Έρευνα στη Διδακτική των Μαθηματικών

ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΤΗΣ ΕΝΩΣΗΣ ΕΡΕΥΝΗΤΩΝ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΤΕΥΧΟΣ 3ο / ΜΑΪΟΣ-ΑΥΓΟΥΣΤΟΣ 2008

ΚΕΔΡΟΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ

Έρευνα στη Διδακτική των Μαθηματικών

ΤΕΤΡΑΜΗΝΙΑΙΑ ΕΚΔΟΣΗ ΤΗΣ ΕΝΩΣΗΣ ΤΩΝ ΕΡΕΥΝΗΤΩΝ ΤΗΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ (ΕΝΕΔΙΜ)

ΤΕΥΧΟΣ 3ο, ΜΑΪΟΣ-ΑΥΓΟΥΣΤΟΣ 2008, ΤΙΜΗ: 8€

ΙΔΙΟΚΤΗΤΗΣ: ΚΕΔΡΟΣ ΕΚΔΟΤΙΚΗ Α.Ε. • Γ. ΓΕΝΝΑΔΙΟΥ 3, 106 78 ΑΘΗΝΑ • ΤΗΛ.: 210 38.09.712
FAX: 210 33.02.655 • E-MAIL: edu@kedros.gr

ΕΚΔΟΤΗΣ: ΕΥΑΓΓΕΛΟΣ ΠΑΠΑΘΑΝΑΣΟΠΟΥΛΟΣ

ΥΠΕΥΘΥΝΗ ΔΙΑΦΗΜΙΣΗΣ: ΑΓΓΕΛΙΚΗ ΠΟΡΤΟΚΑΛΟΓΛΟΥ, 210 38.09.712, εσωτ. 150

ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΕΝΤΥΠΟΥ: ΑΝΑΣΤΑΣΙΑ ΣΟΥΛΑΚΗ

ΕΚΤΥΠΩΣΗ: STAR PRINT, ΧΙΟΥ 18, ΑΣΠΡΟΠΥΡΓΟΣ, ΤΗΛ.: 210 55 84 220

ISSN: 1791-292X

ΣΧΗΜΑΤΑ ΔΥΝΑΜΙΚΟΥ ΧΕΙΡΙΣΜΟΥ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ ΚΑΙ ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΝΟΗΜΑΤΩΝ ΓΙΑ ΛΟΓΟΥΣ ΚΑΙ ΑΝΑΛΟΓΙΕΣ

Γιώργος Ψυχάρης
Εργαστήριο Εκπαιδευτικής Τεχνολογίας, ΕΚΠΑ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στο άρθρο αυτό παρουσιάζονται ερευνητικά αποτελέσματα που αφορούν τη χρήση ειδικού υπολογιστικού εργαλείου δυναμικού χειρισμού γεωμετρικών μεγεθών στο πλαίσιο του πειραματισμού 13χρονων μαθητών για την αυξομείωση γεωμετρικών κατασκευών με βάση σχέσεις αναλογίας μεταξύ μεταβλητών μεγεθών. Οι μαθητές εργάστηκαν σε ομάδες στο εργαστήριο υπολογιστών του σχολείου τους χρησιμοποιώντας ειδικά σχεδιασμένα υπολογιστικά εργαλεία συμβολικής και γραφικής αναπαράστασης των μεταβλητών μεγεθών, που παράλληλα μπορούσαν να τα χειριστούν ελέγχοντας με δυναμικό τρόπο την αριθμητική μεταβολή τους. Η ανάλυση εστιάζεται στα σχήματα που αναδύθηκαν κατά τη χρήση του εργαλείου δυναμικού χειρισμού αλλά και στις μεταξύ τους διασυνδέσεις. Στα ευρήματα καταγράφεται η αξιοποίηση του δυναμικού χειρισμού ως πλαισίου αναγνώρισης και έκφρασης συσχετίσεων μεταξύ των μεταβλητών μεγεθών μιας γεωμετρικής κατασκευής με στόχο την αυξομείωσή της στο πλαίσιο κατάλληλα σχεδιασμένων δραστηριοτήτων.

Λέξεις κλειδιά: μεγέθυνση-σμίκρυνση γεωμετρικών σχημάτων, δυναμικός χειρισμός, λόγος, αναλογία.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στο επίκεντρο του παρόντος άρθρου βρίσκεται η μελέτη του δυναμικού χειρισμού γεωμετρικών κατασκευών από μαθητές της Α΄ γυμνασίου όταν εμπλέκονται σε διαδικασίες αυξομείωσής τους με τη χρήση ειδικά σχεδιασμένων υπολογιστικών εργαλείων. Ο όρος *αυξομείωση* στη συγκεκριμένη έρευνα αναφέρεται στη δυνατότητα μεγέθυνσης-σμίκρυνσης γεωμετρικών σχημάτων, η κατασκευή των οποίων βασίζεται σε σχέσεις αναλογίας της μορφής Y = mX. Η ανάλυση εστιάζεται στη μελέτη των διορθωτικών ενεργειών που ανέπτυξαν οι μαθητές ως απάντηση στη γραφική αλλοίωση των υπό κατασκευή γεωμετρικών σχημάτων κατά την αναζήτηση κατάλληλων σχέσεων αναλογίας και περιγράφονται με τον όρο *εξομάλυνση* (normalizing, ο όρος χρησιμοποιείται με την έννοια που του αποδίδουν οι Ainley, Pratt και Nardi, 2001). Η εξομάλυνση χρησιμοποιείται ως εργαλείο ανάλυσης της αλληλεπίδρασης των παιδιών με το υπολογιστικό περιβάλλον, αλλά και των νοημάτων για τις έννοιες του λόγου και της αναλογίας που αναπτύσσονται στο πλαίσιο της συγκεκριμένης αλληλεπίδρασης (Psycharis & Kynigos, 2004). Οι μαθητές εργάστηκαν σε ομάδες χρησιμοποιώντας ειδικά σχεδιασμένα υπολογιστικά εργαλεία αναπαράστασης και χειρισμού των μεταβλητών μεγεθών των γεωμετρικών κατασκευών (Χελωνόκοσμος, Kynigos, 2004, http://etl.ppp.uoa.gr/_content/download/index_download.htm). Τα μεταβλητά μεγέθη αναπαριστάνονταν συμβολικά -μέσω προγραμματιστικής γλώσσας- και γραφικά, ενώ παράλληλα τα παιδιά μπορούσαν να τα χειριστούν ελέγχοντας με δυναμικό τρόπο την αριθμητική και γραφική μεταβολή τους χρησιμοποιώντας ένα ειδικά σχεδιασμένο υπολογιστικό εργαλείο δυναμικού χειρισμού γεωμετρικών μεγεθών. Το παρόν άρθρο επικεντρώνεται στα αναδυόμενα σχήματα χρήσης του συγκεκριμένου εργαλείου, που αποτελούν ταυτόχρονα και σχήματα δυναμικού χειρισμού των αντίστοιχων γεωμετρικών κατασκευών.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Κατασκεύασμα, εργαλείο και σχήμα

Με αφετηρία τις ιδέες του Vygotsky σχετικά με την αμφίδρομη λειτουργία που χαρακτηρίζει τη χρήση ενός εργαλείου από τον άνθρωπο - εξωτερικά, προς την ολοκλήρωση ενός στόχου και εσωτερικά για την απόκτηση ελέγχου της δράσης - πρόσφατα έχει επισημανθεί και μελετηθεί από πολλούς ερευνητές η διάκριση του λογισμικού - ή μέρους του - ως *κατασκευάσματος (artifact)* και του *εργαλείου (instrument)* (Verillon & Rabardel, 1995˙ Guin & Touche, 1999˙ Artigue, 2002˙ Guin et al., 2005). Πιο συγκεκριμένα, οι Verillon και Rabardel (1995) έχουν αναφερθεί στις διαφορές ανάμεσα στο κατασκεύασμα ως χειροπιαστό ή αφηρημένο αντικείμενο και το εργαλείο ως ψυχολογική κατασκευή, υπογραμμίζοντας ότι το εργαλείο δεν υπάρχει αφ' εαυτού αλλά δημιουργείται όταν ο χρήστης είναι σε θέση να το αξιοποιήσει για συγκεκριμένους σκοπούς εντάσσοντάς το σε μια δραστηριότητά του. Η ψυχολογική παράμετρος της διαδικασίας αυτής περιγράφεται από την έννοια του *σχήματος* που ο Vergnaud (1998) όρισε "ως μια αναλλοίωτη οργάνωση της συμπεριφοράς για ένα δοσμένο σύνολο καταστάσεων" (σελ. 167). Στη διδακτική των μαθηματικών, ειδικότερα, αναφερόμαστε σε *σχήματα χρήσης* (*utilization schemes*, Trouche, 2005) ενός υπολογιστικού εργαλείου τα οποία αφορούν τις αναπτυσσόμενες στρατηγικές επίλυσης (π.χ. ενός προβλήματος), τη χρήση των προσφερόμενων λειτουργικοτήτων του υπολογιστικού εργαλείου όσο και τις μαθηματικές έννοιες που εμπλέκονται στις συγκεκριμένες διαδικασίες. Μ' αυτή την έννοια, το εργαλείο έχει θεωρηθεί ότι προκύπτει ως σύνθεση της υλικής και ψυχολογικής υπόστασης του κατασκευάσματος - λογισμικού που μπορεί να εκφραστεί ως εξής: Εργαλείο = Κατασκεύασμα + Σχήματα για μια κατηγορία ζητουμένων (Drijvers & Trouche, 2008).

Σε αυτό το πλαίσιο η επικοινωνία αναφορικά με τη χρήση και κατά τη διάρκεια της χρήσης ενός υπολογιστικού εργαλείου έχει υποδειχτεί ως ένα πρόσφορο πεδίο μελέτης της μαθηματικής γνώσης των μαθητών που, ενώ δεν εκφράζεται πάντοτε λεκτικά (implicit knowledge, Vergnaud, 1998), εξωτερικεύεται μέσα από την ανάπτυξη των αντίστοιχων σχημάτων και έτσι μπορεί να αποτελέσει αντικείμενο παρατήρησης, ερμηνείας και ανακατασκευής από την πλευρά του ερευνητή.

Η διαδικασία μετατροπής του λογισμικού-κατασκευάσματος σε εργαλείο ονομάζεται *δημιουργία (ή "γέννηση") εργαλείου (instrumental genesis)* και θεωρείται κατά βάση ως μια διαδικασία ιδιοποίησης που απαιτεί χρόνο και σχετίζεται τόσο με τα χαρακτηριστικά και τις λειτουργικότητες του λογισμικού όσο και με τη δραστηριότητα του υποκειμένου (χρήστη), τη γνώση του και τη μέθοδο εργασίας του. Η συγκεκριμένη δημιουργία βασίζεται στη σύνθεση της ανάπτυξης δύο τύπων σχημάτων χρήσης: *σχημάτων χρηστικότητας (usage schemes)*, που σχετίζονται με τη διαχείριση του εργαλείου, και *σχημάτων ενορχηστρωμένων ενεργειών (instrumented action schemes)* για την εκπλήρωση συγκεκριμένων στόχων που κατευθύνονται διπλά - εκπορεύονται και καταλήγουν - από το μαθητή προς το υπολογιστικό εργαλείο και αντίστροφα (Artigue, 2002). Οι διαδικασίες αυτές αναφέρονται τόσο στο πώς ο σχεδιασμός του κατασκευάσματος διαμορφώνει τη σκέψη του χρήστη κατά την αλληλεπίδρασή του με αυτό (instrumentation) όσο και στις αλλαγές που μπορεί ο χρήστης να επιφέρει στις λειτουργικότητες του κατασκευάσματος στο πλαίσιο κάποιας εργασίας (instrumentalisation).

Στο παρόν άρθρο η ανάλυση των σχημάτων χρήσης του ειδικού εργαλείου δυναμικού χειρισμού γεωμετρικών μεγεθών επιδιώκει να φωτίσει πτυχές της διαδικασίας "γέννησης" του συγκεκριμένου εργαλείου στο πλαίσιο της συμμετοχής των μαθητών σε συνεργατικές διαδικασίες κατασκευής μοντέλων αυξομειούμενων γεωμετρικών σχημάτων. Με αυτή την έννοια η παρούσα έρευνα θεμελιώνεται στο ρεύμα των ερευνών που αξιοποίησαν τη χρήση των υπολογιστικών εργαλείων για να οργανώσουν μέσα στη σχολική τάξη συλλογικές δραστηριότητες στο επίκεντρο των οποίων βρίσκονται οι κατασκευές, δηλαδή αντικείμενα με προσωπικό νόημα γι' αυτούς που τα κατασκεύασαν (*constructionism,* Harel & Papert, 1991). Η κεντρική ιδέα του συγκεκριμένου ρεύματος είναι ότι οι μαθητές δομούν και επαναδομούν τη γνώση τους εξαιρετικά αποδοτικά όταν εμπλέκονται στην κατασκευή μοντέλων που αποτελούν αντικείμενα επικοινωνίας και κοινής εστίασης.

Μεγέθυνση-σμίκρυνση και δυναμικός χειρισμός γεωμετρικών κατασκευών

Οι πλέον συνηθισμένες στρατηγικές των μαθητών για την επίλυση των προβλημάτων μεγέθυνσης–σμίκρυνσης είναι οι προσθετικές, σύμφωνα με οποίες όμοιο σχήμα προς ένα αρχικό προκύπτει όταν προστεθούν στα μήκη των πλευρών του κατάλληλα μήκη, μέχρι αυτά να εξισωθούν με εκείνα των αντίστοιχων πλευρών του αρχικού σχήματος (Tourniaire & Pulos, 1985˙ Hart, 1984). Επειδή το τελικό σχήμα ανήκει στην ίδια κατηγορία με το αρχικό (π.χ. ορθογώνιο) οι μαθητές δυσκολεύονται να διακρίνουν το λάθος της προσθετικής μεθόδου καθώς έτσι μπορεί να κατασκευάσουν μια (λανθασμένη) απάντηση στο πρόβλημα παρακάμπτοντας την πολλαπλασιαστική συσχέτιση (Hart, 1981).

Η συζήτηση σχετικά με τις στρατηγικές των μαθητών για τη μεγέθυνση-σμίκρυνση ενός γεωμετρικού σχήματος επικεντρώνεται σε δύο άξονες: (α) το είδος του αριθμητικού – ακέραιου ή κλασματικού - τελεστή που απαιτείται για τον πολλαπλασιασμό των πλευρών του αρχικού σχήματος και (β) τον τρόπο με τον οποίο ο επιλεγμένος τελεστής συσχετίζει πολλαπλασιαστικά τις αντίστοιχες πλευρές του αρχικού και του τελικού σχήματος (κλιμακωτά) ή διαφορετικές πλευρές του αρχικού σχήματος (συναρτησιακά) (Vergnaud, 1983). Οι συσχετίσεις αυτές, παρότι από μαθηματική σκοπιά είναι ισοδύναμες, αντιμετωπίζονται με διαφορετικό τρόπο από τους μαθητές οι οποίοι βρίσκουν δυσκολότερη τη διατύπωση μιας συναρτησιακής σχέσης μεταξύ μεγεθών από διαφορετικές κατηγορίες (Χρίστου & Φιλίππου, 1999˙ Κολέζα, 2000˙ Χασάπης, 2001). Μια επιπρόσθετη δυσκολία των μαθητών προέρχεται από το ότι στη διαδικασία μετάβασης από ένα αρχικό σε ένα τελικό σχήμα – που από τη φύση της έχει δυναμικό χαρακτήρα - διαπλέκονται αριθμητικές και γεωμετρικές παράμετροι που δεν είναι εύκολο να συγκεραστούν με τη χρήση στατικών μέσων αναπαράστασης (χαρτί/μολύβι, πίνακας).

Η έρευνα 'Ratio and Proportion Microworld' (Noss, Hoyles, & Sutherland 1989) έδωσε ενδιαφέροντα αποτελέσματα αναφορικά με τις ποιοτικές διαφοροποιήσεις που χαρακτηρίζουν τις στρατηγικές και τις ικανότητες που αναπτύσσουν οι μαθητές στα προβλήματα μεγέθυνσης/σμίκρυνσης όταν εργάζονται σε υπολογιστικά περιβάλλοντα με διασυνδεόμενες γραφικές και συμβολικές αναπαραστάσεις με χρήση γλώσσας προγραμματισμού. Οι πιο πάνω ερευνητές υποστήριξαν ότι στη συγκεκριμένη διασύνδεση συναντώνται δύο κρίσιμες παράμετροι που διέπουν τις διαδικασίες μεγέθυνσης/σμίκρυνσης: η δυνατότητα αλγεβρικής έκφρασης σχέσεων και η ταυτόχρονη επιβεβαίωση του γεωμετρικού αποτελέσματος στην οθόνη (Hoyles & Noss, 1989). Η παρούσα έρευνα βασίστηκε στα δεδομένα της έρευνας 'Ratio and Proportion Microworld' (καθώς δεν υπάρχουν άλλες μεταγενέστερες έρευνες) με κύριο σημείο διαφοροποίησης την παροχή της δυνατότητας δυναμικού χειρισμού του σχήματος στους μαθητές.

Τα υπάρχοντα ερευνητικά αποτελέσματα αναφορικά με το δυναμικό χειρισμό γεωμετρικών κατασκευών σχετίζονται κατά κύριο λόγο με τη χρήση λογισμικών δυναμικής γεωμετρίας. Στα περιβάλλοντα αυτά ο χρήστης έχει τη δυνατότητα να μετακινήσει τα στοιχεία ενός γεωμετρικού σχήματος (π.χ. την κορυφή ενός τριγώνου) και να παρατηρήσει τις αλλαγές που επισυμβαίνουν σε αυτό καθώς πραγματοποιεί τη μετακίνηση. Τα σχετικά αποτελέσματα επιβεβαιώνουν το ρόλο του δυναμικού χειρισμού ως κρίκου διασύνδεσης της εμπειρικής και της θεωρητικής βάσης των μαθηματικών, που μπορεί έτσι να θεωρηθούν συμπληρωματικές παρά αντιθετικές (Mariotti, 2000). Σε αυτό το πλαίσιο κεντρικό ρόλο κατέχει η ανάδραση του υπολογιστή (Hölzl, 2001), ενώ στην εξεικόνιση των γραφικών αλλαγών αναγνωρίζεται η δυνατότητα ανακάλυψης των λογικών περιορισμών και εμποδίων που διέπουν μια γεωμετρική κατασκευή (Arzarello et al., 1998) όπως και η ενίσχυση της ανάπτυξης παραγωγικών συλλογισμών από τους μαθητές ιδιαίτερα όταν το γραφικό αποτέλεσμα τους εκπλήσσει (Hadas et al., 2000). Στην παρούσα έρευνα ο δυναμικός χειρισμός των γεωμετρικών κατασκευών τίθεται στο επίκεντρο *ως διαδικασία* (Noss & Hoyles, 1996) και γίνεται ο άξονας της μελέτης των δραστηριοτήτων που αναπτύσσουν οι μαθητές όταν επιχειρούν να κατασκευάσουν αυξομειούμενα γεωμετρικά σχήματα με χρήση μεταβλητών. Οι ζητούμενες σχέσεις λόγου και αναλογίας για την ολοκλήρωση των γεωμετρικών σχημάτων αφορούν είτε αριθμητικές πράξεις μεταξύ των μέτρων των αντίστοιχων μεγεθών είτε το σχηματισμό γραμμικών συναρτησιακών σχέσεων της μορφής Y=mX για την έκφραση μιας μεταβλητής με βάση μια άλλη μεταβλητή. Επομένως, η αναλογική σκέψη στην παρούσα έρευνα αναφέρεται σε ένα σύστημα δύο μεταβλητών μεταξύ των οποίων υπάρχει μια γραμμική συναρτησιακή σχέση (Karplus, Pulos, & Stage, 1983).

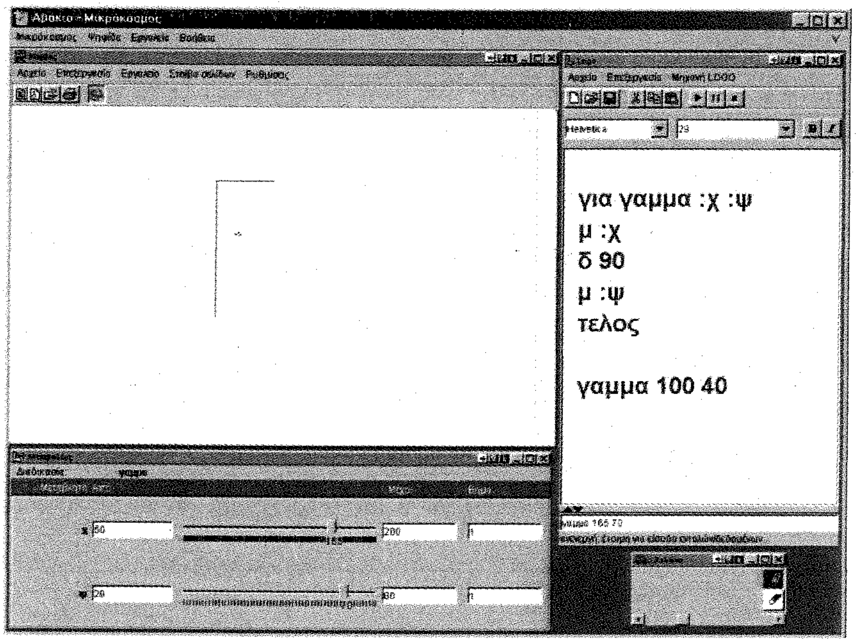
ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΚΑΙ ΠΛΑΙΣΙΟ

Η παρούσα έρευνα ανήκει στην κατηγορία των πειραμάτων σχεδιασμού (design experiments, Cobb et al., 2003) και λαμβάνει χώρα σε πραγματικές σχολικές συνθήκες στην τάξη. Σκοπός της είναι η τεκμηριωμένη περιγραφή και ανάλυση πτυχών της μαθησιακής διαδικασίας σχετικά με τις έννοιες λόγου και αναλογίας, που έχουν ενσωματωθεί σε κατάλληλες δραστηριότητες με βάση τις λειτουργικότητες των χρησιμοποιούμενων υπολογιστικών εργαλείων.

Με βάση το παραπάνω μεθοδολογικό περίγραμμα, η έρευνα επιλέχτηκε να λάβει χώρα πριν από την επίσημη διδασκαλία των συγκεκριμένων εννοιών στην τάξη, ώστε να αποφευχθούν προσπάθειες αναπαραγωγής καθιερωμένων διδαγμένων μεθόδων και αλγορίθμων εκ μέρους των παιδιών και να ενισχυθούν οι διερευνητικές παράμετροι της εμπλοκής τους με τις μελετώμενες μαθηματικές έννοιες. Στην έρευνα, που πραγματοποιήθηκε στο γυμνάσιο του Κολλεγίου Ψυχικού στην Αθήνα, συμμετείχαν δύο τμήματα της Α’ γυμνασίου (Α1 και Α2) και οι δύο αντίστοιχοι καθηγητές μαθηματικών. Οι μαθητές εργάζονταν σε ομάδες των ανά δύο στο εργαστήριο υπολογιστών του σχολείου κατά τη διάρκεια ενός δίωρου μαθήματος κάθε εβδομάδα στο οποίο δίδασκαν οι συμμετέχοντες καθηγητές. Οι δεκατρείς ομάδες παιδιών κάθε τμήματος κλήθηκαν να κατασκευάσουν μια γραμματοσειρά με όλα τα κεφαλαία γράμματα του ελληνικού αλφαβήτου με μεταβλητό μέγεθος, ώστε να μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τη γραφή λέξεων ή φράσεων διαφορετικών μεγεθών. Γι’ αυτό το λόγο τα γράμματα έπρεπε να αυξομειώνονται με τον ίδιο τρόπο όταν τοποθετούνται το ένα δίπλα στο άλλο. Έτσι, ζητήθηκε από τους μαθητές στην κατασκευή κάθε γράμματος να χρησιμοποιήσουν όσο το δυνατόν λιγότερες μεταβλητές, με απώτερο στόχο τη χρήση μιας μεταβλητής, μέσω της αλλαγής της οποίας να επιτυγχάνεται η ζητούμενη αυξομείωση. Σύμφωνα με τη δραστηριότητα, που ονομάστηκε Κατασκευή Δυναμικής Γραμματοσειράς (ΚΔΓ), κάθε ομάδα ανέλαβε την κατασκευή δύο γραμμάτων, ενώ σε επόμενο στάδιο οι ομάδες αντάλλαξαν τα γράμματά τους με σκοπό να δοκιμάσουν τη συμμεταβολή τους και να τροποποιήσουν κατάλληλα τις κατασκευές τους έχοντας έτσι τη δυνατότητα να 'διδαχθούν' μέσα από εργασίες των συμμαθητών τους.

Η δραστηριότητα ΚΔΓ προέβλεπε την εμπλοκή των μαθητών στο εννοιολογικό πεδίο λόγου και αναλογίας (Vergnaud, 1983) χωρίς άμεση αναφορά σε αυτό, αλλά αποδίδοντας έμφαση στην διαπλοκή στόχου και χρήσης (Ainley et al., 2006) των γεωμετρικών σχημάτων, οι κατασκευαστικές απαιτήσεις των οποίων βρίσκονταν σε άμεση συνάφεια με τις λειτουργικότητες των υπολογιστικών εργαλείων.

Κύριο χαρακτηριστικό του απασχολούμενου υπολογιστικού περιβάλλοντος είναι η δυνατότητα πολλαπλής - αριθμητικής και γραφικής- αναπαράστασης των μεταβαλλόμενων μεγεθών και ο δυναμικός χειρισμός των αριθμητικών τιμών τους με τη χρήση ενός ειδικού εργαλείου δυναμικού χειρισμού που λέγεται *μεταβολέας* (Kynigos, 2004). Στην οθόνη μαζί με τη γραφική αναπαράσταση και το μεταβολέα εμφανίζεται και ένα πεδίο συμβολικής έκφρασης όπου κάθε κατασκευή περιγράφεται μέσα από μια διαδικασία (ή κώδικα) κατασκευής με τη γλώσσα Logo [1]. Στο σχήμα 1 η μεταβλητή (:χ) αντιστοιχεί στο κατακόρυφο μήκος του γάμμα και η (:ψ) στο οριζόντιο. Ο μεταβολέας που εμφανίζεται στο ίδιο σχήμα αποτελείται από δύο λωρίδες κύλισης που αναπαρίστανται ως αριθμογραμμές, αποκαλούνται *μεταβολείς* και αντιστοιχούν στις χρησιμοποιούμενες στη διαδικασία μεταβλητές [2].



Σχήμα 1: Το γάμμα με δύο μεταβλητές.

Ο χρήστης μπορεί να σύρει με το ποντίκι τους ροοστάτες που εμφανίζονται πάνω σε κάθε μετάβολέα και να παρατηρήσει τόσο τις αριθμητικές αλλαγές των τιμών της αντίστοιχης μεταβλητής όσο και τις αλλαγές στο γεωμετρικό μέγεθος που αντιπροσωπεύει η συγκεκριμένη μεταβλητή στη γραφική αναπαράσταση του σχήματος καθώς πραγματοποιούνται. Ο τρόπος αλλαγής των αριθμητικών τιμών καθορίζεται από το βήμα μεταβολής που εμφανίζεται σε ειδικό εικονίδιο στα δεξιά κάθε μεταβολέα και μπορεί να είναι ακέραιος ή δεκαδικός αριθμός. Έτσι, δίνεται η δυνατότητα στο χρήστη να χειριστεί δυναμικά τις κατασκευές του, να μεταβάλλει τα δομικά γεωμετρικά χαρακτηριστικά τους και να παρακολουθήσει τη μεταβολή στην αναπαράστασή τους κατά συνεχή τρόπο. Όταν οριστεί μια διαδικασία ο χρήστης μπορεί να αλλάξει τα όρια μετακίνησης του μεταβολέα αλλά και το αντίστοιχο βήμα μεταβολής.

Η κατασκευή ενός αυξομειούμενου σχήματος με μία μεταβλητή επιτυγχάνεται με τη συσχέτιση δύο μεταβλητών και τη συναρτησιακή έκφραση της μιας σε σχέση με την άλλη. Για παράδειγμα, στην περίπτωση του γάμμα η μεταβλητή (:ψ) θα μπορούσε να αντικατασταθεί από τη σχέση (:χ/3). Πρέπει να σημειωθεί ότι η απουσία των πολλαπλασιαστικών σχέσεων (π.χ. η χρήση προσθετικών σχέσεων) οδηγεί στην αλλοίωση του σχήματος κατά την αυξομείωσή του για κάποιες αριθμητικές τιμές στο μεταβολέα, γεγονός που μπορεί επίσης να προέλθει και από τη λανθασμένη αντιστοίχιση μεταβλητών σε μεγέθη διαφορετικών κατηγοριών [3].

Οι μαθητές του συγκεκριμένου σχολείου ήταν εξοικειωμένοι με τη χρήση της Logo από προηγούμενα έτη όπως και με τη χρήση μεταβλητών. Στην έναρξη της εφαρμογής της δραστηριότητας έγινε η εισαγωγή τους στη χρήση του μεταβολέα μέσα από απλά παραδείγματα μεταβλητών κατασκευών όπως τετραγώνου, ορθογωνίου και κύκλου. Η εφαρμογή της δραστηριότητας ΚΔΓ πραγματοποιήθηκε για δύο ώρες την εβδομάδα σε κάθε τμήμα και απλώθηκε χρονικά σε διάστημα τριών μηνών. Ο ερευνητής είχε το ρόλο του συμμετοχικού παρατηρητή. Σε κάθε τμήμα επιλέχτηκε μία ομάδα δύο μαθητών (Ομάδα εστίασης) των οποίων τα λεγόμενα και οι ενέργειες καταγράφηκαν λεπτομερώς με μία κάμερα. Οι μαθητές αυτοί επιλέχτηκαν ώστε η επίδοσή τους να μην βρίσκεται στα άκρα της σχολικής κλίμακας, να συνεργάζονται και να επικοινωνούν μεταξύ τους εκφράζοντας ανοιχτά τις σκέψεις και τις ιδέες τους. Με χρήση μιας δεύτερης κάμερας καταγράφηκαν επεισόδια από το σύνολο των ομάδων της τάξης αλλά και τις παρεμβάσεις του διδάσκοντα. Όλα τα δεδομένα απομαγνητοφωνήθηκαν για την ανάλυση.

ΟΙ ΔΙΟΡΘΩΤΙΚΕΣ ΔΡΑΣΕΙΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΩΣ ΠΛΑΙΣΙΟ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

Η κατασκευή μοντέλων των γραμμάτων και η αναζήτηση κατάλληλων σχέσεων αναλογίας από τους μαθητές για την αυξομείωσή τους αναδύθηκε συνυφασμένη με την εμφάνιση γραφικών αλλοιώσεων που αποτέλεσαν ενδείξεις μη επιτυχών κατασκευαστικών προσπαθειών. Η μελέτη της χρήσης του μεταβολέα βασίστηκε στη μελέτη των διορθωτικών ενεργειών των μαθητών καθώς η γραφική αλλοίωση προέκυπτε στις περισσότερες περιπτώσεις αλληλένδετη με τη χρήση του κατά την προσπάθεια δυναμικής μεταβολής του σχήματος είτε για τον καθορισμό σχέσεων μεταξύ των εμπλεκόμενων μεγεθών είτε για την επιβεβαίωση με δοκιμές ότι η αυξομείωση 'δουλεύει'.

Στην ανάλυση λήφθηκε υπόψη η συσχέτιση των συνθηκών (γιατί;) και των αλληλεπιδράσεων (πώς;) (Strauss & Corbin, 1998), που συνόδευσαν την αλλοίωση του σχήματος και τις μετέπειτα διορθωτικές ενέργειες των παιδιών. Ο ερευνητής 'διάβασε' κάθε μετακίνηση του μεταβολέα ως ένα συμβάν που ήταν αναπόσπαστα συνδεδεμένο με το πριν (αιτία) και το μετά (αποτέλεσμα). Μονάδα ανάλυσης ήταν το *επεισόδιο*, που ορίστηκε ως ένα απόσπασμα δράσεων και αλληλεπιδράσεων που εκτυλίσσεται σε συνεχή χρόνο γύρω από ένα συγκεκριμένο θέμα. Η εξαγωγή των επεισοδίων βασίστηκε σε τρία κριτήρια:

- Το "αρχικό κριτήριο" ή "κίνητρο" της διόρθωσης, που αφορούσε τις συνθήκες της αλλοίωσης του σχήματος.
- Το "σημείο εστίασης" των μαθητών μέσω των λεγομένων και των ενεργειών τους, που δεν ταυτιζόταν πάντα με την πραγματική αιτία της αλλοίωσης του σχήματος.
- Τη "νοηματική αλυσίδα" του πεδίου 'λόγος και αναλογία' που συνόδευε τις διορθωτικές ενέργειες των μαθητών και ακολουθούσε τη μετακίνηση του μεταβολέα ή αναδυόταν κατά τη διάρκειά της.

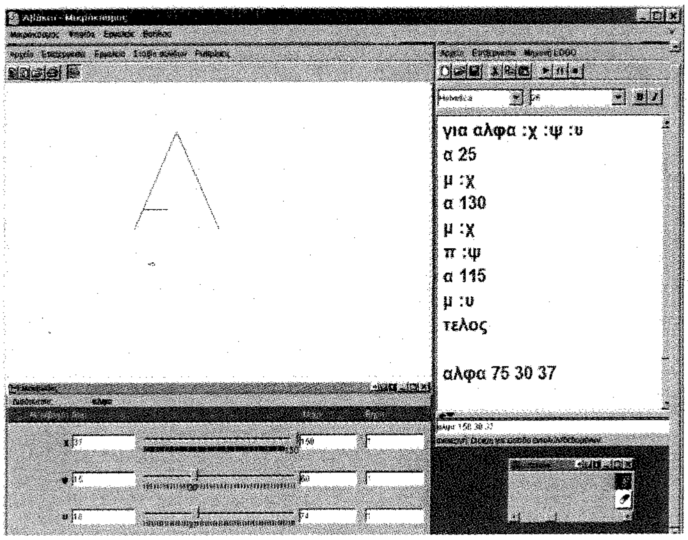
Τα παραπάνω κριτήρια οριοθέτησαν το πλαίσιο μελέτης της εμφάνισης και της εξέλιξης των διορθωτικών ενεργειών των μαθητών και επέτρεψαν την εξαγωγή επεισοδίων διαφορετικής έκτασης που 'φώτιζαν' πτυχές της κατασκευαστικής διαδικασίας τόσο σε επίπεδο νοημάτων και όσο και σε επίπεδο χρήσης εργαλείων. Στα αποτελέσματα καταγράφεται η πρωτότυπη κατηγοριοποίηση των αναδυόμενων σχημάτων μετακίνησης του μεταβολέα από το απλούστερο στο συνθετότερο μέσα από αντιπροσωπευτικά επεισόδια. Στο πλαίσιο του παρόντος άρθρου αποδόθηκε βαρύτητα στην ανάδειξη της ποικιλίας των καταγραφόμενων σχημάτων εστιάζοντας στις διασυνδέσεις (α) της διαδικασία μετατροπής του μεταβολέα σε εργαλείο με τη διερεύνηση των σχέσεων αναλογίας από την πλευρά των μαθητών και (β) των σχημάτων μετακίνησης του μεταβολέα μεταξύ τους.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Χρησιμοποιούμε τον όρο *εξομάλυνση* για την περιγραφή της δραστηριότητας σύμφωνα με την οποία, τα παιδιά, μη αποδεχόμενα τις μορφές του υπό κατασκευή γράμματος, προσπαθούσαν να το τροποποιήσουν με βάση μια αποδεκτή από τα ίδια φόρμα. Στις περισσότερες περιπτώσεις τα παιδιά ξεκινούσαν με την κατασκευή ενός σταθερού σχήματος, που ο ερευνητής ονόμασε *πρότυπο*, το οποίο επιχείρησαν να αυξομειώσουν στη συνέχεια με τη χρήση μεταβλητών. Η χρήση περισσότερων από μία μεταβλητών σε μια κατασκευή χαρακτηρίστηκε από τον πειραματισμό των παιδιών με το μεταβαλλόμενο σχήμα μέσω της μετακίνησης των αντίστοιχων μεταβολέων, ενώ η χρήση μιας μεταβλητής αποτέλεσε την ένδειξη της μετάβασης στο αυξομειούμενο σχήμα. Η μετακίνηση του μοναδικού μεταβολέα σε αυτή την περίπτωση επιβεβαίωνε ή όχι την αναλογική αυξομείωση του σχήματος για όλες τις τιμές της αντίστοιχης μεταβλητής.

Εξομάλυνση και αναγνωριστική μετακίνηση

Οι *αναγνωριστικές* μετακινήσεις αφορούσαν ως επί το πλείστον περιπτώσεις αρχικής χρήσης του μεταβολέα που συνδυάστηκαν με την αναγνώριση του τρόπου λειτουργίας του. Στο απόσπασμα που ακολουθεί οι μαθητές (Ομάδα εστίασης - Τμήμα Α1) έχουν κατασκευάσει το άλφα με χρήση τριών μεταβλητών για τα μήκη του σχήματος με τη διαδικασία που φαίνεται στο σχήμα 2, ενώ έχουν εμφανιστεί και οι τρεις αντίστοιχοι μεταβολείς. Ο πρώτος μεταβολέας αντιστοιχεί στη μεταβλητή (:χ), ο δεύτερος στην (:ψ) και ο τρίτος στην (:υ). Στην οθόνη έχει κατασκευαστεί το πρότυπο του άλφα και οι τρεις μεταβολείς βρίσκονται στις σχετικές τιμές: :x=75, :ψ=30, :υ=37.



Σχήμα 2: Η αλλοίωση του άλφα με τη μετακίνηση του μεταβολέα (:χ)

Ο Μ1 κινεί για πρώτη φορά το μεταβολέα (:x) και το σχήμα αλλοιώνεται *(Σχήμα 2)*.

417. Ε: Τώρα εδώ, όπως κινείς τον πρώτο μεταβολέα, τι συμβαίνει;

418. Μ1: Μεγαλώνει η αυτή η πλευρά... [Δείχνει τα πλάγια τμήματα του άλφα].

419. Μ2: [Στον Μ1] Πήγαινέ το στο 150 [Βάζει το μεταβολέα (:χ) στο 150].

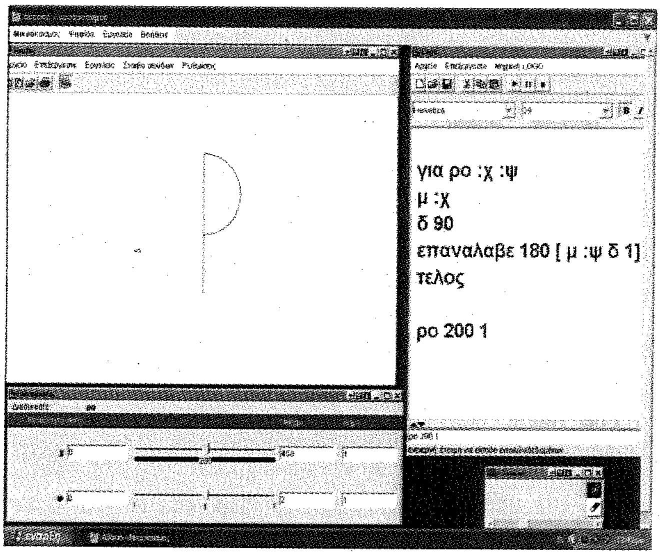
420. Μ1: [Το σχήμα αλλοιώνεται] Αλλά πρέπει να μεγαλώσω και αυτά εδώ πέρα [ενν. τις μεταβλητές (:ψ) και (:υ) στους αντίστοιχους μεταβολείς].

Με την αλλοίωση του σχήματος προκύπτει η ανάγκη μετακίνησης και όλων των υπολοίπων μεταβλητών μεγεθών (γραμμή 420). Στις επακόλουθες διορθωτικές ενέργειες των παιδιών δόθηκε προτεραιότητα στη σχεδίαση μιας αποδεκτής φόρμας του νέου μεγαλύτερου μεγέθους γράμματος, που εκπορεύτηκε από την ανάγκη να 'κλείσει' το σχήμα. Οι αλλαγές στις τιμές των υπολοίπων μεταβλητών δεν έγιναν με βάση κάποια σχέση αναλογίας και έτσι δεν προέκυψε σχήμα όμοιο με το αρχικό. Εδώ, καταγράφουμε τη βαθμιαία εστίαση των μαθητών στην ύπαρξη αλληλεξάρτησης μεταξύ των εμπλεκόμενων μεγεθών και όχι στο είδος της. Το συγκεκριμένο σχήμα μετακίνησης του μεταβολέα (:χ) θα μπορούσε να χαρακτηριστεί ως ένα σχήμα χρηστικότητας καθώς οι ενέργειες των μαθητών στο συγκεκριμένο επεισόδιο αφορούν τη στοιχειώδη λειτουργία του μεταβολέα. Παρόλ' αυτά η ανατροφοδότηση που δόθηκε από το περιβάλλον είχε καθαρά μαθηματική υπόσταση που αφορούσε την έκφραση της αλληλεξάρτησης των μεγεθών της κατασκευής. Έτσι, στην εξέλιξη του επεισοδίου οι μετακινήσεις των μεταβολέων (:ψ) και (:υ) ανήκουν στο σχήμα ενορχηστρωμένων ενεργειών που εκπορεύονται από την ανάγκη να κλείσει το αντίστοιχο γεωμετρικό σχήμα.

Εξομάλυνση και μετακίνηση συσχέτισης

Οι μετακινήσεις *συσχέτισης* του μεταβολέα αναδύθηκαν κατά τη μετάβαση από την κατασκευή του προτύπου στις δυναμικά μεταβαλλόμενες κατασκευές. Σε πρώτο επίπεδο, η συγκεκριμένη κατηγορία μετακινήσεων αναδύθηκε ως μέρος της εξέλιξης των αναγνωριστικών μετακινήσεων και ακολούθως διασυνδέθηκε με την αναζήτηση σχέσεων ανάμεσα στα μεγέθη του κατασκευαζόμενου σχήματος. Η κλιμακωτή συσχέτιση των αντίστοιχων μηκών εκφράστηκε, συνήθως, μέσα από την διαίρεση ή τον πολλαπλασιασμό όλων των αρχικών τιμών του προτύπου με το 2. Ο πειραματισμός με τις πράξεις αυτές αναδύθηκε κατά την προσπάθεια των παιδιών να μετακινήσουν τους μεταβολείς με περισσότερο συστηματικό τρόπο, καθώς οι τυχαίες αναγνωριστικές μετακινήσεις δημιουργούσαν εμφανείς παραμορφώσεις στο κατασκευαζόμενο σχήμα. Σε αυτό το πλαίσιο ο διπλασιασμός και ο υποδιπλασιασμός των αρχικών τιμών λειτούργησε ως η πρώτη προσπάθεια μεγέθυνσης-σμίκρυνσης του σχήματος με βάση ένα ενιαίο κριτήριο αλλαγών για το σύνολο των μηκών του, εμπεριέχοντας παράλληλα τις προσπάθειες των μαθητών να διακρίνουν σχέσεις που διέπουν την αλληλεξάρτηση των εμπλεκόμενων μεγεθών όπως και να αποτρέψουν την αλλοίωση του σχήματος.

Σε αρκετές περιπτώσεις η σταδιακή εστίαση των μαθητών σε γεωμετρικές ιδιότητες και σχέσεις συνοδεύτηκε με τη διατήρηση της ίδιας κατακόρυφης θέσης των μεταβολέων σε διαφορετικά σημεία των λωρίδων κύλισης. Σε μια κατασκευή του ρο (Ομάδα 9 – Τμήμα Α2) οι μετακινήσεις συσχέτισης των μεταβολέων νοηματοδοτήθηκαν μέσα από τη διατήρηση των λόγων των εμπλεκόμενων μεταβλητών μεγεθών στο κατασκευαζόμενο σχήμα.



Σχήμα 3: Το ρο με δύο μεταβλητές.

Τα παιδιά έχουν κατασκευάσει το πρότυπο του γράμματος με τη διαδικασία που φαίνεται στο διπλανό σχήμα για τις τιμές :x=400 και :ψ=2. Με τη μετακίνηση των μεταβολέων σχηματίζονται διαφορετικά μοντέλα του γράμματος στα οποία δεν είναι εμφανές οπτικά αν η διάμετρος του ημικυκλίου αντιστοιχεί στο μισό του κατακόρυφου τμήματος, ιδιότητα που τα παιδιά θεωρούν ότι ικανοποιείται στο πρότυπο του ρο. Η επισήμανση του ερευνητή για το αν η 'τομή στο μέσο' διατηρείται και σε διαφορετικού μεγέθους μοντέλα του γράμματος πυροδότησε διαδικασίες εξομάλυνσης του σχήματος από τα παιδιά με σκοπό την κατασκευή κι άλλων μοντέλων με την ίδια ιδιότητα.

14. Μ1: Και όταν είναι στο 200 σημαίνει ότι είναι στη μέση.

15. Ε: Είναι στη μέση; Πού το ξέρεις;

16. Μ1: Επειδή είναι το μισό του 400.

17. Ε: Και το ημικύκλιο πώς ξέρεις ότι πέφτει στη μέση;

18. Μ1: Θα το βάλουμε στη μέση. Από 0 μέχρι 2 αρχίζει. Άρα θα το βάλουμε ακριβώς στο 1 [ενν. το μεταβολέα (:ψ)].

Ο Μ1 εκφράζει τη διατήρηση της ιδιότητας 'τομή στο μέσο' μέσα από τη μετακίνηση των μεταβολέων στα μισά των αρχικών τιμών, που αντιστοιχούν στα μέσα των λωρίδων κύλισης και των δύο μεταβολέων (Σχήμα 3). Η συσχέτιση των μεταβλητών είναι κλιμακωτή και ο λόγος ομοιότητας του αρχικού και του νέου μοντέλου του ρο είναι ίσος με ½. Η διασύνδεση της γεωμετρικής ιδιότητας με τις αριθμητικές αλλαγές από τον Μ1 φαίνεται στη χρήση της λέξης 'μέση': ο ερευνητής τη χρησιμοποιεί αναφερόμενος στο σχήμα (γραμμή 17) και ο Μ1 στις αλλαγές τιμών στους μεταβολείς και την κατακόρυφη τοποθέτησή τους στην ίδια θέση (γραμμή 18). Με αυτό τον τρόπο οι λειτουργικότητες του μεταβολέα εμφανίζονται ως μέσο μετασχηματισμού για την περιγραφή συγκεκριμένων ιδιοτήτων της μεγέθυνσης και σμίκρυνσης του γεωμετρικού σχήματος από τα παιδιά.

Σε άλλες περιπτώσεις η μετάβαση από τις αναγνωριστικές μετακινήσεις των μεταβολέων στις μετακινήσεις συσχέτισης συνοδεύτηκε από ενδείξεις της βαθμιαίας διαφοροποίησης των παιδιών από την κλιμακωτή συσχέτιση των εμπλεκόμενων τιμών προς τη συναρτησιακή συσχέτιση. Στο επόμενο επεισόδιο, που αποτελεί συνέχεια του αρχικού επεισοδίου αναγνωριστικής μετακίνησης, η κλιμακωτή συσχέτιση των μηκών της κατασκευής του άλφα εκφράστηκε αρχικά μέσα από την διαίρεση όλων των αρχικών τιμών του προτύπου με το 2. Τα παιδιά (Ομάδα εστίασης - Τμήμα Α1) επιχειρούν να σχεδιάσουν όμοιο άλφα διαφορετικού μεγέθους από το πρότυπο στο οποίο οι τιμές ήταν :x=150, :ψ=65 και :υ=71.

353. *Μ2: 75 βάζω εγώ, θα το διαιρέσουμε δια δύο. 75. Μετά θέλω 30 λογικά. Η άλλη σχέση πόσο έκανε; / [Μουρμουρίζοντας] 150 με 65 ...*

354. *Μ1: Να το βάλουμε στη μέση.*

355. *Μ2: Όχι, 65 ήτανε το πίσω / Όχι, όχι. 30.*

356. *Μ1: 30.*

357. *Μ2: 75, 30.*

Παρότι ο Μ2 αποφασίζει να διαιρέσει το αρχικό μέγεθος των πλάγιων τμημάτων με το 2 δεν κάνει αυτομάτως το ίδιο για όλα τα μεγέθη. Όταν πρόκειται να αποφασίσει για το σημείο του πλάγιου τμήματος από το οποίο θα αρχίσει η σχεδίαση του οριζόντιου τμήματος, που αντιστοιχεί στην μεταβλητή (:ψ), συσχετίζει την αρχική τιμή της μεταβλητής (:ψ) με την αντίστοιχη της (:χ) ('150 με 65', γραμμή 353). Βασιζόμενος στην παρατήρηση του σχήματος και χωρίς να προχωρήσει σε κάποια πράξη μεταξύ των συγκεκριμένων γεωμετρικών μεγεθών, ο Μ2 επιχειρεί, ίσως νοερά, τη σύγκριση των λόγων 65/150 και 30/75 για την κατασκευή μιας σχέσης αναλογίας. Παρόλο ο υπολογισμός της θέσης απ' όπου θα αρχίσει ο υπολογισμός της οριζόντιας γραμμής μοιάζει να επιλέχτηκε διαισθητικά από τον Μ2 (απέχει κάτι λιγότερο από το μισό από τη βάση του γράμματος), σημειώνουμε εδώ την αναζήτηση σχέσης μεταξύ των αρχικών τιμών των μεταβλητών ανά δύο συναρτησιακά. Στη συσχέτιση αυτή ενέχεται η σύγκριση των αντίστοιχων λόγων που όμως, σε αυτή τη φάση, δεν εκφράστηκε με ξεκάθαρο τρόπο από τον Μ2.

Εξομάλυνση και μετακίνηση ελέγχου

Οι μετακινήσεις *ελέγχου* αναδύθηκαν στο πλαίσιο της εξοικείωσης των παιδιών με τη χρήση των υπολογιστικών εργαλείων και χαρακτηρίστηκαν από ποιοτικές διαφοροποιήσεις στην πρόσληψη των γεωμετρικών και αλγεβρικών χαρακτηριστικών των ζητούμενων γεωμετρικών κατασκευών. Στις μετακινήσεις της κατηγορίας αυτής οι διορθωτικές ενέργειες των παιδιών χαρακτηρίστηκαν από την ανάπτυξη εικασιών σχετικά με το αν οι συσχετίσεις μεταξύ των μεταβλητών μηκών μιας κατασκευής είναι προσθετικές ή πολλαπλασιαστικές.

Το επεισόδιο που ακολουθεί αποτελεί παράδειγμα εξέλιξης της μετακίνησης συσχέτισης σε μετακίνηση ελέγχου. Οι μαθητές (Ομάδα 7 – Τμήμα Α1) μέσω μιας διαδικασίας κατασκευής του νι με δύο μεταβλητές (Πίνακας 1) έχουν κατασκευάσει ένα μοντέλο του γράμματος για τιμές :x=100 και :ψ=120. Όταν ο ερευνητής ζητάει την κατασκευή ενός όμοιου μοντέλου του γράμματος με :x=120 τα παιδιά συγχρονίζουν τη μετακίνηση και των δύο μεταβολέων αναπτύσσοντας παράλληλα εικασίες για το είδος της σχέσης μεταξύ των μεταβαλλόμενων μεγεθών.

ΠΙΝΑΚΑΣ 1: Η ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗΣ ΤΟΥ ΝΙ.

για νι :χ :ψ μ :χ δ 150 μ :ψ α 150 μ :χ τελος

131. Μ1: Εκεί [ενν. στο μεταβολέα (:ψ)] θα βάλουμε 140.

132. Ε: Πώς το βρήκες το 140;

133. Μ2: Δεν ξέρουμε, δεν είμαστε σίγουροι αν χωράει 140.

134. Ε: Για δοκιμάστε να δείτε τι γίνεται, χωράει; [Μετακινούν τους μεταβολείς στις τιμές χ=120 και ψ=140.]

135. Μ2: Α ορίστε, φτιάχτηκε.

136. Ε: 120, 140 / Είναι εντάξει το νι;

137. Μ1: Ναι, κύριε.

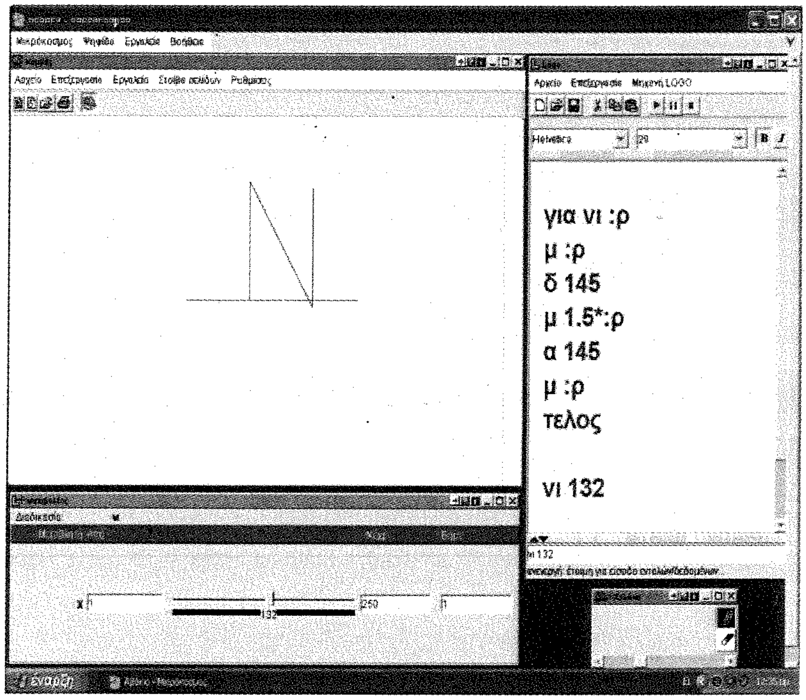
138. Μ2: Δηλαδή, μπορεί να βγει κάι κανόνας.

139. Ε: Ποιος κανόνας;

140. Μ2: Να 'ναι 20 παραπάνω .. πώς λέγεται αυτή; [ενν. το πλάγιο μήκος] 20 παραπάνω από τις παράλληλες γραμμές.

Βασιζόμενος στην κατασκευή ενός νέου μοντέλου του νι για τις τιμές 120 και 140 (γραμμή 135) ο Μ2 επιχειρεί να γενικεύσει την σχέση των δύο μεγεθών, που δείχνει να αντιλαμβάνεται ως προσθετική ('20 παραπάνω'), με τη μορφή ενός κανόνα (γραμμές 138, 140). Έτσι, ο πειραματισμός των μαθητών με τους μεταβολείς που είχε προηγηθεί όπως και η εστιασμένη μετακίνησή τους κατά την παρέμβαση του ερευνητή για συγκεκριμένες τιμές μοιάζει να ευνόησε την ανάπτυξη μιας 'βάσης' εικασιών για τον καθορισμό της σχέσης πλάγιου και κατακόρυφων μηκών. Οι επακόλουθες μετακινήσεις των μεταβολέων εκτυλίχθηκαν με άξονα τον έλεγχο της συγκεκριμένη προσθετικής σχέσης για διαφορετικά ζεύγη τιμών. Έτσι, από την ανάπτυξη υποθέσεων για το είδος της σχέσης μεταξύ των εμπλεκόμενων μηκών τα παιδιά εστιάστηκαν σταδιακά στον έλεγχό της.

Σε μια άλλη κατασκευή του νι (Ομάδα εστίασης - Τμήμα Α2) η εξέλιξη μιας ακολουθίας αντίστοιχων μετακινήσεων ελέγχου οδήγησε στη διάκριση, την έκφραση και τον περαιτέρω ακριβέστερο καθορισμό της πολλαπλασιαστικής σχέσης μεταξύ πλάγιου και κατακόρυφων μηκών της κατασκευής. Αρχικά οι μαθητές της διαπίστωσαν το αδιέξοδο των προσθετικών σχέσεων μέσα από τη γραφική αλλοίωση του σχήματος για κάποιες αριθμητικές τιμές. Έτσι, δοκίμασαν την πολλαπλασιαστική συσχέτιση που προήλθε όταν επιχείρησαν να εκφράσουν με μεταβλητές την υπόθεση 'το ένα είναι μιάμιση φορά το άλλο' που διατύπωσε ο ένας εκ των δύο μαθητών. Στο απόσπασμα που ακολουθεί τα παιδιά δοκιμάζουν τη χρήση μιας μεταβλητής χρησιμοποιώντας τη σχέση (1,5*:ρ) για την έκφραση του πλάγιου μήκους του γράμματος, όπου :ρ είναι η μεταβλητή που αντιστοιχεί στα κατακόρυφα μήκη. Η μετακίνηση του μοναδικού μεταβολέα οδηγεί στη διαπίστωση ότι το πλάγιο μήκος δεν εφαρμόζει ακριβώς στην οριζόντια γραμμή που είχαν σχεδιάσει τα παιδιά στη βάση του γράμματος προκειμένου να αξιολογούν την ακρίβεια του εκάστοτε γραφικού αποτελέσματος *(Σχήμα 4)*.



Σχήμα 4: Το νι με μία μεταβλητή.

98. Μ1: Το ίδιο πράγμα είναι και ακόμα χειρότερα [ενν. η αλλοίωση].

99. Μ2: Μήπως αυτό δεν είναι μιάμιση φορά;

100. Μ1: Είναι ένα και 45.

Στο παραπάνω απόσπασμα σημειώνουμε ότι η πρόβλεψη του M1 για την τιμή που αντιστοιχεί στο πλάγιο τμήμα (γραμμή 100) προηγείται της δοκιμής της αντίστοιχης σχέσης στο υπολογιστικό περιβάλλον. Τέτοιες προσπάθειες πρόβλεψης αφενός αναδεικνύουν την εμπειρία της προηγηθείσας μετακίνησης των μεταβολέων όσο και την ανάγκη ελέγχου της μεταβολής για την εξάλειψη των γραφικών δυσχερειών που εξακολουθούν να ανακύπτουν. Με τη δυνατότητα χρήσης και έκφρασης μιας σχέσης συμβολικά δημιουργήθηκε το έδαφος για την περαιτέρω επέκταση των διορθωτικών ενεργειών των παιδιών στην προσέγγιση του κατάλληλου πολλαπλασιαστικού παράγοντα για τον οποίο θα αποφευχθεί η αλλοίωση του σχήματος. Η διαδικασία πειραματισμού στο απόσπασμα αυτό βρίσκεται σε εξέλιξη αναδεικνύοντας τη δυναμική φύση της δημιουργίας πεδίων ελέγχου για όλο και περισσότερο ακριβέστερες συσχετίσεις μέσα από την ανάπτυξη νέων σχημάτων ενορχηστρωμένων ενεργειών.

Εξομάλυνση και μετακίνηση γενίκευσης

Οι μετακινήσεις *γενίκευσης* αναδύθηκαν ως περισσότερο εξελιγμένες μορφές των μετακινήσεων ελέγχου και, συνήθως, εμφανίστηκαν αλληλοδιαπλεκόμενες με προηγούμενες κατηγορίες μετακινήσεων σημαίνοντας την επιτυχή αυξομείωση μιας κατασκευής. Στις μετακινήσεις γενίκευσης οι μαθητές είχαν διακρίνει την ανάγκη πολλαπλασιαστικής συσχέτισης για την αυξομείωση των κατασκευών και μπορούσαν να εφαρμόζουν τη στρατηγική τους σε νέες κατασκευές εστιαζόμενοι απευθείας στην διενέργεια των απαραίτητων πράξεων και τη διαμόρφωση των αντίστοιχων συναρτησιακών σχέσεων.

Σε αυτό το πλαίσιο η συναρτησιακή έκφραση της σχέσης μιας μεταβλητής με βάση μια άλλη μεταβλητή στάθηκε η δυσκολότερη μορφή συσχέτισης ιδιαίτερα σε περιπτώσεις που τα εμπλεκόμενα αριθμητικά μεγέθη δεν έδιναν ακέραια πηλίκα. Σε αρκετές περιπτώσεις η διαδικασία αυτή διευκολύνθηκε όταν προηγήθηκαν συσχετίσεις μεγεθών με ακέραια πηλίκα. Σε μια κατασκευή του βήτα (Ομάδα εστίασης – Τμήμα Α1) οι μαθητές πέτυχαν την αυξομείωση του προτύπου μέσα από την επέκταση των διαδικασιών διαμέρισης με ακέραια πηλίκα, που είχαν ήδη ακολουθήσει με επιτυχία σε προηγούμενη κατασκευή του ξι (τρεις παράλληλες οριζόντιες γραμμές, η μεσαία εκ των οποίων ήταν μικρότερη από τις άλλες δύο που ήταν ίσες και συμβολίστηκαν με :χ). Στην κατασκευή αυτή το μεσαίο μήκος είχε συμβολιστεί με :χ/2, σχέση που προέκυψε από τη διαίρεση των σταθερών τιμών 100 και 50 που είχαν τα δύο μεγέθη στο αντίστοιχο πρότυπο του ξι. Το βήτα δόθηκε στη συγκεκριμένη ομάδα κατά τη διαδικασία ανταλλαγής από μια ομάδα που το κατασκεύασε αρχικά με δύο μεταβλητές (βλ. διαδικασία στον Πίνακα 2, αριστερά, τιμές προτύπου χ=0,44 και ψ=100) χωρίς να έχει καταφέρει την αυξομείωσή του.

ΠΙΝΑΚΑΣ 2: Η ΑΡΧΙΚΗ (ΑΡΙΣΤΕΡΑ) ΚΑΙ Η ΤΕΛΙΚΗ (ΔΕΞΙΑ) ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗΣ ΤΟΥ ΒΗΤΑ.

για βήτα :x:ψ μ:ψ δ 90 επανάλαβε 180 [μ :x δ 1] α 180 επανάλαβε 180 [μ :x δ 1] δ 90 τέλος	για βήτα :ψ μ :ψ δ 90 επανάλαβε 180 [μ :ψ/227.3 δ 1] α 180 επανάλαβε 180 [μ :ψ/227.3 δ 1] δ 90 τέλος

Στην αυξομειούμενη κατασκευή η μεταβλητή (:χ) αντικαταστάθηκε από τη σχέση (:ψ/227,3) αφού στρογγυλοποιήθηκε το αποτέλεσμα της διαίρεσης 100:0,44 = 227,272727272 … (βλ. διαδικασία στον Πίνακα 2, δεξιά).

[Ο Μ1 μετακινεί το μοναδικό μεταβολέα (:χ) και το γράμμα βήτα αυξομειώνεται.]

221. Μ1: [Στον Ε.] Είδατε;

222. Ε: Α, πολύ ωραία. Ναι, αλλά πώς βρήκατε το νούμερο στο διαιρέτη;

223. Μ2: Διαιρέσαμε το 100 με το 0,44 και βγαίνει 227,3.

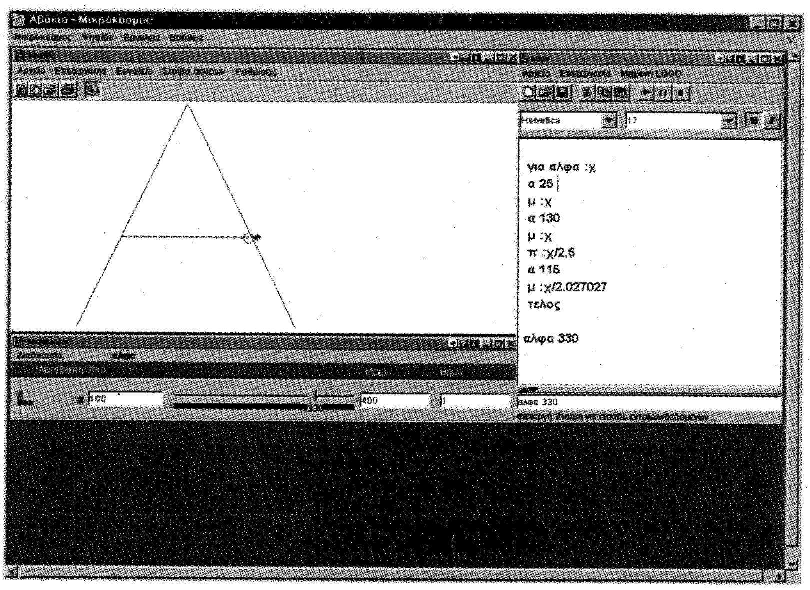
Ο Μ1 μετακινεί το μοναδικό μεταβολέα (:ψ) ως ένδειξη επιβεβαίωσης της πολλαπλασιαστικής μεθόδου στην οποία βασίστηκε η συσχέτιση των εμπλεκόμενων μεγεθών. Στην κατασκευή του ξι τα παιδιά ασχολήθηκαν αποκλειστικά με ακέραιες διαμερίσεις της μοναδικής μεταβλητής-μονάδας. Εδώ, η κατασκευή ολοκληρώθηκε με βάση την επέκταση της πολλαπλασιαστικής στρατηγικής που δοκιμάστηκε στο ξι, η ορθότητα της οποίας εμφανίζεται να είναι ανεξάρτητη από το αριθμητικό αποτέλεσμα. Με αυτή την έννοια το συγκεκριμένο επεισόδιο είναι ενδεικτικό της διαφοροποίησης του τρόπου χρήσης του μεταβολέα ως συνδέσμου υποστήριξης στρατηγικών καθοδηγούμενων από ιδιότητες και σχέσεις και όχι από διαισθητικές οπτικές ή συγκεκριμένου τύπου αριθμητικές τιμές.

Σε περιπτώσεις που κατά τη μετακίνηση γενίκευσης το σχήμα αλλοιωνόταν ή εμφανίζονταν γραφικές ατέλειες σε συγκεκριμένα σημεία του οι επακόλουθες ενέργειες εξομάλυνσης με τη χρήση του μεταβολέα αφορούσαν κυρίως το σχήμα ελέγχου και φάνηκε να ευνοούν την περαιτέρω διασύνδεση των συμβολικών εκφράσεων με το γραφικό αποτέλεσμα. Στο παράδειγμα που ακολουθεί τα παιδιά της ίδιας ομάδας έχουν κατασκευάσει το αυξομειούμενο άλφα με μια μεταβλητή (:x).

ΠΙΝΑΚΑΣ 3: Η ΑΡΧΙΚΗ ΚΑΙ Η ΤΕΛΙΚΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗΣ ΤΟΥ ΑΛΦΑ.

για άλφα :χ :ψ :υ α 25 μ :χ α 130 μ :χ π :ψ α 115 μ :υ τελος	για άλφα :χ α 25 μ :χ α 130 μ :χ π :χ/2.5 α 115 μ :χ/2.03 τελος

Οι συναρτησιακές σχέσεις στο αυξομειούμενο μοντέλο του γράμματος προέκυψαν στο πλαίσιο της εφαρμογής της πολλαπλασιαστικής συσχέτισης στο γράμμα άλφα ενώ οι εμφανιζόμενοι συντελεστές είναι πηλίκα που προέκυψαν από τις διαιρέσεις των σταθερών τιμών των μηκών του προτύπου (:x=75, :ψ=30 και :υ=37). Πιο συγκεκριμένα: 75:30=2,5 και 75:37=2,03. Η τιμή 2,03 είναι το αποτέλεσμα στρογγυλοποίησης που έγινε από τους μαθητές, καθώς το πραγματικό αποτέλεσμα της διαίρεσης 75:37 είναι ο περιοδικός δεκαδικός 2,027027... Η παράσταση (:χ/2.03) αντιστοιχεί στο μήκος του οριζόντιου τμήματος του άλφα. Τα παιδιά είχαν ήδη εφαρμόσει με επιτυχία τη συγκεκριμένη στρατηγική σε προηγούμενο γράμμα τους (ξι) και στο άλφα επιχείρησαν τη γενίκευσή της. Η επακόλουθη μετακίνηση γενίκευσης του μοναδικού μεταβολέα του (:x) σε όλο και μεγαλύτερες τιμές που αποκάλυψε ότι το οριζόντιο τμήμα δεν εφάρμοζε ακριβώς στην πλάγια γραμμή στην οποία κατέληγε αλλά υπήρχε ένα εμφανές κενό *(Σχήμα 5)*.



Σχήμα 5: Το αυξομειούμενο άλφα με μία μεταβλητή.

Συνδέοντας άμεσα το γραφικό πρόβλημα με την ακρίβεια της διαίρεσης από την οποία προέκυψε η τιμή 2,03 (*Μ2: Πρέπει να κάνουμε πιο ακριβή ...διαίρεση*), τα παιδιά την αντικατέστησαν στον κώδικα κατασκευής με την τιμή 2,027027, που θεώρησαν ότι εκφράζει ακριβέστερα το πραγματικό αποτέλεσμα. (βλ. διαδικασία στο σχήμα 5).

292: Μ2: Το βάλαμε όλο [ενν. το 2,027027] για να μην υπάρχει μια κενή γραμμή εδώ πέρα [ενν. το μικρό κενό στο σχήμα].

293: Μ1: Γιατί εδώ, όταν το μεταβάλλαμε αυτή τη γραμμή, δεν έκλεινε εντελώς.

294: Μ2: [Μετακινώντας το μεταβολέα (:χ)] Καλύτερη είναι όμως η διαφορά. Πριν είχε πιο πολύ.

295: Μ1: Να το κάνουμε ακόμα πιο πολύ.

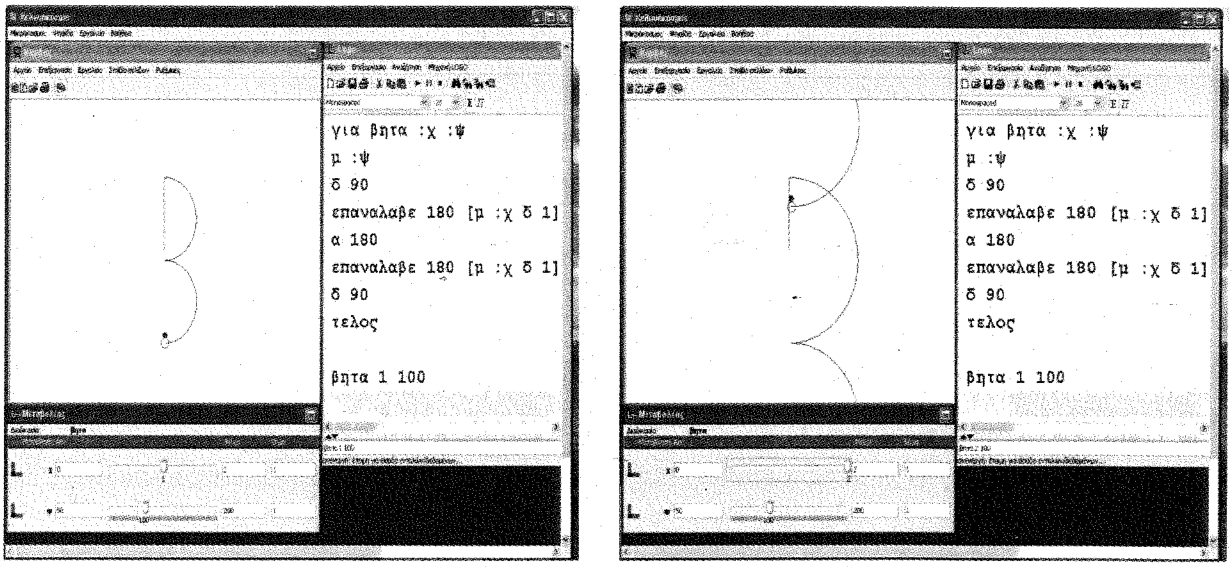
296: Μ2: [Βάζοντας κι άλλο 027 στον αριθμό 2,027027 στον παρονομαστή] Κι άλλο ένα μηδέν δύο εφτά. [Κινεί και πάλι το μεταβολέα για να διαπιστώσει τη βελτίωση του γραφικού προβλήματος].

Από την πλευρά του μαθηματικού περιεχομένου το πεδίο στο οποίο λαμβάνει χώρα η διορθωτική διαδικασία είναι αυτό της δυναμικής συμμεταβολής των πλευρών όμοιων γεωμετρικών σχημάτων με σταθερό λόγο ομοιότητας. Το 'πιο πολύ' του Μ2 (γραμμή 295) μοιάζει να αναφέρεται τόσο στον αριθμό των ψηφίων του παρονομαστή για την ακριβή προσέγγιση του μεγέθους του παρονομαστή όσο και στην καλύτερη δυνατή ακρίβεια στο σχήμα [4]. Επισημαίνουμε, όχι το μέτρο και την ακρίβεια της προσέγγισης, αλλά την εγκαθίδρυση της διασύνδεσης συμβολικής και γραφικής αναπαράστασης μέσα από την αλλαγή της μετακίνησης του μεταβολέα με βάση το σχήμα ελέγχου για την εξομάλυνση του γραφικού προβλήματος.

Εξομάλυνση και μετακίνηση προσέγγισης

Οι μετακινήσεις *προσέγγισης* σχετίστηκαν με την ακρίβεια στην έκφραση και τον υπολογισμό μέτρων μεγεθών, ενώ διέτρεξαν το σύνολο της εργασίας των παιδιών εμφανιζόμενες σε διαφορετικά κατασκευαστικά στάδια της εργασίας τους αλληλένδετες με άλλα σχήματα μετακίνησης. Οι συγκεκριμένες μετακινήσεις συνοδεύονταν, συνήθως, από την αλλαγή των ορίων μεταβολής μιας μεταβλητής στο μεταβολέα ή/και την αλλαγή του βήματος μεταβολής (π.χ. με ενσωμάτωση δεκαδικών αριθμών).

Για παράδειγμα, για την κατασκευή ενός προτύπου του βήτα οι μαθητές της ομάδας του προηγούμενου επεισοδίου χρειάστηκε να εστιαστούν στις αριθμητικές τιμές των ορίων μεταβολής της μεταβλητής (:χ) και να ενσωματώσουν δεκαδικούς αριθμούς στο αντίστοιχο βήμα μεταβολής. Αρχικά, οι μαθητές εκτέλεσαν τη διαδικασία του Πίνακα 2 (αριστερά) για :x=1 και :ψ=100. Το σχήμα εμφανίστηκε παραμορφωμένο (Σχήμα 6 αριστερά). Η μετακίνηση του μεταβολέα (:χ) (με όρια τιμών 0 έως 2 και βήμα 1) έδειξε ότι για :x=0 τα ημικύκλια εξαφανίζονταν και για :x=2 τα ημικύκλια έβγαιναν εκτός του κατακόρυφου μήκους *(Σχήμα 6 δεξιά)*.



Σχήμα 6: Το βήτα για :χ=1 (αριστερά) και :χ=2 (δεξιά).

Προκειμένου να ελέγξουν τη μετακίνηση των ημικυκλίων εκτός του κατακόρυφου τμήματος, αρχικά οι μαθητές διόρθωσαν τα όρια τιμών της μεταβλητής (:χ) μεταξύ 0 και 1. Έτσι, δημιουργήθηκε ένα πλαίσιο ελέγχου της αλλαγής της 'απότομης' μεταβολής του ημικυκλίου και οι επακόλουθες ενέργειες εξομάλυνσης εστιάστηκαν στην εισαγωγή δεκαδικού αριθμού για το βήμα της μεταβολής.

304. [Στον Ε.] Μ2: Κύριε δεν παίρνει δεκαδικούς;

305. Ε: Για δοκιμάστε.

306. Μ1: [Στον Μ2] Πιο μικρό απ' το 1 [ενν. το βήμα μεταβολής στο μεταβολέα (:χ)].

307. Μ2: Θα βάλω μηδέν κόμμα 1. [Στον Ε.] Με τελεία γίνεται;

308. Ε: Ναι.

309: [Θέτοντας βήμα 0,1] Μ2: Μηδέν κόμμα 1.

310: Ε: [Στον Μ2] Για μεγάλωσέ το τώρα.

311: [Καθώς ο Μ2 κινεί το μεταβολέα (:χ)] Μ1: Α! Τα ημικύκλια μεγαλώνουνε πιο αργά τώρα.

312: Μ2: Άψογο.

Στην εξέλιξη της προσεγγιστικής διαδικασίας οι μαθητές συμπεριέλαβαν περαιτέρω αλλαγές στο βήμα μεταβολής με χρήση δύο δεκαδικών ψηφίων, που κατέληξαν στην τιμή 0,01. Οι επακόλουθες μετακινήσεις προσέγγισης

οδήγησαν τους μαθητές στην κατασκευή δικού τους προτύπου του βήτα για :ψ=100 και :x=0,44.
Στο παραπάνω επεισόδιο η μετακίνηση προσέγγισης αριθμητικών τιμών είχε ως αφετηρία την αναγνωριστική μετακίνηση του μεταβολέα. Η ανάγκη κατασκευής ενός αποδεκτού (‘κλειστού’) προτύπου του βήτα οδήγησε στον ακριβέστερο καθορισμό των ορίων και του βήματος της μεταβολής του ημικυκλίου μέσω του μεταβολέα. Αντίστοιχες διαδικασίες ακολούθησαν οι περισσότερες ομάδες των μαθητών στην προσπάθεια να εντοπίσουν με ακρίβεια τις τιμές των αλληλεξαρτώμενων μηκών των κατασκευών τους. Σε αρκετές περιπτώσεις οι διαδικασίες αυτές συνδυάστηκαν με την επιδίωξη της σχεδιαστικής αρτιότητας του προτύπου του γράμματος που οι μαθητές θα αυξομείωναν στη συνέχεια. Οι ομάδες που κατάφερναν να κατασκευάσουν αυξομειούμενα μοντέλα των γραμμάτων τους βασίζονταν στη συσχέτιση των συγκεκριμένων αριθμητικών τιμών και την πολλαπλασιαστική έκφρασή της με μία μεταβλητή. Ακολουθούσε η επικύρωση της επιτυχούς αυξομείωσης του γράμματος με τη μετακίνηση (γενίκευσης) του μοναδικού μεταβολέα. Σε περίπτωση που εμφανιζόταν γραφική δυσχέρεια άνοιγε ένα νέο διορθωτικό πεδίο που τροφοδοτούσε την ανάπτυξη αντίστοιχων ενεργειών εξομάλυνσης από την πλευρά των μαθητών στο πλαίσιο νέων σχημάτων ενορχηστρωμένων ενεργειών.

ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Τα αναδυόμενα σχήματα δυναμικού χειρισμού των γεωμετρικών κατασκευών που παρουσιάστηκαν συνιστούν πτυχές της διαδικασίας “γέννησης” του μεταβολέα ως εργαλείου δίνοντας ταυτόχρονα μια εικόνα ανέλιξης του πειραματισμού των μαθητών από το απλούστερο προς το συνθετότερο. Η αλληλοδιαπλοκή της χρήσης του μεταβολέα και των αντίστοιχων σχημάτων μετακίνησής του φαίνεται να συμφωνεί με ερευνητικά ευρήματα που επισημαίνουν την ισχυρή διασύνδεση ανάμεσα στην εξέλιξη της χρήσης ενός εργαλείου και στις διαδικασίες κατασκευής μαθηματικών νοημάτων που τη συνοδεύουν (Artigue, 2002). Στην παρούσα έρευνα η διασύνδεση αυτή συνδυάστηκε με την εξέλιξη των κατασκευαστικών πρακτικών των μαθητών από οπτικές/διαισθητικές σε μαθηματικοποιημένες εκδοχές. Αυτό που παρατηρήσαμε μέσα από τα παρατιθέμενα επεισόδια εξομάλυνσης ήταν η εξειδικευμένη αλληλεπίδραση μεταξύ διαφορετικών εργαλείων (instruments) που δημιούργησαν οι μαθητές και βασίστηκαν τόσο στην χρήση του υπολογιστικού περιβάλλοντος όσο και στα μαθηματικά που διέπουν την κατασκευή αυξομειούμενων γεωμετρικών σχημάτων. (Για την ανάγκη συνδυαστικής περιγραφής των ζητημάτων που αφορούν τη διαδικασία «γέννησης» ενός υπολογιστικού εργαλείου με τα μαθηματικά βλ. επίσης Artigue & Bardini in press).

Στην αναγνωριστική μετακίνηση τα διορθωτικά κριτήρια βασίστηκαν στην οπτική αναγνώριση της αλληλεξάρτησης των μεγεθών της κατασκευής χωρίς τη διάκριση σχέσεων αναλογίας. Στη μετακίνηση συσχέτισης τα παιδιά έδειξαν να αποκτούν έλεγχο της διορθωτικής διαδικασίας με βάση συγκεκριμένα κριτήρια (π.χ. διπλασιασμός και υποδιπλασιασμός των μηκών) που απηχούσαν στην προσπάθεια εξεύρεσης της σχέσης των μηκών για τα οποία κατασκευάζονται όμοια μοντέλα του ίδιου σχήματος. Στη μετακίνηση ελέγχου η εξομάλυνση εμπλουτίστηκε από στοιχεία συνδυαστικής επεξεργασίας των αλγεβρικών και των γεωμετρικών χαρακτηριστικών της κατασκευής μέσα από τον έλεγχο συγκεκριμένων υποθέσεων που βασίστηκαν σε ενδείξεις και συμπεράσματα προηγούμενων μετακινήσεων. Η έκφραση της σχέσης κατακόρυφου πλάγιου μήκους του νι πολλαπλασιαστικά βασίστηκε σε συμπεράσματα μεμονωμένων δοκιμών με ζεύγη τιμών και αποτέλεσε τη βάση για την εξέλιξη της διορθωτικής διαδικασίας με στόχο την επιλογή κατάλληλου αριθμητικού συντελεστή. Στην ανακατασκευή του βήτα η εστίαση των παιδιών επικεντρώθηκε στη συγκρότηση πολλαπλασιαστικών σχέσεων και η επακόλουθη μετακίνηση γενίκευσης σηματοδότησε την επέκταση της πολλαπλασιαστικής στρατηγικής και σε αριθμητικές συσχετίσεις που αφορούν μη ακέραια πηλίκα. Τέλος, στις μετακινήσεις προσέγγισης η διαχείριση των αριθμητικών χαρακτηριστικών του μεταβολέα (ορίων τιμών και βήματος μεταβολής) συνοδεύτηκε από την εστίαση των μαθητών στις αναγκαίες προσεγγίσεις για την έκφραση και τον υπολογισμό μέτρων μεγεθών που είχαν προκύψει από τον πειραματισμό τους με τα μεταβλητά μεγέθη των κατασκευαζόμενων γραμμάτων.

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι η παρουσίαση των καταγραφόμενων σχημάτων με τη σειρά που προηγήθηκε αποτελεί μια γενική κατηγοριοποίηση που μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για την περιγραφή της χρονικής αλληλουχίας των κατασκευαστικών φάσεων κάθε ομάδας από την έναρξη ως την ολοκλήρωση μιας κατασκευής. Πρέπει να σημειώσουμε ότι τα περισσότερα εκ των επεισοδίων της αναγνωριστικής μετακίνησης έλαβαν χώρα κατά τις πρώτες διδακτικές ώρες, όπως και οι μετακινήσεις συσχέτισης που ακολούθησαν τη χρήση μεταβλητών και τον πειραματισμό των παιδιών για την εύρεση και μετέπειτα συσχέτιση 'κατάλληλων' αριθμητικών τιμών. Στα επόμενα στάδια πειραματισμού τους τα παιδιά επέστρεφαν στην αναγνωριστική μετακίνηση μόνο για να διαπιστώσουν το είδος της αλλαγής που προκαλεί η αντιστοίχιση ενός συγκεκριμένου μεγέθους με μια νέα μεταβλητή. Σε αρκετές περιπτώσεις η ολοκλήρωση της κατασκευής του πρώτου γράμματος με χρήση μιας μεταβλητής ευνόησε την έναρξη του πειραματισμού των μαθητών από τον έλεγχο σχέσεων μεταξύ αριθμητικών τιμών και μεταβλητών (μετακινήσεις ελέγχου) παρακάμπτοντας τις αναγνωριστικές αλλά και τις μετακινήσεις συσχέτισης. Οι μετακινήσεις ελέγχου είχαν τη μεγαλύτερη συχνότητα εμφάνισης και στα δύο τμήματα ενώ οι μετακινήσεις προσέγγισης εμφανίστηκαν σε λίγες περιπτώσεις όταν χρειάστηκε η ακριβής προσέγγιση του μέτρου συγκεκριμένων μεγεθών (κυρίως του βήματος της χελώνας) στα γράμματα με κυκλικά ή ημικυκλικά μέρη.

Αναφορικά με τα ποσοτικά στοιχεία της έρευνας (βλ. Ψυχάρης, 2005): πριν την ανταλλαγή των εργασιών των ομάδων μεταξύ τους (που έλαβε χώρα κατά τη 10η διδακτική ώρα) μόνο τέσσερις από τις δεκατρείς ομάδες μαθητών σε κάθε τμήμα δεν κατάφεραν να παραδώσουν αυξομειούμενες γεωμετρικές κατασκευές με χρήση συναρτησιακών σχέσεων, ενώ μετά την ανταλλαγή των εργασιών όλες οι ομάδες κατασκεύασαν αυξομειούμενες κατασκευές αναπτύσσοντας τα περισσότερα από τα καταγραφόμενα σχήματα δυναμικού χειρισμού. Συμπληρωματικά, ένα ακόμη ενδιαφέρον εύρημα της έρευνας αποτέλεσε το ότι οι μαθητές στην πλειονότητά τους και καθόλη τη διάρκεια του πειραματισμού τους εστιάστηκαν στη μελέτη των αναλογικών σχέσεων που αφορούσαν τις πλευρές των αυξομειούμενων (όμοιων) γεωμετρικών σχημάτων θεωρώντας ότι οι εκάστοτε γωνίες παραμένουν σταθερές. Οι ελάχιστες ομάδες μαθητών που πειραματίστηκαν με τη χρήση μεταβλητών για γωνίες, εγκατέλειψαν τη μέθοδο αυτή όταν διαπίστωναν ότι η μετακίνηση των αντίστοιχων μεταβολέων άλλαζε εμφανώς τη μορφή του αρχικού σχήματος. Προκύπτει, λοιπόν, ότι ο συνδυασμός συμβολικής έκφρασης και δυναμικού χειρισμού των γεωμετρικών μεγεθών έπαιξε καθοριστικό ρόλο στις πρακτικές και τα νοήματα που ανέπτυξαν οι μαθητές στην παρούσα έρευνα. Η περαιτέρω διερεύνηση των ζητημάτων αυτών με την χρήση διαφορετικού τύπου υπολογιστικών εργαλείων (π.χ. δυναμικής γεωμετρίας) αποτελεί πρόκληση για νέες μελλοντικές έρευνες.

Τέλος, για την περιγραφή της σχέσης μαθηματικής γνώσης και της δημιουργίας εργαλείου η ανάλυση θα μπορούσε να έχει δομηθεί με άξονα τη λεπτομερέστερη μελέτη της αλληλεπίδρασης των μαθητών με τα διαφορετικά πεδία αναπαράστασης, όπως π.χ. αριθμητικού-αλγεβρικού πεδίου και του γεωμετρικού σχήματος, που μπορεί να θεωρηθούν και ως σημειωτικά πεδία αναπαράστασης (Duval, 1995). Στο παρόν άρθρο αφήσαμε τέτοιες αλληλεπιδράσεις να διαφανούν μέσα από τα επεισόδια της εξομάλυνσης και εστιαστήκαμε στην ανάδειξη της ποικιλίας των αναδυόμενων σχημάτων δυναμικού χειρισμού και της διαπλοκής τους με τις διαδικασίες κατασκευής μαθηματικών νοημάτων για τις έννοιες λόγου και αναλογίας.

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

1. Ο μεταβολέας εμφανίζεται μόνο αν σε μια διαδικασία με τη γλώσσα Logo χρησιμοποιηθεί μία τουλάχιστον μεταβλητή για το συμβολισμό γεωμετρικών μεγεθών. Ο ορισμός μιας τέτοιας διαδικασίας συνοδεύεται από την απόδοση κάποιων αρχικών αριθμητικών τιμών στις χρησιμοποιούμενες μεταβλητές από το χρήστη ενώ με το πάτημα ενός κουμπιού εμφανίζεται το γραφικό αποτέλεσμα που αντιστοιχεί στις συγκεκριμένες τιμές.

2. Κάθε μεταβολέας έχει αυτόματα ορισμένη από το λογισμικό αρχική και τελική αριθμητική τιμή, μεταξύ των οποίων μπορεί να 'κινούνται' οι τιμές της αντίστοιχης μεταβλητής. Οι τιμές αυτές για κάθε μεταβολέα αντιστοιχούν στο μισό και στο διπλάσιο της αρχικής τιμής που αποδίδεται κατά τον ορισμό της διαδικασίας στην αντίστοιχη μεταβλητή.

3. Για παράδειγμα, αν χρησιμοποιηθεί η μεταβλητή που αντιστοιχεί στο κατακόρυφο ύψος ενός γράμματος (π.χ. του ρο) και στο βήμα του ημι-κυκλίου, η αλλοίωση του σχήματος, οφειλόμενη στη μεγάλη διαφορά του μεγέθους των αντίστοιχων αριθμητικών τιμών, αποκτά χαρακτήρα έντονης παραμόρφωσης που μπορεί να διορθωθεί μόνο μέσα από την επιλογή κατάλληλης συναρτησιακής σχέσης για την έκφραση της μιας μεταβλητής με βάση την άλλη.

4. Στην πραγματικότητα, η τιμή 37 για το οριζόντιο μήκος στο πρότυπο δεν είναι ακριβής. Στο ισοσκελές τρίγωνο που σχηματίζουν τα πλάγια τμήματα και το οριζόντιο (με γωνία κορυφής 50°) η βάση και οι ίσες πλευρές είναι ασύμμετρα μεγέθη. Το σχήμα στο πρότυπο φάνηκε να κλείνει γιατί οι αρχικές τιμές ήταν μικρές και αλλαγές σε αυτή την κλίμακα δεν μπορεί να γίνουν αντιληπτές κατά την εξεικόνισή τους την οθόνη.

ABSTRACT

Recent research approaches studying the role of computational tools in the teaching and learning of mathematics have analyse it by paying a particular attention to the interaction between the development of mathematical knowledge and of instrumental genesis (Guin et al., 2005). The analytical frame of instrumental genesis (Verillon & Rabardel, 1995) is based on the distinction between artefact and instrument with the latter having a psychological component (scheme), indicating the dialectic relationship between activity and implicit mathematical knowledge, that a subject operationalises when using the artefact to carry out some task (Trouche, 2005). The activity that employs and is shaped by the use of instruments (instrumented activity) is directed towards the artefact, eventually transforming it for specific uses (instrumentalisation), as well as towards the subject leading to the development or

appropriation of schemes (of instrumented action) in which the subject is shaped by actions with the artefact (instrumentation) (Artigue, 2002).

The present paper aims to offer a different perspective on the process of instrumental genesis based on the kinesthetic control of figures in a computer environment – called 'Turtleworlds' - which combines symbolic notation through a programming language (Logo) with dynamic manipulation of variable procedure values using a specially designed computational tool called variation tool (Kynigos, 2004). The 13-year-old students worked in collaborative groups of two to build enlarging-shrinking figural models of capital letters of varying sizes in proportion by using only one variable to express the multiplicative relationships within each geometrical figure which very often are perceived by students as additive rather than multiplicative (Hart, 1981, 1984˙ Vergnaud 1983). Students had to continually connect formal and graphical descriptions of geometrical figures and by manipulating variable segments or angles to appreciate the inappropriateness of additive strategies. This is augmented by the idea of constructionism (Harel & Papert, 1991) since these figures were their own productions and would be used by others later.

The analysis elaborates the role of students' exploration with the dynamic manipulation feature of the computer environment in the process of instrumental genesis and highlights the relationship between the evolution of the dragging schemes developed by the children with their evolving mathematical knowledge for enlarging-shrinking geometrical figures. So far, we discuss students' use of normalising (similar to the sense of Ainley et al., 2001), an activity in which children 'correct' the distorted geometrical figures or other graphical abnormalities on them through the use of the available tools.

The analysis revealed the different dynamic manipulation schemes generated as students begin to use the variation tool for exploring the construction of enlarging-shrinking geometrical figures. Under the constructionist perspective these schemes illustrate the dialectic relationship between the evolution of instrumental genesis and student's progressive focusing on relations and dependencies underlying the current geometrical constructions and its representations. According to the results, the key difference amongst the described schemes is that in the evolution of instrumental

genesis the appreciation of the computer feedback was much more closely bound into correlations rooted in action (within the same or a new dynamic manipulation scheme) and inextricably linked with the use of the variation tool. As soon as the variation tool became part of students' activity, students' instrumented actions progressively evolved from the visual to the conceptual level indicated by the development of mathematical practices involving the appreciation of the (scalar) relation between the lengths of similar geometrical figures, the identification and testing of multiplicative functional relationships among particular variable lengths as well as the generalization of employed multiplicative strategies.

Keywords: enlarging-shrinking geometrical figures, dynamic manipulation, ratio, proportion

ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Ainley, J., Pratt, D. & Hansen, A. (2006). Connecting engagement and focus in pedagogic task design. *British Educational Research Journal, 32* (1), 23-38.

Ainley, J., Pratt, D. & Nardi, E. (2001). Normalising: Children's activity to construct meanings for trend. *Educational Studies in Mathematics, 45*, 131-146.

Artigue, M. (2002). Learning Mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 7* (3), 245-274.

Artigue, M. & Bardini, C. (in press) New didactical phenomena prompted by TI-nspire specificities – the mathematical component of the instrumentation process. Paper presented at the *6th Conference of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME)*. Lyon, France.

Arzarello, F., Micheletti, C., Olivero, F., Robutti, O., Paola, D. & Gallino, G. (1998) Dragging in Cabri and modalities of transition from conjectures to proofs in geometry. In A. Olivier & K. Newstead (Eds.), *Proceedings of the 22nd PME Conference* (vol. 2, pp. 32-39). Stellenbosch, South Africa: University of Stellenbosch.

Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, P.& Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational Researcher*, *32* (1), 9-13.

Drijvers, P. & Trouche, L. 2008. From artifacts to instruments, A theoretical framework behind the orchestra metaphor. In G.W. Blume & M. K. Heid (Eds.), *Reaserch o technology and the teaching and learning of mathematics: Voc 2 cases and perspectives* (p.p. 363 - 391). Charlotte, NC: Information Age.

Duval, R. (1995). *Semiosis et Pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Bern: Peter Lang.

Guin, D. & Trouche, L. (1999). The complex process of converting tools into mathematical instruments: The case of calculators. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 3* (3), 195-227.

Guin, D., Ruthven, K. & Trouche, L. (2005). *The didactical challenge of symbolic calculators: turning a computational device into a mathematical instrument.* New York NY: Springer.

Hadas, N., Hershkowitz, R. & Schwarz, B. B. (2000). The role of contradiction and uncertainty in promoting the need to prove in dynamic geometry environments. *Educational Studies in Mathematics*, 44, 127–150.

Harel, I. & Papert, S. (1991). *Constructionism: Research reports and essays*. Ablex Publishing Corporation, Norwood, New Jersey.

Hart, K. M. (Ed.) (1981). *Children's understanding of mathematics: 11-16*. John Murray, London.

Hart, K. M. (1984). *Ratio: Children's Strategies and Errors*, Windsor: NFER-Nelson.

Hölzl, R. (2001). Using dynamic geometry software to add contrast to geometric situations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 6*, 63-86.

Hoyles, C. & Noss, R. (1989). The computer as a catalyst in children's proportion strategies. *Journal of Mathematical Behavior*, 8, 53-75.

Karplus, R., Pulos, S. & Stage, E. K. (1983). Proportional reasoning of early adolescents. In R. Lesh, & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematical concepts and processes* (pp. 45-90). Orlando, FL: Academic Press. .

Κολέζα, Ε. (2000). *Γνωσιολογική και διδακτική προσέγγιση των στοιχειωδών μαθηματικών εννοιών*. Leader Books, Αθήνα.

Kynigos, C. (2004). A "black-and-white box" approach to user empowerment with component computing. *Interactive Learning Environments, 12* (1-2), 27-71.

Mariotti, M. A. (2000). Introduction to proof: The mediation of a dynamic software environment. *Educational Studies in Mathematics, 44*, 25-53.

Noss, R. & Hoyles, C. (1996). *Windows on mathematical meanings*. Dordrecht: Kluwer Academic Press.

Psycharis, G. & Kynigos, C. & (2004). Normalising geometrical constructions: A context for the generation of meanings for ratio and proportion. In M. J. Hoines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th PME Conference* (vol. 4, pp. 65-72). Bergen: Bergen University College.

Strauss, A. & Corbin, J. (1998). *Basics of qualitative research.* Sage Publications.

Tourniaire, F., & Pulos, S. (1985). Proportional Reasoning: A review of the literature. *Educational Studies in Mathematics*, *16* (2), 181-204.

Trouche, L. (2005). An instrumental approach to mathematics learning in symbolic calculators environments. In D. Guin, K. Ruthven & L. Trouche, L. (Eds.), *The didactical challenge of symbolic calculators: turning a computational device into a mathematical instrument* (pp. 137-162). New York NY: Springer.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. In R. Lesh, & M. Landau (Eds.) *Acquisition of mathematical concepts and processes* (pp. 127-174). Orlando, FL: Academic Press.

Vergnaud, G. (1998). A comprehensive theory of representation for mathematics education. *Journal of Mathematical behavior, 17* (2), 167-181.

Verillon, P. & Rabardel, P. (1995). Cognition and artefacts: a contribution to the study of thought in relation to instrumented activity. *European Journal of Psychology of Education, 10* (1), 77-101.

Χασάπης, Δ. (2001). *Διδακτική βασικών μαθηματικών εννοιών.* Μεταίχμιο, Αθήνα.

Χρίστου, Κ. & Φιλίππου, Γ. (1999). Άτυπα μοντέλα προβλημάτων αναλογίας. *Πρακτικά 16ου Πανελληνίου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας*, 138-151.

Ψυχάρης, Γ. (2005). Ανάπτυξη νοημάτων για τις έννοιες λόγου και αναλογίας σε προβλήματα αυξομείωσης γεωμετρικών κατασκευών με χρήση ειδικών εργαλείων υπολογιστικής τεχνολογίας. Διδακτορική διατριβή, Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών.

Διευθυνση Αλληλογραφιας
Γιώργος Ψυχάρης, Εργαστήριο Εκπαιδευτικής Τεχνολογίας, ΕΚΠΑ
E-mail: gpsych@ppp.uoa.gr