσσεται η επαγγελματική γνώση της εκπαιδευτικού για την εισαγωγή της άλγεβρας στη διδασκαλία με βάση το μοντέλο «Τεχνολογικής και Παιδαγωγικής γνώσης του Περιεχομένου» (TPACK);

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Πλαίσιο έρευνας – Συμμετέχουσα

Το ερευνητικό πρόγραμμα PREMaTT εφαρμόστηκε στην Γαλλία και στην Ελλάδα με την αντίστοιχη σύσταση ομάδας εκπαιδευτικών. Την ελληνική ομάδα συγκροτούσαν 2 εκπαιδευτικοί πρωτοβάθμιας και 7 δευτεροβάθμιας και ένας ακαδημαϊκός ερευνητής στον ρόλο του συντονιστή. Μέσα στις 6 συνολικά συναντήσεις επαγγελματικής ανάπτυξης, σχεδιάστηκαν και παρουσιάστηκαν οι διδακτικοί σχεδιασμοί, σχολιάστηκαν οι εφαρμογές αυτών, μετέπειτα τροποποιήθηκαν και σε κάποιες περιπτώσεις εφαρμόστηκαν εκ νέου. Σ' αυτή την πορεία, οι εκπαιδευτικοί ήρθαν σε επαφή με πορίσματα ερευνών είτε έμμεσα μέσα από συζητήσεις με τον συντονιστή της ομάδας είτε άμεσα με την μελέτη ερευνητικών άρθρων.

Σε αυτό το πλαίσιο συμμετείχε και η Ελένη, εκπαιδευτικός πρωτοβάθμιας με πάνω από 20 χρόνια πείρας, διδακτορικό στην παιδαγωγική αξιοποίηση των ψηφιακών τεχνολογιών στην διδασκαλία των μαθηματικών στο δημοτικό σχολείο και επιμορφώτρια εκπαιδευτικών για την ένταξη των Τ.Π.Ε στην διδακτική πράξη.

Η συγκεκριμένη εκπαιδευτικός δεν επιλέχθηκε τυχαία, καθώς διαθέτει ένα πολύ καλό μαθηματικό υπόβαθρο και ταυτόχρονα έχει ευχέρεια σε ζητήματα που αφορούν την ενσωμάτωση των ψηφιακών τεχνολογιών στην διδακτική πράξη. Συνεπώς, η μελέτη του διδακτικού της σχεδιασμού μας επιτρέπει να εντοπίσουμε την σχεδιαστική της ετοιμότητα, εστιάζοντας στην αξιοποίηση των ψηφιακών εργαλείων αλλά και ταυτόχρονα να κατανοήσουμε ζητήματα που φέρνει η χρήση της τεχνολογίας για την εισαγωγή της άλγεβρας στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση. Τέλος, παρουσιάζει ερευνητικό ενδιαφέρον να σκιαγραφήσουμε την πορεία μιας

εκπαιδευτικού με αυξημένα προσόντα εντός ενός ερευνητικού προγράμματος, προσπαθώντας να εντοπίσουμε στοιχεία επαγγελματικής εξέλιξης.

Δεδομένα και μέθοδος ανάλυσης

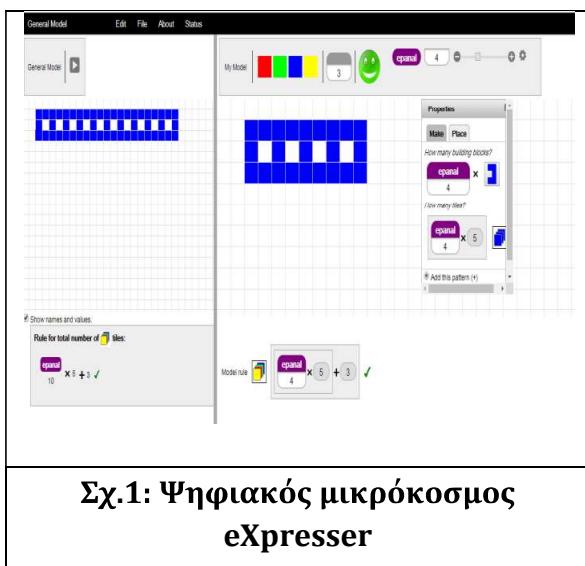
Πρόκειται για μια ποιοτική έρευνα και αποτελεί μια μελέτη περίπτωσης (case study) (Yin, 1994). Τα δεδομένα που αναλύθηκαν προέκυψαν μέσα από τις 6 συναντήσεις επαγγελματικής ανάπτυξης (καταγραφή ήχου και εικόνας), τις 5 ημιδομημένες συνεντεύξεις της Ελένης (από 1 στην αρχή και τέλος του προγράμματος, από 1 μετά από τις τρεις δίωρες διδασκαλίες της) και από την συμμετοχική παρατήρηση των εφαρμογών της εντός σχολικής τάξης (καταγραφή εικόνας και ήχου). Με σκοπό την κατανόηση των διδακτικών επιλογών της Ελένης, συγκρίναμε και συνθέσαμε δεδομένα (triangulation) μέσα από τις πηγές, τις συνεντεύξεις και κρίσιμα επεισόδια που προέκυψαν μέσα από την πρακτική και τον αναστοχασμό της.

Σαφέστερα, στο 1^o ερευνητικό ερώτημα χρησιμοποιήθηκαν μέθοδοι θεμελιωμένης θεωρίας (grounded theory approaches) (Strauss & Corbin, 1997) σε συνδυασμό με τη «θεωρία μονάδων διδασκαλίας και χρήσης πηγών» (Documentantional Approach to Didactics) των Gueudet και Trouche (2009). Ειδικότερα για τον εντοπισμό των ευρύτερων κατηγοριών των λειτουργικών σταθερών, προχωρήσαμε πρώτα σε ανοιχτή κωδικοποίηση, ύστερα σε αξονική και τέλος σ' επιλεκτική.

Ταυτόχρονα, η ανάλυση του 2^o ερευνητικού ερωτήματος χωρίστηκε σε δύο φάσεις. Η πρώτη περιλαμβάνει τις συναντήσεις επαγγελματικής ανάπτυξης πριν την εφαρμογή των δραστηριοτήτων της και η δεύτερη τον διδακτικό σχεδιασμό μαζί με την τελική της αποτίμηση. Τα δεδομένα κωδικοποιήθηκαν χρονολογικά (ανά φάση) με βάση τις κατηγορίες του μοντέλου της «Τεχνολογικής και Παιδαγωγικής γνώσης του Περιεχομένου» (TPACK) (Mishra & Koehler, 2006).

Ψηφιακός μικρόκοσμος: eXresser

Ο ψηφιακός μικρόκοσμος eXresser² (Noss et al., 2009) υποστηρίζει την μαθηματική γενίκευση μαθητών ηλικίας 11 έως 14. Έχει ενσωματωμένη μια μορφή «άλγεβρας», όπου ο μαθητής μπορεί να δημιουργεί σταθερές, να ενεργεί με μεταβλητές και να συντάσσει εκφράσεις, οι οποίες εμπεριέχουν τις πράξεις της πρόσθεσης, της αφαίρεσης, του πολλαπλασιασμού και της διαιρέσης. Ο μαθητής κατασκευάζει μοτίβα μέσα από την χρήση έγχρωμων τετραγώνων και χρησιμοποιεί «εικονικές μεταβλητές», ώστε να αναπαράγει τις κατασκευές του για ένα διαφορετικό βαθμό επαναλήψεων και να εκφράσει σχέσεις γενίκευσης, λαμβάνοντας πάντα σχετική ανατροφοδότηση για την ορθότητα τους. Στην ουσία η «εικονική μεταβλητή» είναι η εικονογραφημένη αναπαράσταση της μεταβλητής.



Αναλυτικότερα, στην κεντρική περιοχή εργασίας (Σχ. 1) ο μαθητής αρχικά δημιουργεί επαναλαμβανόμενα μοτίβα. Στη συνέχεια, ορίζει την «δομική μονάδα» (building block) του μοτίβου (με άλλα λόγια το επαναλαμβανόμενο στοιχείο του μοτίβου) και καθορίζει τις «ιδιότητες» (properties) του. Έτσι αναπαράγεται το δομικό στοιχείο του μοτίβου για έναν συγκεκριμένο αριθμό. Για να αναπαραχθεί για έναν τυχαίο αριθμό πρέπει να «ξεκλειδωθεί» ο αριθμός των

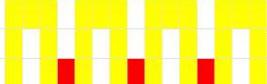
επαναλήψεων με την κατάλληλη εντολή και άρα μετατρέπεται πλέον σε «εικονική μεταβλητή». Επιπλέον, ο μαθητής μπορεί να δημιουργήσει στο ειδικό πλαίσιο (Model Rule) μια αλγεβρική έκφραση που αποτυπώνει τον συνολικό αριθμό των τετραγώνων του μοτίβου.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Πηγές και διδακτικές αποφάσεις εντός και εκτός τάξης

Η Ελένη τη δεδομένη χρονική στιγμή δίδασκε σε ένα τμήμα της Στ' δημοτικού με 15 μαθητές, στο οποίο πριν την παρέμβαση είχε ολοκληρώσει το κεφάλαιο των εξισώσεων και των μοτίβων (αριθμητικά, γεωμετρικά, σύνθετα). Στην διδασκαλία της συνήθως αξιοποιεί δομήματα από το Ψηφιακό Σχολείο (<https://dschool.edu.gr/>). Στο παρελθόν είχε υπόψιν της το ψηφιακό λογισμικό eXpresso, χωρίς όμως να γνώριζε την λειτουργία του.

Η εκπαιδευτικός σχεδίασε τρία φύλλα εργασίας (Φ.Ε.) καθένα από τα οποία εμπεριείχε από μια δραστηριότητα (Σχ. 2) και πραγματοποίησε 3 δίωρες διδακτικές παρεμβάσεις στο εργαστήριο των η/υ. Η δομή των Φ.Ε. περιλαμβάνουν 5 κατηγορίες ερωτημάτων: την κατασκευή του μοτίβου με «σύρε και άσε», τον εντοπισμό του μοτίβου (ερωτήσεις πρόβλεψης και εφαρμογής), την κατασκευή μοτίβου για συγκεκριμένο αριθμό επαναλήψεων, την κατασκευή μοτίβου με χρήση μεταβλητής (ορισμός «δομικού λίθου» και «ιδιοτήτων») και την αποτύπωση του γενικού κανόνα (πρώτα προφορικά και έπειτα με τη χρήση αλφαριθμητικών στοιχείων).

<p>Δρ.1</p> 	<p>Δρ.2</p> 
<p>Δρ.3</p> 	
<p>Σχ.2: Δραστηριότητες στον eXpresso</p>	

Η φύση και η πορεία των ερωτημάτων των Φ.Ε. ακολουθούν την λειτουργικότητα του eXpresso, καθώς οι μαθητές πρώτα ορίζουν την «εικονική μεταβλητή» και έπειτα αποτυπώνουν τον γενικό κανόνα. Παρατηρούμε ότι πρόκειται για μια διδακτική παρέμβαση δεδομένου ότι η μεταβλητή παρουσιάζεται ως «γενικευμένος αριθμός», δημιουργώντας την συνθήκη για ομαλό εννοιολογικό πέρασμα από την Στ' δημοτικού στην Α' γυμνασίου.

Οι διδακτικοί στόχοι των παραπάνω δραστηριοτήτων, σύμφωνα με την Ελένη, είναι οι μαθητές: να αναγνωρίσουν το μοτίβο, να κατανοήσουν και να ορίσουν τον «δομικό λίθο», να εντοπίσουν και να εκφράζουν τον γενικό κανόνα, να αποτυπώσουν αλγεβρικά τον γενικό κανόνα.

Ειδικότερα, μέσα από την ανάλυση του διδακτικού σχεδιασμού και της πρακτικής της, αναδύθηκαν 4 ευρύτερες κατηγορίες ως παράγοντες επιρροής και αιτιολόγησης των αποφάσεών της. Αυτές είναι: το μαθηματικό περιεχόμενο, ο ψηφιακός μικρόκοσμος eXpresso, οι διδακτικές πεποιθήσεις/εμπειρία και η αλληλεπίδραση συναδέλφων/PreMaTT.

Παράλληλα, στο επίπεδο του διδακτικού σχεδιασμού παρατηρούμε τρία κρίσιμα και καινοτόμα σημεία για την εισαγωγή της άλγεβρας στην ελληνική πρωτοβάθμια εκπαίδευση. Αυτά είναι: το αρχικό ερώτημα «σύρε και άσε», η εκτεταμένη χρήση της αναδρομικότητας και τα στοιχεία συμμεταβολής της δραστηριότητας 3.

Σαφέστερα, όλα τα Φ.Ε. ξεκινούν με τη μεταφορά του μοτίβου από το Φ.Ε. στην επιφάνεια εργασίας του eXpresso με την διαδικασία «σύρε και άσε», δηλαδή οι μαθητές να επιλέξουν και να σύρουν τα κατάλληλα χρωματιστά τετράγωνα στην τετραγωνισμένη επιφάνεια του eXpresso. Η Ελένη βασίστηκε αποκλειστικά στην λειτουργικότητα του λογισμικού για την δημιουργία του ερωτήματος, το οποίο ουσιαστικά υποκαθιστά την χρήση των χειραπτικών υλικών.

Ελένη: «Είναι σημαντικό για αυτούς να έχουν μια κιναισθητική αίσθηση της δομής. Οι μαθητές μπορούν να ερωτηθούν τί αλλάζει σε κάθε βήμα σε σχέση με το προηγούμενο κατά την κατασκευή της φιγούρας.»

Επιπρόσθετα, διευκρινίζει ότι «οι μαθητές νοηματοδοτούν την διεξαγωγή του γενικού κανόνα μέσα από την αναδρομική σχέση στις δραστηριότητες των μοτίβων».

Αξίζει να σημειωθεί ότι όλος ο διδακτικός της σχεδιασμός έχει βασιστεί στην χρήση ενός μόνου ψηφιακού λογισμικού, του eXpresser.

Ελένη: «Κάθε λογισμικό θέλει την εξοικείωσή του και συνηθίζεις σε μια συγκεκριμένη λογική. Επιθυμώ οι μαθητές μου να σκέφτονται σαν τον eXpresser. Νομίζω ενδιαφέρον δεν έχει μόνο να φτάσουν στον τελικό στόχο, αλλά και η ενεργή εμπλοκή τους με τις δραστηριότητες. Για αυτό το λόγο αυτές θα πρέπει να είναι από την φύση τους προκλητικές και διερευνητικές.»

Η εκπαιδευτικός θεωρεί την δραστηριότητα 3 ως την πιο απαιτητική σε σχέση με τις υπόλοιπες, γιατί σ' αυτή εμφανίζονται στοιχεία συμμεταβολής (αριθμός αψίδων, μείον μία ένωση). Αυτό σημαίνει ότι οι μαθητές καλούνται να εντοπίσουν την λειτουργική σχέση των δύο μεταβλητών.

Ωστόσο, στην εφαρμογή της δραστηριότητας 3 αναδύθηκαν ορισμένα σημεία αντίθεσης, όπου οι προσφερόμενες αναπαραστάσεις του eXpresser τελικά λειτούργησαν με ένα τρόπο που άλλοτε επιβοηθούν και άλλοτε όχι στην εννοιολογική κατανόηση των μαθητών για το πέρασμα από την αριθμητική στην άλγεβρα. Πιο συγκεκριμένα, οι μαθητές στην δραστηριότητα 3 φάνηκαν να αναγνωρίζουν εύκολα τη δομή του μοτίβου και να υπολογίζουν τον αριθμό των αψίδων και των συνδέσεων για διαφορετικό αριθμό επαναλήψεων. Αντίθετα, παρουσιάστηκαν δυσκολίες στην κατασκευή του «δομικού λίθου» και στον ορισμό των «ιδιοτήτων» του σε επίπεδο λογισμικού. Η δυσκολία αυτή οφείλεται στο γεγονός ότι έπρεπε να γίνει συνδυασμός δύο «δομικών λίθων». Η Ελένη αντιλαμβάνεται την συγκεκριμένη δυσκολία των μαθητών ως «περιορισμό του ψηφιακού εργαλείου που σχετίζεται με τον σχεδιασμό της δραστηριότητας».

Συγκεντρωτικά, τα ζητήματα που προέκυψαν μέσα από την εφαρμογή και των τριών δραστηριοτήτων είναι: η χρήση των μεταβλητών, το πέρασμα από την λεκτική περιγραφή στο συμβολισμό, οι λειτουργίες και οι περιορισμοί του eXpresser και η σημειωτική διαμεσολάβηση του ψηφιακού εργαλείου, όπου μια μαθήτρια αποτυπώνει την μεταβλητή στον πίνακα της αίθουσας χρησιμοποιώντας τον εικονικό συμβολισμό του eXpresser. Με άλλα λόγια, ενεργοποιείται μια διαδικασία, όπου ορισμένοι μαθητές νοηματοδοτούν την μεταβλητή ως έναν γενικευμένο αριθμό ενώ άλλοι την προσεγγίζουν εννοιολογικά περισσότερο ως ένα «εικονίδιο».

Εξέλιξη της επαγγελματικής γνώσης της εκπαιδευτικού

Η Ελένη εμφανίζει είδη γνώσεων σχετικά με την τεχνολογία για την εισαγωγή της άλγεβρας, ήδη, από τις συναντήσεις επαγγελματικής ανάπτυξης (Ε.Α.) που προηγήθηκαν των εφαρμογών της. Ειδικότερα, αυτές οι γνώσεις μετουσιώθηκαν ως τον σημαντικότερο παράγοντα του διδακτικού της σχεδιασμού και μάλιστα

διερευνήθηκαν μετά την εφαρμογή των δραστηριοτήτων της. Επομένως, αποτελεί αξιοπρόσεχτο γεγονός ότι καθώς το πρόγραμμα PreMaTT εξελίσσεται χρονικά (Σχ. 3), η Ελένη εμφανίζει σταθερά πιο σύνθετα επίπεδα γνώσεων, φτάνοντας ακόμα και στο ανώτερο επίπεδο γνώσης (TPACK).

Συναντήσεις Ε.Α. πριν τον διδακτικό σχεδιασμό	Διδακτικός Σχεδιασμός και Αποτίμηση εκπαιδευτικού
TK, CK, PCK, TCK	PK, PCK, TCK, TPK, TPACK
Σχ. 3: Επίπεδα γνώσης TPACK ανά φάση ανάλυσης	

Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί ο σχεδιασμός του ερωτήματος «σύρε και άσε» (TPACK). Η Ελένη σχεδίασε το ερώτημα συνυπολογίζοντας πλήρως τις δυνατότητες που προσφέρει το ψηφιακό εργαλείο σε συνδυασμό με μία άψογη σύνθεση της μαθηματικής της γνώσης (αναγνώριση της δομής του μοτίβου, εμφάνιση αναδρομικής σχέσης) με την παιδαγωγική της γνώση (κιναισθητική αίσθηση, ρόλος χειραπτικού υλικού).

Συγκεκριμένα, αποτιμώντας την πρακτική της στο πλαίσιο μιας αναστοχαστικής συζήτησης, η Ελένη εστίασε στις λειτουργίες και τους περιορισμούς του ψηφιακού λογισμικού eXpresser (TCK), σημειώνοντας πως «το κύριο θέμα που αναδείχτηκε από την εφαρμογή των δραστηριοτήτων μου είναι η σημειωτική διαμεσολάβηση του λογισμικού στην λεκτική περιγραφή του γενικού κανόνα και της χρήσης του αλγεβρικού συμβολισμού» (TPK). Γι' αυτό το λόγο θεωρούμε ότι η τεχνολογική γνώση της Ελένης εκτός από ότι διευρύνθηκε, έγινε κυρίαρχη καθώς κατάφερε να εντοπίσει και να συνειδητοποιήσει παραδείγματα από την εφαρμογή της που την ώθησαν στην ανάπτυξη της Τεχνολογικής και Παιδαγωγικής γνώσης του Περιεχομένου της. Για παράδειγμα, η εκπαιδευτικός κατέληξε στον προβληματισμό ότι η τεχνολογία (eXpresser) από μόνη της ίσως δεν είναι αρκετή ούτε πανάκεια για την εισαγωγή της άλγεβρας στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση (TPACK).

Ελένη: «Τελικά οι μαθητές χρειάζονται περισσότερη εξοικείωση με τον eXpresser και απαιτείται μια πιο ομαλή μετάβαση ανάμεσα στις τρεις δραστηριότητες. Στο μέλλον ίσως να απλοποιούσα τα ζητούμενα, ξεκινώντας από την διατύπωση των ερωτημάτων.»

ΣΥΖΗΤΗΣΗ – ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Η μελέτη του διδακτικού σχεδιασμού της Ελένης έφερε στην επιφάνεια κρίσιμα ζητήματα που αφορούν τον ρόλο των προσφερόμενων εργαλείων/αναπαραστάσεων στην εννοιολογική κατανόηση αλγεβρικών εννοιών. Συγκεκριμένα, παρατηρήθηκαν ορισμένα σημεία αντίθεσης, όπου οι

αναπαραστάσεις/λειτουργίες του eXpresser τελικά λειτουργησαν μ' έναν τρόπο που άλλοτε επιβοηθούν και άλλοτε όχι στην εννοιολογική κατανόηση των μαθητών για το πέρασμα από την αριθμητική στην άλγεβρα.

Από τον διδακτικό σχεδιασμό και την πρακτική της Ελένης, αναδύθηκαν 4 παράγοντες επηρεασμού των διδακτικών της αποφάσεων: το μαθηματικό περιεχόμενο, ο ψηφιακός μικρόκοσμος eXpresser, οι διδακτικές πεποιθήσεις/εμπειρία και η αλληλεπίδραση των συναδέλφων/PreMaTT. Η τεχνολογική γνώση της Ελένης κυρίως μετά την εφαρμογή διευρύνθηκε και έγινε κυρίαρχη. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί η δημιουργία του ερωτήματος «σύρε και άσε» ως ανώτερο επίπεδο γνώσης TPACK. Παράλληλα, ο εντοπισμός εξέλιξης της γνώσης μιας εκπαιδευτικού με αυξημένα τυπικά προσόντα αποτελεί σημαντικό εύρημα της παρούσας έρευνας καθώς τονίζει για ακόμα μια φορά την συμβολή των κοινοτήτων πρακτικής στην επαγγελματική μάθηση και εξέλιξη των εκπαιδευτικών (Gueudet & Trouche, 2009).

Τέλος, ένα ακόμα εύρημα πρόσθετης ερευνητικής αξίας αποτελεί το γεγονός ότι τελικά η ψηφιακή τεχνολογία δεν πρέπει και δεν μπορεί να αποτελεί διδακτική πανάκεια, καθώς τελικά από μόνη της δεν εγγυάται το ομαλό πέρασμα από την αριθμητική στην άλγεβρα. Με αυτό τον τρόπο αναδεικνύεται για ακόμα μια φορά η αναγκαιότητα και η πολυπλοκότητα ενός κατάλληλου διδακτικού σχεδιασμού.

Σημειώσεις

1. **Penser les Ressources de l' Enseignement des Mathematiques dans un Temps de Transitions:** (<http://ife.ens-lyon.fr/ife/recherche/groupes-de-travail/prematt>)
2. **Ηλεκτρονική έκδοση του μικροκοσμού eXpresser:** <http://web-expresser.appspot.com>

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Britt, M. S., & Irwin, K. C. (2011). Algebraic thinking with and without algebraic representation: A pathway for learning. In *Early algebraization* (pp. 137-159). Springer, Berlin, Heidelberg.
- Gueudet, G., & Trouche, L. (2009). Towards new documentation systems for mathematics teachers?. *Educational Studies in Mathematics*, 71(3), 199-218.
- Kieran, C., Pang, J., Schifter, D., & Ng, S. F. (2016). Early Algebra. *Research into its nature, its learning, its teaching*. Londres: SpringerOpen.
- Mishra, P., & Koehler, M. J. (2006). Technological pedagogical content knowledge: A framework for teacher knowledge. *Teachers college record*, 108(6), 1017.

- Noss, R., Hoyles, C., Mavrikis, M., Geraniou, E., Gutierrez-Santos, S., & Pearce, D. (2009). Broadening the sense of 'dynamic': a microworld to support students' mathematical generalisation. *ZDM*, 41(4), 493-503.
- Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, (2003). Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών Μαθηματικών. Αθήνα: Παιδαγωγικό Ινστιτούτο
- Strauss, A., & Corbin, J. M. (1997). *Grounded theory in practice*. Sage.
- Wenger, E. (1999). *Communities of practice: Learning, meaning, and identity*. Cambridge university press.
- Yin, R. K. (1994). Discovering the future of the case study. Method in evaluation research. *Evaluation practice*, 15(3), 283-290.