

## Σεμινάριο (τοπολογικής) K-θεωρίας

Σκοπός του σεμιναρίου αυτού είναι να μελετήσουμε την τοπολογική -κυρίως, αλλά όχι αποκλειστικά- K-θεωρία, τόσο ως αυτόνομο θέμα με τα δικά του προβλήματα και εφαρμογές, αλλά και τη σύνδεσή της με άλλους τομείς, όπως είναι η μη μεταθετική γεωμετρία.

Αφού εξετάσουμε τους βασικούς ορισμούς και κατασκευές διανυσματικών δεσμών σε γενικούς τοπολογικούς χώρους, θα ορίσουμε για ένα χώρο  $X$  την (μιγαδική) K-θεωρία  $K(X)$ , χρησιμοποιώντας τον ημιδακτύλιο των (κλάσεων ισοδυναμίας) μιγαδικών διανυσματικών δεσμών του  $X$ . Θα δούμε πως αυτή αποτελεί μια γενικευμένη θεωρία συνομολογίας, καθώς επίσης και τη σχέση της K-θεωρίας με τη συνηθισμένη συνομολογία, μέσω του χαρακτήρα του Chern. Επίσης θα αποδείξουμε ένα θεώρημα περιοδικότητας. Θα παρουσιάσουμε και την πρώτη απόδειξη του θεωρήματος περιοδικότητας, που χρησιμοποιεί το θεώρημα περιοδικότητας του Bott για τις ομάδες ομοτοπίας της άπειρης ορθογώνιας ομάδας, η οποία έγινε με χρήση θεωρίας Morse, αλλά και πιο αλγεβρικές αποδείξεις από τον Atiyah κι άλλους, οι οποίες έχουν το πλεονέκτημα πως μπορούν να γενικευτούν και για άλλες, εκτός της τοπολογικής, K-θεωρίες. Θα μιλήσουμε επίσης για τη σχέση της K-θεωρίας με την ευσταθή θεωρία ομοτοπίας, το πρόβλημα των διανυσματικών πεδίων στις σφαίρες κ.α.

Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας τις ιδέες που αναπτύξαμε για την τοπολογική K-θεωρία και εντοπίζοντας τα καθαρά αλγεβρικά χαρακτηριστικά των ορισμών και των μεθόδων απόδειξης των διαφόρων θεωρημάτων, θα περάσουμε στη λεγόμενη αλγεβρική K-θεωρία, και ειδικά θα ορίσουμε την K-θεωρία μια  $C^*$  άλγεβρας (για την οποία, όπως θα δούμε, υπάρχει πάλι ένα θεώρημα περιοδικότητας), με στόχο, αν ο χρόνος το επιτρέψει, να αναφερθούμε στην εικασία Baum-Connes και στις επιπλέον έννοιες που χρειάζονται για την κατανόησή της, που θα μπορούσαν να αποτελέσουν το περιεχόμενο ενός νέου σεμιναρίου.

Τα προαπαιτούμενα για αυτό το σεμινάριο είναι μόνο βασικές γνώσεις από γενική τοπολογία και λίγη βασική άλγεβρα και κάποιος μπορεί να το αντιμετωπίσει και ως ένα σεμινάριο αλγεβρικής τοπολογίας στο οποίο εισάγουμε κάποιες νέες αναλλοίωτες πέρα από τις πιο κλασικές (ομάδες ομολογίας και ομοτοπίας), χωρίς να απαιτείται οποιαδήποτε τριβή με την αλγεβρική τοπολογία ωστόσο. Οι συμμετέχοντες ενθαρρύνονται να συμμετέχουν τόσο στη επιλογή των θεμάτων που θα μελετήσουμε -στα πλαίσια που θέσαμε παραπάνω- , αλλά και να αναλάβουν να κάνουν κάποιες παρουσιάσεις και οι ίδιοι.

Παραθέτουμε κάποιες βασικές πηγές για το σεμινάριο. Στη διάρκειά του θα δωθούν περισσότερες αναφορές.

### Βιβλιογραφία

- *Noncommutative Geometry*, A. Connes, <http://www.alainconnes.org/docs/book94bigpdf.pdf>
- *K-Theory*, Lectures by M. Atiyah
- *K-Theory, An introduction*, M. Karoubi, Springer (2008)
- *Vector bundles and K-Theory*, A. Hatcher,
- <http://pi.math.cornell.edu/~hatcher/VBKT/VBpage.html>
- *K-Theory for Operator Algebras*, B. Blackadar,
- <https://wolfweb.unr.edu/homepage/bruceb/Book6.pdf>