

5ο Πανελλήνιο Συνέδριο των Εκπαιδευτικών ψια τις ΤΠΕ

"Αξιοποίηση των Τεχνολογιών
της Πληροφορίας και της
Επικοινωνίας
στη Διδακτική Πράξη"

Σύρος 8, 9, 10 Μαΐου 2009



ΠΡΑΚΤΙΚΑ ΕΙΣΗΓΗΣΕΩΝ
ΤΟΜΟΣ Α'



Υπό την αιγίδα
του ΥΠΕΠΘ

5^ο Πανελλήνιο Συνέδριο των Εκπαιδευτικών για τις ΤΠΕ «Αξιοποίηση των Τεχνολογιών της Πληροφορίας και της Επικοινωνίας στη Διδακτική Πράξη»

Σύρος 8, 9, 10 Μαΐου 2009

**ΠΡΑΚΤΙΚΑ ΕΙΣΗΓΗΣΕΩΝ
ΤΟΜΟΣ Α'**

Επιμέλεια Έκδοσης

Τζιμόπουλος Νίκος
Πόρποδα Αριάδνη

Κατασκευή και χειρισμός προσομοιώσεων κίνησης με τη χρήση εξισώσεων

Φωτεινή Μουστάκη

Υποψ. Διδάκτορας, Εργαστήριο
Εκπαιδευτικής Τεχνολογίας, ΕΚΠΑ,
& Ερευνητικό και Ακαδημαϊκό
Ινστιτούτο Τεχνολογίας
Υπολογιστών
foimous@ppp.uoa.gr

Γιώργος Ψυχάρης

Μεταδιδακτορικός Ερευνητής,
Εργαστήριο Εκπαιδευτικής
Τεχνολογίας, ΕΚΠΑ
gpsych@ppp.uoa.gr

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στο άρθρο αυτό παρουσιάζεται μία έρευνα σχεδιασμού που αφορά στην εμπλοκή μαθητών Τ.Ε.Ε σε διαδικασίες κατασκευής και χειρισμού μοντέλων κίνησης με τη χρήση αντίστοιχων εξισώσεων σε ένα ειδικά σχεδιασμένο υπολογιστικό περιβάλλον. Ειδική αναφορά στην παρόύσα εργασία γίνεται στο ίδιο το υπολογιστικό περιβάλλον, στο σχεδιασμό και την εφαρμογή των εκπαιδευτικών δραστηριοτήτων στις οποίες ενεπλάκησαν οι μαθητές, ενώ δίνεται και περιγραφή ενδεικτικών αποτελεσμάτων. Στα ευρήματα, η νοηματοδότηση των εξισώσεων κίνησης, τις οποίες βρήκαν έτοιμες οι μαθητές στο περιβάλλον και χρησιμοποίησαν, αλλά και η κατασκευή νέων εξισώσεων, καταγράφεται ως μια δυναμική διαδικασία, αλληλένδετη με την οπτική αναπαράσταση της κίνησης και τη δυνατότητα τροποποίησής της μέσα από διαδικασίες διερεύνησης και πειραματισμού.

ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ: μοντελοποίηση, εξισώσεις κίνησης, προσομοιώσεις κίνησης

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στο παρόν άρθρο παρουσιάζουμε μία έρευνα σχεδιασμού αναφορικά με τη διαδικασία νοηματοδότησης εξισώσεων θέσης, ταχύτητας και επιτάχυνσης από μαθητές που χρησιμοποίησαν το υπολογιστικό περιβάλλον MoPiX¹ για την κατασκευή προσομοιώσεων κίνησης αντικειμένων σε ένα διδιάστατο χώρο. Στην έρευνα συμμετείχαν ομάδες μαθητών που εργάστηκαν στο εργαστήριο υπολογιστών του σχολείου τους στο πλαίσιο ενός διδακτικού πειράματος που βασίστηκε στη συνεργατική εργασία σε ομάδες, τη διερεύνηση ιδεών, τον πειραματισμό και την επικοινωνία (Κυνηγός, 2007). Κύριο σημείο εστίασης της έρευνας αποτέλεσαν οι διαδικασίες κατασκευής και χειρισμού μοντέλων κίνησης από τους μαθητές με τη χρήση αντίστοιχων εξισώσεων, καθώς και η αλληλεπίδραση τους με τις προσφερόμενες από το εργαλείο αναπαραστάσεις κατά τη διάρκεια των διαδικασιών αυτών.

Η έρευνα σχετικά με το πώς οι μαθητές κατανοούν συγκεκριμένες καταστάσεις κίνησης και τις εκφράζουν με εξισώσεις έχει αποτελέσει εδώ και χρόνια κεντρικό άξονα στο πεδίο της διδακτικής των φυσικών επιστημών (Trowbridge & McDermott, 1980), αλλά πρόσφατα και στο πεδίο της διδακτικής των μαθηματικών (Sherin, 2003). Πολλές από τις έρευνες και στις

¹ Το υπολογιστικό περιβάλλον MoPiX σχεδιάστηκε και αναπτύχθηκε από την ομάδα του London Knowledge Lab/Institute of Education/University of London (<http://www.lkl.ac.uk/mopix/>). Πληροφορίες για το λογισμικό στα ελληνικά παρέχονται από το διαδικτυακό τόπο του Εργαστηρίου Εκπαιδευτικής Τεχνολογίας (Ε.Ε.Τ) του Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών (<http://etl.ppp.uoa.gr/content/download/index.download.htm>).

δύο επιστημονικές περιοχές που έχουν στηρίχθει είτε στη μελέτη της εμπλοκής των μαθητών με προβληματικές καταστάσεις, είτε στη μελέτη της απλοϊκής (naïve) γνώσης του φυσικού κόσμου που κατέχουν πριν από την επίσημη διδασκαλία (diSessa, 1993), έχουν επισημάνει τις δυσκολίες των μαθητών σχετικά με συγκεκριμένες έννοιες -όπως για παράδειγμα η θέση, η ταχύτητα και η επιτάχυνση (Simpson et al., 2006)- και τις εξισώσεις που τις περιγράφουν.

Στο πλαίσιο αυτό έχει αναδύθει πρόσφατα η συστηματική μελέτη των εξισώσεων ως ένα αυτόνομο ερευνητικό πεδίο που μελετά το σχηματισμό, την έκφραση και την κατανόηση, εννοιών της φυσικής (Sherin, 2001a). Η σχετική έρευνα χαρακτηρίζεται από την προσπάθεια περιγραφής της δόμησης της γνώσης μέσα από τη διασύνδεση της μορφής των εξισώσεων και του εννοιολογικού περιεχομένου τους. Ο Sherin (2001b), για παράδειγμα, αναφέρθηκε στο συσχετισμό της δομής μιας εξισώσης με ένα σύνολο συγκεκριμένων κάθε φορά νοητικών σχημάτων, ως μία διαδικασία κρίσιμη για την κατανόηση, χρήση και κατασκευή εξισώσεων φυσικής.

Ανάλογα, στο πεδίο της διδακτικής των μαθηματικών, οι εξισώσεις περιγράφονται είτε ως διαδικασίες είτε ως αντικείμενα (Sfard, 2000), φέρνοντας στο φως τη διάσταση ανάμεσα σε μια επιφανειακή κατανόηση της εξισώσης, που μπορεί να συνοδεύεται από διαδικαστικό τύπου ενέργειες (π.χ. εκτέλεση αριθμητικών πράξεων), και σε βαθύτερες κατανοήσεις της εσωτερικής δομής της, που απαιτούν και πολυπλοκότερες ικανότητες διάκρισης ιδιοτήτων, αναγνώρισης διασυνδέσεων και εκτέλεσης πιθανών μετασχηματισμών (Dreyfus & Hocel, 2004).

Η παρούσα έρευνα θεμελιώνεται θεωρητικά στην τομή των σύγχρονων προσεγγίσεων που αναπτύσσονται στα ερευνητικά πεδία της διδακτικής της φυσικής και των μαθηματικών και αντιμετωπίζουν τις διαδικασίες συμβολισμού ως δράσεις μέσα από τις οποίες οι μαθητές χειρίζονται και ερμηνεύουν τα σύμβολα ενώ αλληλεπιδρούν με τις προσφερόμενες από το εργαλείο αναπαραστάσεις (Nemirovsky & Monk, 2000). Κοινή αφετηρία των ερευνών αυτών είναι ότι το νόημα δεν βρίσκεται στα ίδια τα σύμβολα, αλλά αναδύεται μέσα από τη χρήση τους, στο πλαίσιο συγκεκριμένων δραστηριοτήτων.

Μια δεύτερη θεωρητική αφετηρία της παρούσας έρευνας εκκινεί από το δυναμικό χαρακτήρα που έχουν αποκτήσει οι παραπάνω διαδικασίες στο πλαίσιο ειδικά σχεδιασμένων υπολογιστικών περιβαλλόντων, που νοούνται ως διερευνητικά εργαλεία (diSessa, Noss & Hoyles, 1995), η χρήση των οποίων είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με τη δημιουργία ενκαιριών εμπλοκής των μαθητών σε διαδικασίες πειραματισμού και έκφρασης ιδεών, περιλαμβάνοντας δυνατότητες για μοντελοποίηση, χρήση πολλαπλά διασυνδέομενων αναπαραστάσεων, δυναμικό χειρισμό και κιναισθητική διαχείριση των εικονιζομένων στη οθόνη (Kaput & Rochelle, 1997). Ιδιαίτερα στην περίπτωση της μελέτης της κίνησης και της ταχύτητας, η κατασκευή μοντέλων έχει υποδειχτεί ότι προσφέρει ένα ευνοϊκό πλαίσιο διερεύνησής τους που βασίζεται στη δυνατότητα επανακαθορισμού των χαρακτηριστικών ενός μοντέλου με βάση τον πειραματισμό και την παρατήρηση που αποτελούν τους κύριους τροφοδότες των ερμηνευτικών και επαγωγικών ικανοτήτων των μαθητών (Alimisis, 2000; Schott, 2003).

Στην παρούσα έρευνα επιχειρούμε να μελετήσουμε την εξέλιξη της διαδικασίας νοηματοδότησης και κατασκευής εξισώσεων από μαθητές Τ.Ε.Ε που εμπλέκονται σε δραστηριότητες μοντελοποίησης της κίνησης ενός αντικειμένου, αλληλεπιδρώντας παράλληλα με τις διαθέσιμες αναπαραστάσεις του εργαλείου.

ΤΟ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΟ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝ

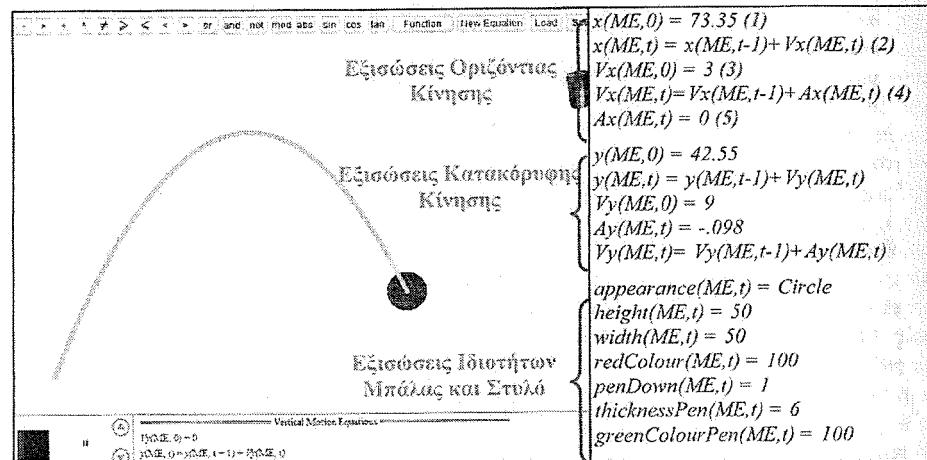
Το MoPiX (Winters et al., 2006) αποτελεί ένα προγραμματιστικό περιβάλλον το οποίο

δίνει τη δυνατότητα στο χρήστη να μοντελοποιήσει και να προσομοιώσει, μέσα σε ένα χώρο δύο διαστάσεων, καταστάσεις και φαινόμενα, όπως είναι η κίνηση και η κρούση αντικειμένων. Προκειμένου να αποδώσει τις κατάλληλες ιδιότητες και συμπεριφορές στα αντικείμενα που συμμετέχουν κάθε φορά στην προσομοίωση, ο χρήστης επιλέγει και εναποθέτει σε αυτά εξισώσεις που είτε βρίσκει έτοιμες μέσα στο υπολογιστικό περιβάλλον, είτε τις κατασκευάζει ο ίδιος.

Η επιφάνειας εργασίας του MoPiX v.1² αποτελείται από τρεις βασικές περιοχές: τη «Σκηνή», τη «Βιβλιοθήκη των Εξισώσεων» και τον «Επεξεργαστή Εξισώσεων». Η «Σκηνή» αποτελεί την περιοχή μέσα στην πραγματοποιούνται οι προσομοίωσεις. Τα αντικείμενα που τοποθετεί μέσα σε αυτή ο χρήστης είναι αρχικά μαύρα τετράγωνα στα οποία δεν έχουν αποδοθεί παρά μόνο ελάχιστες προκαθορισμένες (default) εξισώσεις, όπως είναι οι εξισώσεις αρχικής θέσης. Ο χρήστης έχει τη δυνατότητα να επιλέξει εξισώσεις μέσα από τη «Βιβλιοθήκη των Εξισώσεων» και τραβώντας τες να τις αποθέσει στα αντικείμενα που βρίσκονται μέσα στη «Σκηνή» (διαδικασία drag and drop), αποδίδοντάς τους, έτσι, και την αντίστοιχη συμπεριφορά. Οι εξισώσεις που περιέχει η «Βιβλιοθήκη» και έχει στη διάθεση του ο χρήστης είναι ταξινομημένες σε 15 διαφορετικές κατηγορίες, ανάλογα με το είδος της συμπεριφοράς που προσδίδονται στα αντικείμενο (π.χ. Εξισώσεις Οριζόντιας Κίνησης). Σε περίπτωση που οι εξισώσεις της «Βιβλιοθήκη» δεν περιγράφουν με ακρίβεια τις συμπεριφορές ή τις ιδιότητες που επιθυμεί να αποδώσει ο χρήστης στα αντικείμενά του, τότε υπάρχει η δυνατότητα να επεξεργαστεί και να τροποποιήσει τις ήδη υπάρχουσες ή να συντάξει νέες, χρησιμοποιώντας σε κάθε περίπτωση στον «Επεξεργαστή Εξισώσεων». Ο «Επεξεργαστής Εξισώσεων» διαθέτει μία σειρά από κουμπιά που αντιστοιχούν σε διάφορους τελεστές, όπως sin, +, or, >. Κάνοντας τους κατάλληλους συνδυασμούς τελεστών ο χρήστης μπορεί να κατασκεύασει μία πληθώρα εξισώσεων την συμπεριφορά των οποίων μπορεί να ελέγχει και να επαληθεύσει μέσα από την παραγόμενη προσομοίωση. Η εκκίνηση/παύση της προσομοίωσης και η αντίστοιχη έναρξη/λήξη της μέτρησης του χρόνου πραγματοποιείται με το πάτημα του κουμπιού Play/Pause, που βρίσκεται ακριβώς δίπλα στην «Βιβλιοθήκη των Εξισώσεων».

Η εικόνα που ακολουθεί δείχνει μία κόκκινη μπάλα να εκτελεί μία πλάγια βολή στο κενό, αφήνοντας πίσω της ένα πράσινο ίχνος. Οι εξισώσεις που της έχουν αποδοθεί και καθορίζουν τη συμπεριφορά της είναι ομαδοποιημένες σε τρεις κατηγορίες: Εξισώσεις Οριζόντιας Κίνησης, Εξισώσεις Κατακόρυφης Κίνησης και Εξισώσεις Ιδιοτήτων της Μπάλας και του Στυλό.

² Η νεότερη έκδοση του MoPiX (έκδοση 2) είναι διαθέσιμη στη διεύθυνση: <http://modelling4all.nsms.ox.ac.uk/ModelOldVersion/?MoPiX=1&session=new> η αγγλική έκδοση και στη <http://modelling4all.nsms.ox.ac.uk/ModelOldVersion/?MoPiX=1&locale/el&session=new> η ελληνική έκδοση.



Σχήμα 1: Μια κόκκινη μπάλα εκτελεί πλάγια βολή στο κενό αφήνοντας πίσω της ίχνος. Οι εξισώσεις που της έχουν αποδοθεί φαίνονται στο δεξί μέρος.

Παρατηρώντας τις εξισώσεις που καθορίζουν τη συμπεριφορά της κόκκινης μπάλας, στο δεξί κομμάτι του Σχήματος 1, μπορεί κάποιος να διακρίνει ότι οι εξισώσεις του MoPiX ενσωματώνουν σύμβολα που αντιστοιχούν στην «επίσημη» γλώσσα που χρησιμοποιείται στα μαθηματικά και τη φυσική, όπως "x", "t", καθώς επίσης και σύμβολα που αντιστοιχούν στην καθημερινή μας γλώσσα, όπως "ME" (εγώ), "appearance" (εμφάνιση) και "Circle" (κύκλος). Παρόλα αυτά, το βασικό χαρακτηριστικό όλων αυτών των εξισώσεων είναι ότι αποτελούν συναρτήσεις του χρόνου, όπως δηλώνεται και από το δεύτερο όρισμα της παρένθεσης στο αριστερό μέρος των εξισώσεων. Για παράδειγμα, οι Εξισώσεις Οριζόντιας κίνησης που έχουν αποδοθεί στην κόκκινη μπάλα καθορίζουν: τη θέση της κατά X τη χρονική στιγμή 0 (1), τη θέση της κατά X σε κάθε χρονική στιγμή (2), την ταχύτητά της κατά X τη χρονική στιγμή 0 (3), την ταχύτητά της κατά X σε κάθε χρονική στιγμή (4), την επιτάχυνσή της κατά X σε κάθε χρονική στιγμή. Το MoPiX υπολογίζει τις τιμές όλων των προαναφερθέντων μεγεθών σε κάθε χρονική στιγμή και ανανεώνει κατάλληλα την οθόνη, δίνοντας στο χρήστη την αίσθηση της προσομοίωσης.

Σε αντίθεση με όλα περιβάλλοντα προσομοίωσης, ο χρήστης του MoPiX έχει πρόσβαση στη βαθιά δομή του εργαλείου (diSessa, 2000) καθώς οι εξισώσεις που έχουν αποδοθεί στο αντικείμενο και καθορίζουν την προσομοίωση δεν αποτελούν «black box» (Kynigos, 2004), ένα, δηλαδή, αδιαφανές «μαύρο κουτί» που μόνο ένας εξειδικευμένος χρήστης μπορεί να δει και να τροποποιήσει το περιεχόμενό του. Γυρίζοντας ανάποδα τα αντικείμενα που βρίσκονται στη «Σκηνή» του MoPiX («Flip object»), οι εξισώσεις που έχουν αποδοθεί σε αυτά γίνονται άμεσα ορατές και ταυτόχρονα προσβάσιμες, ώστε ο χρήστης να μπορεί να τις εξετάσει, να τις διαγράψει ή να τις επεξεργαστεί κατάλληλα για να τις προσαρμόσει στις απαιτήσεις του. Η βαθιά πρόσβαση στη δομή της προσομοίωσης και η δυνατότητα επέμβασης σε αυτή, καθιστά τον χρήστη δημιουργό και διαχειριστή του μοντέλου που καθορίζει την προσομοίωση και όχι παθητικό καταναλωτή ενός προκατασκευασμένου προϊόντος (Harel & Papert, 1991) που απλά παρατηρεί ή αλλάζει τιμές μόνο σε συγκεκριμένες -προκαθορισμένες από το δημιουργό της προσομοίωσης- παραμέτρους. Δοκιμάζοντας διαφορετικές εξισώσεις και

ενεργοποιώντας κάθε φορά την προσομοίωση, ο χρήστης στο MoPiX μπορεί να μοντέλοποιήσει καταστάσεις και φαινόμενα που θέλει να εξερευνήσει και στη συνέχεια να τα οπτικοποιήσει, συνδέοντας, έτσι, τη συμβολική αναπαράσταση (μαθηματικός φορμαλισμός των εξισώσεων) με τη γραφική/οπτική αναπαράσταση που προκύπτει από την εκτέλεση του μοντέλου. Η οπτική παρατήρηση του φαινομένου που απορρέει κάθε φορά από το μοντέλο που έχει δημιουργήσει και η συνεχής και σταδιακή εκσφαλμάτωση και βελτίωση του μοντέλου αυτού (debugging), δίνει τη δυνατότητα στο το μαθητή να κατασκευάσει νοήματα σχετικά με μαθηματικές έννοιες ή έννοιες της φυσικής που εμπλέκονται στο υπό προσομοίωση φαινόμενο.

ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Η έρευνα σχεδιασμού (Cobb et al., 2003) που περιγράφεται στην παρούσα εργασία πραγματοποιήθηκε στα πλαίσια του Ευρωπαϊκού ερευνητικού προγράμματος ReMath³. Σε αυτήν συμμετείχαν 8 μαθητές της Γ' τάξης Τ.Ε.Ε της ειδικότητας Μηχανικών Εργαλειομηχανών του τομέα Μηχανολόγων Μηχανικών, μία εκπαιδευτικός της αντίστοιχης ειδικότητας που είχε ταυτόχρονα και ρόλο ερευνήτριας καθώς και ένας ακόμα ερευνητής του Εργαστηρίου Εκπαιδευτικής Τεχνολογίας. Η έρευνα διενεργήθηκε στο εργαστήριο υπολογιστών που διαθέτει το σχολείο και διήρκησε 25 διδακτικές ώρες (Νοέμβριος – Δεκέμβριος 2007). Κατά τη διάρκεια των 25 διδακτικών ωρών οι μαθητές εργάστηκαν με το υπολογιστικό περιβάλλον MoPiX σε ομάδες των δύο ή τριών ατόμων και ενεπλάκησαν σε δραστηριότητες κατασκευής και χειρισμού μοντέλων. Στη διάθεσή τους είχαν το εγχειρίδιο του περιβάλλοντος, μεταφράσεις επιλεγμένων συμβόλων εξισώσεων της «Βιβλιοθήκης», Φύλλα Εργασίας που είχαν προετοιμάσει οι ερευνητές και ένα τετράδιο για να καταγράφουν τις ιδέες τους.

Οι μεθοδολογική προσέγγιση που υιοθετήθηκε στην παρούσα έρευνα βασίστηκε στη συμμετοχική παρατήρηση των δραστηριοτήτων των μαθητών σε πραγματικό χρόνο. Οι ερευνητές παρενέβαιναν στις συζητήσεις των μαθητών μόνο για να τους θέσουν καίρια ερωτήματα, να τους ενθαρρύνουν ώστε να επεξηγήσουν στα υπόλοιπα μέλη της ομάδας ή και σε άλλες ομάδες της τάξης τις στρατηγικές που ακολουθούσαν, να τους παροτρύνουν εκφράστουν και να υλοποιήσουν τις ιδέες τους.

Η συλλογή δεδομένων έγινε με τη βοήθεια ενός λογισμικού που επέτρεπε την ταυτόχρονη καταγραφή ήχουν και εικόνας από τον υπολογιστή που είχε στη διάθεσή της η κάθε ομάδα μαθητών, ενώ στο σώμα των δεδομένων συγκαταλέγονται, ακόμα, τα μοντέλα που κατασκεύασαν οι μαθητές, οι σημειώσεις και οι απαντήσεις που έδωσαν στα Φύλλα Εργασίας καθώς και οι σημειώσεις των ερευνητών. Για την ανάλυση των δεδομένων απομαγνητοφωνήθηκαν πλήρως οι διάλογοι δύο ομάδων εστίασης, ενώ χρησιμοποιήθηκαν και επεισόδια από άλλες ομάδες τα οποία θεωρήθηκαν ενδιαφέροντα από τους ερευνητές. Μονάδα ανάλυσης αποτέλεσε το θεματικό επεισόδιο, το οποίο ορίστηκε ως ένα απόσπασμα διαλόγων και πράξεων των μαθητών γύρω από κάποιο συγκεκριμένο θέμα. Τα επεισόδια επιλέχθηκαν με τέτοιο τρόπο ώστε να αναδεικνύουν τη διαδικασία νοηματοδότησης εξισώσεων κίνησης που ήδη υπήρχαν στο περιβάλλον αλλά και κατασκευής νέων, μέσα από την αλληλεπίδραση των μαθητών με τις αναπαραστάσεις του εργαλείου (συμβολική αναπαράσταση – εξισώσεις και οπτική αναπαράσταση – προσομοίωση).

³ “ReMath” (Representing Mathematics with Digital Media), European Community, 6th Framework Programme, Information Society Technologies, IST-4-26751-STP, 2005 - 2008 (<http://remath.cti.gr>).

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ

Στην παρούσα εργασία θα εστιάσουμε σε μία από τις δραστηριότητες, σημείο εκκίνησης της οποίας αποτέλεσε η προσομοίωση της κίνησης μιας μπάλας που εκτελούσε πλάγια βολή στο κενό. Η σύγκρουση της μπάλας με τα πλαισία ή το κάτω όριο του πλαισίου που καθορίζει την επιφάνεια εργασίας του περιβάλλοντος είχε ως αποτέλεσμα την ανατηδόηση και την απομάκρυνση της με ταχύτητα ίσου μέτρου και αντίθετης φοράς με εκείνη που είχε πριν από τη σύγκρουση ($u_x = -u_x$ και $u_y = -u_y$ αντίστοιχα).

Σε πρώτη φάση ζητήθηκε από τους μαθητές να παρατηρήσουν την κίνηση της μπάλας, να συζητήσουν με τους συμμαθητές τους τη συμπεριφορά του αντικειμένου και να καταγράψουν λεπτομερώς τις παρατηρήσεις τους στο αντίστοιχο Φύλλο Εργασίας. Μετά από συζήτηση σε ολομέλεια τάξης σχετικά με το ρόλο των εξισώσεων στην προσομοίωση που παρατηρήσαν, οι μαθητές κλήθηκαν να δημιουργήσουν ένα νέο αντικείμενο το οποίο θα είχε ακριβώς την ίδια συμπεριφορά με το αρχικό. Κατά τη διάρκεια της δραστηριότητας αυτής ενθαρρύναμε τους μαθητές να χρησιμοποιήσουν τις εξισώσεις της «Βιβλιοθήκης» ώστε να ορίσουν τη συμπεριφορά του νέου αντικειμένου τους, αλλά και να αποδομήσουν το μοντέλο που καθόριζε την κίνηση του αρχικού, μελετώντας, έτσι, τις εξισώσεις που είχαν αποδοθεί σε αυτό. Καθώς είχαμε επιλέξει η ταχύτητα του αρχικού αντικειμένου να είναι αρκετά μικρή, περιμέναμε στο τέλος αυτής της φάσης, οι μαθητές να αρχίσουν να τροποποιούν το αρχικό μοντέλο κίνησης (π.χ. να κάνουν τη μπάλα να κινείται πιο γρήγορα και συνεπώς λιγότερο «βαρετά») και να περιγράφουν μέσα από νέες εξισώσεις, νέες συμπεριφορές κίνησης για τα αντικείμενα τους.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Η εξοικείωση των μαθητών με το υπόλογιστικό περιβάλλον και τις εξισώσεις που αντό διέθετε («Βιβλιοθήκη των Εξισώσεων»), δεν έγινε τους ερευνητές με τη μορφή παρουσίασης. Αντίθετα, επιλέχτηκε η άμεση εμπλοκή των μαθητών με την προσομοίωση της κίνησης της μπάλας, ώστε, μέσω αυτής, να έρθει στην επιφάνεια ο ρόλος των εξισώσεων στην κατασκευή του μοντέλου που οπτικοποιούσε η προσομοίωση. Έτσι, δταν οι μαθητές κλήθηκαν να αναπαράγουν την κίνηση του αρχικού αντικειμένου, οι εξισώσεις θέσης, ταχύτητας και επιτάχυνσης που έβρισκαν κάθε φορά στη «Βιβλιοθήκη των Εξισώσεων» και χρησιμοποιούσαν, δεν ήταν εξισώσεις που τους είχαν προηγουμένως οι ερευνητές αναλύσει και εξηγήσει. Συνεπώς, για τους μαθητές, οι εξισώσεις κίνησης του περιβάλλοντος αποτέλεσαν αντικείμενο γνήσιας διερεύνησης και πειραματισμού.

Ενδιαφέρον στη δραστηριότητα των μαθητών παρουσιάζει ο τρόπος με τον οποίο αρχικά χρησιμοποίησαν τις εξισώσεις κίνησης που πήραν έτοιμες από τη «Βιβλιοθήκη» του υπόλογιστικού περιβάλλοντος και ο τρόπος που στη συνέχεια νοηματοδότησαν τις εξισώσεις αυτές άλλα και κατασκεύασαν νέες ώστε να υλοποιήσουν δικές τους ιδέες σχετικά με την κίνηση των δικών τους αντικειμένων.

Οι μαθητές της ομάδας Β, στην προσπάθειά τους να αναπαράγουν την κίνηση του αρχικού αντικειμένου, αναζήτησαν έτοιμες εξισώσεις από τη «Βιβλιοθήκη των Εξισώσεων» που θα μπορούσαν να αποδώσουν στο δικό τους αντικείμενο συμπεριφορά δύμοια με εκείνη που είχαν προηγουμένως καταγράψει παρατηρώντας την προσομοίωση της κίνησης της μπάλας. Οι πρώτη κατηγορία εξισώσεων που εντόπισαν ήταν η κατηγορία που περιείχε δύες τις «Εξισώσεις Οριζόντιας Κίνησης».

M2 Να σου πω, να ξεκινήσουμε πρώτα από τον οριζόντιο άξονα;

M1 Ναι

M2 Ωραία.

- M1 Αφού την έχουμε την συνάρτηση. Να τη;
 M2 Ναι, περίμενε όμως. Αυτή είναι η αρχική; Αυτή είναι λίγο μπέρδεμα
 M1 Τη βάλαμε ε; Δεν την έβαλες αυτή; [$f(x(ME,t)) = x(ME,t-1) + Vx(ME,t)$]
 M2 Όχι δεν έχω βάλει την εξίσωση μέσα ακόμα
 M1 Ρίξτο αυτό. Πάτα αυτό. [$Vx(ME,0) = Vx(ME,t-1) + Ax(ME,t)$]
 M2 Μην τα ρίχνεις έτσι στην τύχη. Αυτό σου λέει ότι... Περίμενε αυτή σου λέει ότι το αντικείμενο σε χρ..., και ο χρόνος... Μήπως είναι ανάλογα;
 M1 Το Α τι είναι; Το Α ξέρεις τι είναι, ε; Το Α. Α του χ;

Αρχικά οι μαθητές φαίνεται να αποδίδουν στο αντικείμενό τους εξισώσεις χωρίς να νοηματοδοτούν τα σύμβολα από τα οποία αντέξ αποτελούνται. Τραβώντας όλες τις εξισώσεις μέσα από την κατηγορία «Εξισώσεις Οριζόντιας Κίνησης» και εναποθέτοντάς τες στο αντικείμενό τους, οι μαθητές κατάφεραν να το κάνουν να κινηθεί ευθύγραμμα ομαλά στον οριζόντιο άξονα, χωρίς, όμως, να έχουν ερμηνεύσει το είδος της συμπεριφοράς που περιγράφει η κάθε μία από τις εξισώσεις που χρησιμοποίησαν.

Προχωρώντας, όμως, στις «Εξισώσεις Κατακόρυφης Κίνησης», οι μαθητές φαίνεται να αλλάζουν στρατηγική και να εστιάζουν πλέον στο είδος της συμπεριφοράς που αποδίδουν στο αντικείμενό τους οι εξισώσεις της «Βιβλιοθήκη». Η εξίσωση $Vy(ME,0)=0$ που εντοπίζουν στην κατηγορία «Εξισώσεις Κατακόρυφης Κίνησης» και ορίζει την αρχική ταχύτητα του αντικειμένου στον άξονα Y (ίση με 0), γίνεται αντικείμενο πειραματισμού.

- M2 Τι; Το έβαλες να πηγαίνει 0; [$f(M) δίνει τη Vy(ME,0) = 0$ και ζεκινά την προσομοίωση]
 M2 Πάτα λίγο play. Δεν έκανες τίποτα το έβαλες απλά στο 0 να είναι 0. Στην αρχική θέση να είναι 0 η ταχύτητά του [$f(M) δίαβαζε την εξίσωση$]. Δεν του έκανες τίποτα. Δεν άλλαξε δηλαδή να κατέβει κάτω.
 M1 Ναι, ναι.
 M2 Βάλε αρχική ταχύτητα 3. Αυτό που πείραξες προηγουμένως. Με τη διαφορά ότι στο ίσον θα βάλουμε 3. Εκεί. Πήγαινε το πάνω.
 M1 Δεν πρέπει όμως να πάρει και μία επιτάχυνση; Αφού δεν του έχουμε ορίσει. Ταχύτητα μόνο του ορίσαμε.
 M2 Ναι, την ταχύτητα. Ένα – ένα θα τα βάλουμε.
 E2 Του ορίσαμε ταχύτητα
 M2 Αρχική ταχύτητα στη θέση 0. Θα ορίσουμε και στις άλλες θέσεις.

Σε αυτή τη φάση, οι μαθητές φαίνεται πλέον να δοκιμάζουν τις εξισώσεις της «Βιβλιοθήκης» που αποδίδουν στο αντικείμενό τους και να εκκινούν κάθε φορά την προσομοίωση ώστε να επιβεβαιώσουν το είδος της συμπεριφοράς που αντέξ περιγράφουν. Μέσα από τη διαδικασία αυτή, οι μαθητές εντοπίζουν την εξίσωση $Vy(ME,0)=0$, η επιλογή της οποίας δεν είχε το αναμενόμενο αποτέλεσμα για την κίνηση του αντικειμένου τους. Οι μαθητές, ερμηνεύοντας την ανατροφοδότηση από την προσομοίωση του εργαλείου, προσπαθούν τώρα να νοηματοδοτήσουν την εξίσωση και να συνδέσουν τα σύμβολα από τα οποία αποτελείται με τη συμπεριφορά που περιγράφει.

Έχοντας νοηματοδοτήσει την αρχική εξίσωση και έχοντας κατά νου τις παρατηρήσεις τους σχετικά με την κατακόρυφη κίνηση του αρχικού αντικειμένου, οι μαθητές επιχειρούν να τροποποιήσουν την εξίσωση που βρήκαν στη «Βιβλιοθήκη» και να κατασκευάσουν μία νέα. Η τροποποίηση αυτή συνίσταται στην απλή αλλαγή μίας αριθμητικής τιμής στο δεύτερο μέλος της εξίσωσης ($Vy(ME,0)=3$).

Ταυτόχρονα, σε αυτό το επεισόδιο οι μαθητές δείχνουν να απομακρύνονται από τις έτοιμες εξισώσεις που βρίσκουν στη «Βιβλιοθήκη» και να συζητούν πλέον για το είδος της συμπεριφοράς που θα δώσουν στο αντικείμενό τους με βάση τις παρατηρήσεις τους σχετικά με την προσομοίωση της κίνησης του αρχικού αντικειμένου. Χωρίς ακόμα εμπλέκουν

σύμβολα, οι μαθητές αναγνωρίζουν ότι χρειάζεται να ορίσουν εξισώσεις που θα αναφέρονται σε έννοιες όπως η «επιτάχυνση» και η «ταχύτητα και στις υπόλοιπες θέσεις».

Έτσι, έχοντας νοηματοδοτήσει την εξισώση της αρχικής ταχύτητας («στη θέση 0»), οι μαθητές αναζητούν τρόπους για να εκφράσουν την ταχύτητα της μπάλας σε διαφορετικές χρονικές στιγμές («και σε άλλες θέσεις»), έχοντας ήδη αποφασίσει ότι αυτή θα είναι σταθερή και ίση με την αρχική (ίση με 3). Αν και στη «Βιβλιοθήκη των Εξισώσεων» υπάρχει έτοιμη εξισώση ταχύτητας για κάθε χρονική στιγμή, οι μαθητές επιλέγουν να φτιάξουν μία νέα εξισώση που θα έχει προσωπικό νόημα για εκείνους.

M2: Δηλαδή να το εκφράσουμε απεριόριστα [enν. διατήρηση της σταθερής τιμής της ταχύτητας στο χρόνο].

M1: Χρόνο κάτει. Συν πάντα 1.

M2: Αυτό θέλει σύμβολο;

E2: Θέλει σύμβολο; Καλή ερώτηση. Δηλαδή πως θα το εκφράσετε;

M2: Με σύμβολα συνήθως εκφράζουμε που δεν μπορούμε να γράψουμε ακριβώς.

M1: Συν... t. [Γράφει $V_y(ME,t)=3$].

M1: Δηλαδή εγώ το βλέπω αυτό το σύμβολο [enν. το t].

M2: Και ξέρω ότι είναι το άπειρο.

Σε αυτό το επεισόδιο, οι μαθητές, αφού έχουν νοηματοδοτήσει και ορίσει την εξισώση της ταχύτητας του αντικειμένου «στη θέση 0» με τον τρόπο που παρουσιάστηκε προηγουμένως, επιχειρούν τώρα να κατασκευάσουν μία νέα εξισώση το νόημα της οποίας έχουν ήδη προαποφάσισει. Εμπλέκονται, έτσι, σε διαδικασίες συμβολισμού για να εκφράσουν μία νέα συμπεριφορά, κάνοντας χρήση της δομής μίας υπάρχουσας εξισώσης (της $V_y(ME,0)=3$ που κατασκεύασαν στην προηγούμενη φάση). Καταλήγουν στο σύμβολο του χρόνου (t) για να αποδώσουν στη συμπεριφορά του αντικειμένου τους το χαρακτήρα του «άπειρου» ή του «απεριόριστα». Η τροποποίηση που κάνουν αυτή τη φορά, δεν είναι στο επίπεδο αλλαγής μίας αριθμητικής τιμής, αφού η εξισώση που τελικά κατασκευάζουν εκφράζει μία συναρτησιακή σχέση ανάμεσα στην ταχύτητα και το χρόνο.

Τα παραπάνω επεισόδια είναι ενδεικτικά της εξέλιξης της διαδικασίας νοηματοδότησης και κατασκευής νέων εξισώσεων κίνησης από τους μαθητές κατά τη διάρκεια της αλληλεπίδρασής τους με ειδικά σχεδιασμένα εργαλεία έκφρασης και πειραματισμού. Οι μαθητές, στην προσπάθειά μοντελοποίησης της κίνησης ενός αντικειμένου, ξεκίνησαν χρησιμοποιώντας έτοιμες εξισώσεις χωρίς να ερμηνεύουν τα σύμβολα από τα οποία αποτελούνται, συνέχισαν εξερευνώντας τις συμπεριφορές που οι εξισώσεις αντές περιέγραφαν συνδέοντας την οπτική αναπαράσταση με τα σύμβολα των εξισώσεων, τροποποίησαν τις εξισώσεις για να πετύχουν τις δικές τους επινοήσεις σχετικά με την κίνηση του αντικειμένου του και τελικά επινόησαν μία νέα εξισώση της οποίας το νόημα είχαν προαποφάσισει χρησιμοποιώντας διαδικασίες συμβολισμού. Η διαδικασία νοηματοδότησης και κατασκευής νέων εξισώσεων φαίνεται να είναι αλληλένδετη με τη δυνατότητα έκφρασης των μαθητών μέσα από τη συμβολική αναπαράσταση του περιβάλλοντος, με την ανταπόκριση των εργαλείου που προσφέρεται μέσα από την οπτική αναπαράσταση – προσομοίωση αλλά και τη δυναμική διασύνδεση των δύο αυτών αναπαραστάσεων.

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Η παρούσα έρευνα εντάσσεται στο πλαίσιο του ευρωπαϊκού έργου Remath (Representing Mathematics with Digital Media), <http://remath.cti.gr>, European Community, 6th Framework Programme, Information Society Technologies (IST), IST-4-26751-STP, 2005-2008. Για την

εικόνηση της έρευνας χρησιμοποιήθηκε η πρώτη έκδοσή του λογισμικού MoPiX που αναπτύχθηκε στο πλαίσιο του ίδιου έργου.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Alimisis D., Teaching the instantaneous velocity as the Limit of $\Delta x/\Delta t$: A computer based Approach, *Proceedings of the Third International Conference on Science Education Research in the Knowledge Based Society*, ESERA, Aristotle University of Thessaloniki, 2001, p. 264-6.
2. diSessa A. (1993) Towards an epistemology of physics. *Cognition and Instruction*, 10, 105–225.
3. diSessa, A. (2000). *Changing Minds, Computers, Learning and Literacy*. Cambridge, MA: MIT Press.
4. diSessa, A., Hoyles, C. & Noss, R. (Eds.) (1995) *Computers and Exploratory Learning*, Berlin: Springer-Verlag.
5. Dreyfus, T., & Hoch, M. (2004). Equations – A structural approach. In M. J. Hoines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1 pp. 152–155). Bergen, Norway: Bergen University College.
6. Harel, I., & Papert, S. (1991). Constructionism: Research Reports & Essays, 1985-1990 by the Epistemology & Learning Research Group. Norwood, US: Ablex Publishing Corporation.
7. Kaput, J. J., & Roschelle, J. (1997). Deepening the impact of technology beyond assistance with traditional formalisms in order to democratize access ideas underlying calculus. In E. Pehkonen (Ed.), *Proceedings of the 21st Conference. International group for the psychology of mathematics education* (Vol. 1 pp. 105–112). Helsinki, Finland: University of Helsinki.
8. Κυνηγός, Χ. (2007) *To Μάθημα της Διερεύνησης*, Εκδ. Ελληνικά Γράμματα.
9. Kynigos, C. (2004) A black and white box approach to user empowerment with component computing, *Interactive Learning Environments*, Carfax Pubs, Taylor & Francis Group, Vol. 12, 1–2, 27–71. (2)
10. Nemirovsky, R. & Monk, S. (2000) "If you look at it the other way ...": An exploration into the nature of symbolizing, in P. Cobb, E. Yackel & K. McClain (Eds.), *Symbolizing and Communicating in Mathematics Classrooms*, Lawrence Erlbaum Associates, 177-221.
11. Schorr, R. Y. (2003) Motion, speed, and other ideas that "should be put in books", *Journal of Mathematical Behavior*, 22, 467-479.
12. Stård, A. (2000) Symbolizing mathematical reality into being – or how mathematical discourse and mathematical objects create each other, in P. Cobb, E., Yackel & K., McClain (Eds.) *Symbolizing and Communicating in Mathematics Classrooms*, Lawrence Erlbaum Associates, 37-98.
13. Sherin, B. L. (2001a). How students invent representations of motion: A genetic account. *Journal of Mathematical Behavior*, 19, 399–443.
14. Sherin, B. L. (2001b) How students understand physics equations. *Cognition and Instruction*, 19, 479–541.
15. Simpson, G., Hoyles, C., & Noss, R. (2006). Exploring the mathematics of motion through construction and collaboration. *Journal of Computer Assisted Learning*, 22, 114–136.
16. Trowbridge D.E. & McDermott L.C. (1980) Investigation of student understanding of the concept of velocity in one dimension, *American Journal of Physics*, Vol 48(12), 1020-28.
17. Winters, N., Kahn, K. Nikolic, D., & Morgan, C. (2006). Design sketches for MoPiX: A mobile game environment for learning mathematics. London Knowledge Lab, Technical Report.

εκπόνηση της έρευνας χρησιμοποιήθηκε η πρώτη έκδοσή του λογισμικού MoPiX που αναπτύχθηκε στο πλαίσιο του ίδιου έργου.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Alimisis D., Teaching the instantaneous velocity as the Limit of $\Delta x/\Delta t$: A computer based Approach, *Proceedings of the Third International Conference on Science Education Research in the Knowledge Based Society*, ESERA, Aristotle University of Thessaloniki, 2001, p. 264-6.
2. diSessa A. (1993) Towards an epistemology of physics. *Cognition and Instruction*, 10, 105–225.
3. diSessa, A. (2000). *Changing Minds, Computers, Learning and Literacy*. Cambridge, MA: MIT Press.
4. diSessa, A., Hoyles, C. & Noss, R. (Eds.) (1995) *Computers and Exploratory Learning*, Berlin: Springer- Verlag.
5. Dreyfus, T., & Hoch, M. (2004). Equations – A structural approach. In M. J. Hoines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1 pp. 152–155). Bergen, Norway: Bergen University College.
6. Harel, I., & Papert, S. (1991). Constructionism: Research Reports & Essays, 1985-1990 by the Epistemology & Learning Research Group. Norwood, US: Ablex Publishing Corporation.
7. Kaput, J. J., & Roschelle, J. (1997). Deepening the impact of technology beyond assistance with traditional formalisms in order to democratize access ideas underlying calculus. In E. Pehkonen (Ed.), *Proceedings of the 21st Conference. International group for the psychology of mathematics education* (Vol. 1 pp. 105–112). Helsinki, Finland: University of Helsinki.
8. Κυνηγός, Χ. (2007) *To Μάθημα της Διερεύνησης*, Εκδ. Ελληνικά Γράμματα.
9. Kynigos, C. (2004) A black and white box approach to user empowerment with component computing, *Interactive Learning Environments*, Carfax Pubs, Taylor & Francis Group, Vol. 12, 1–2, 27–71. (2)
10. Nemirovsky, R. & Monk, S. (2000) "If you look at it the other way ...": An exploration into the nature of symbolizing, in P. Cobb, E. Yackel & K. McClain (Eds.), *Symbolizing and Communicating in Mathematics Classrooms*, Lawrence Erlbaum Associates, 177-221.
11. Schorr, R. Y. (2003) Motion, speed, and other ideas that "should be put in books", *Journal of Mathematical Behavior*, 22, 467-479.
12. Sfard, A. (2000) Symbolizing mathematical reality into being – or how mathematical discourse and mathematical objects create each other, in P. Cobb, E., Yackel & K., McClain (Eds.) *Symbolizing and Communicating in Mathematics Classrooms*, Lawrence Erlbaum Associates, 37-98.
13. Sherin, B. L. (2001a). How students invent representations of motion: A genetic account. *Journal of Mathematical Behavior*, 19, 399–443.
14. Sherin, B. L. (2001b) How students understand physics equations. *Cognition and Instruction*, 19, 479–541.
15. Simpson, G., Hoyles, C., & Noss, R. (2006). Exploring the mathematics of motion through construction and collaboration. *Journal of Computer Assisted Learning*, 22, 114–136.
16. Trowbridge D.E. & McDermott L.C. (1980) Investigation of student understanding of the concept of velocity in one dimension, *American Journal of Physics*, Vol 48(12), 1020-28.
17. Winters, N., Kahn, K. Nikolic, D., & Morgan, C. (2006). Design sketches for MoPiX: A mobile game environment for learning mathematics. London Knowledge Lab, Technical Report.